Mécanique – chapitre 4

TD application : approche énergétique

I Intérêt des raisonnements énergétiques

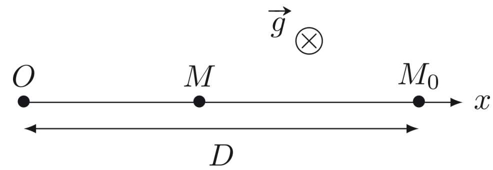
1 On lance une balle avec une vitesse initiale v_0 vers le haut depuis l'altitude $z = 0$. Déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle en négligeant tout frottement.

2 On considère un pendule simple (masse m ponctuelle, longueur ℓ, pas de frottements). On fait partir ce pendule de la verticale ($\theta = 0$, en bas) en lui communiquant une vitesse initiale v_0. Déterminer l'expression de l'amplitude maximale $\theta_{\max}$ du mouvement.

II Curling

Le curling est un sport de précision pratiqué sur la glace avec des pierres en granite, taillées et polies selon un gabarit international. Le but est de placer les pierres le plus près possible d'une cible circulaire dessinée sur la glace, appelée la maison.

Nous envisageons le lancer d'une pierre assimilée à un point M de masse $m = 20\,\text{kg}$ glissant selon l'axe Ox vers le point M_0 visé (la maison). La pierre est lancée de la position initiale O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$, la maison se trouvant à la distance $D = \text{OM}_0 = 25\,\text{m}$ du point O.



Nous supposerons que la force de frottement solide $\vec{F} = -F_0\overrightarrow{u_x}$ de la glace sur la pierre est constante pendant toute la glissade et s'annule lorsque la vitesse de la pierre s'annule. Nous prendrons $F_0 = 3{,}0\,\text{N}$. Nous négligerons par ailleurs toute force de frottement fluide.

Le lancer étudié est supposé gagnant : la pierre atteint la maison et s'y arrête.

1 Exprimer le travail des forces appliquées sur la pierre pendant la glissade.

2 Que valent les énergies cinétiques initiale $\mathcal{E}_{c,I}$ et finale $\mathcal{E}_{c,F}$ de la pierre ? Appliquer alors le théorème de l'énergie cinétique à la pierre et en déduire la vitesse initiale v_0.

III Piégeage d'un électron

Considérons le mouvement selon un axe (Oz) d'un électron de masse $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$ et de charge $-e = -1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$ dans un dispositif de piégeage. Il est soumis uniquement à des forces conservatives, d'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p(z)$ telle que :

$$\mathcal{E}_p(z) = \frac{eV_0}{2d^2}z^2$$

avec $V_0 = 5{,}0\,\text{V}$ et $d = 6{,}0\,\text{mm}$.

1 Tracer l'allure de $\mathcal{E}_p(z)$. Identifier la position d'équilibre et donner sa stabilité.

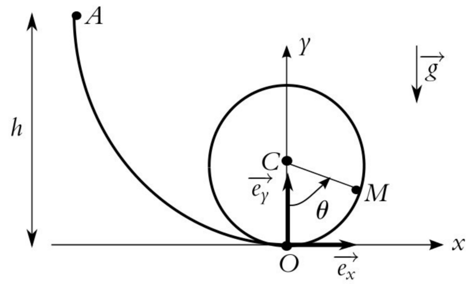
2 Calculer la fréquence des oscillations de l'électron dans le piège.

3 Exprimer la résultante des forces $\vec{F}$ sur l'électron. On rappelle qu'en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

IV Balle dans un tonneau

Une balle, assimilée à un point matériel M de masse m, est lâchée sur une rampe sans vitesse initiale depuis le point A d'une hauteur h par rapport au point O le bout de la rampe. Elle achève sa course dans un tonneau circulaire de rayon R lui permettant éventuellement de faire des *loopings*. On néglige les frottements.



1 Exprimer la norme v_O de la vitesse en O, puis v_M en un point M quelconque du tonneau repéré par l'angle θ, en fonction de g, h, a et θ. Donner la relation entre v_M et $\dot{\theta}(t)$.

2 Déterminer la réaction du tonneau en un point du cercle en fonction de g, h, a et θ.

3 Déterminer la hauteur minimale $h_{\min}$ pour que la bille fasse le tour complet du tonneau sans tomber.

V Choc de deux chariots

Deux masses m_1 et m_2 sont montées sur un banc horizontal à coussins d'air, de sorte qu'on peut négliger tout frottements. On les projette l'une contre l'autre avec des vitesses initiales $\vec{v}_1 = v_1\vec{u_x}$ et $\vec{v}_2 = \vec{0}$ (m_2 initialement à l'arrêt).

1 *Dans cette partie, on suppose qu'après le choc les masses restent solidaires.*

a – Quelle est la vitesse commune des deux masses après le choc ?

b – Quel est le travail des actions intérieures lors du choc ? Commenter le signe du résultat.

2 *On considère dans cette partie que le choc est élastique, c'est-à-dire que l'énergie cinétique de l'ensemble des deux masses est conservée au cours du choc et qu'elles ne sont plus solidaires après.*

a – Montrer que les vitesses v_1' et v_2' après le choc s'expriment :

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{et} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

b – Que se passe-t-il si $m_2 \gg m_1$?

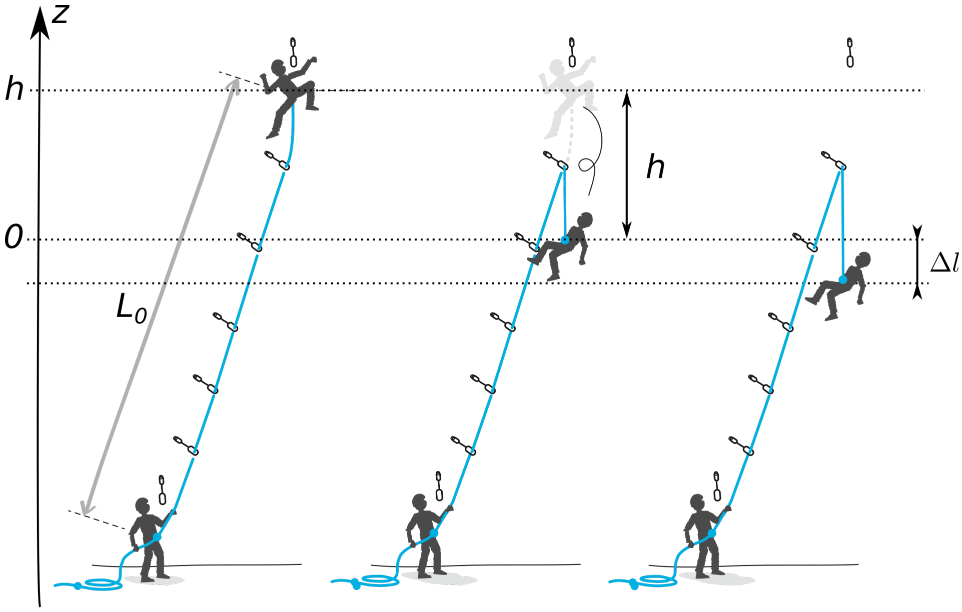
c – À quelle condition sur m_1 et m_2 est-il possible de réaliser un « carreau », i.e. échanger lors du choc les vitesses des deux masses, comme à la pétanque ?

Mécanique – chapitre 5

TD entraînement : approche énergétique

★☆ I Chute sur corde en escalade

On étudie une grimpeuse qui chute. Une corde d'escalade de longueur L_0 peut, en première approximation, être modélisée par un ressort de longueur à vide L_0 et de raideur $k = \alpha/L_0$, avec α une caractéristique de la corde.



1

2 : début de mise sous tension de la corde

3 : tension maximale, vitesse nulle

La grimpeuse est en chute libre sur une hauteur h pendant laquelle la corde n'est pas sous tension. La corde passe ensuite sous tension, et la chute se poursuit sur une hauteur $\Delta\ell$. La vitesse de la grimpeuse devient ainsi nulle au bout d'une hauteur totale de chute $h + \Delta\ell$.

On prendra $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $\alpha = 5{,}0 \times 10^4\,\mathrm{N}$ et une grimpeuse de masse $m = 50\,\mathrm{kg}$.

1. À l'aide d'un bilan énergétique, donner l'expression de la vitesse maximale atteinte par la grimpeuse. Faire l'application numérique pour une hauteur de chute $h = 5\,\mathrm{m}$.

2. Toujours à l'aide d'une méthode énergétique, donner l'expression de l'allongement maximal $\Delta\ell$ de la corde. On supposera $\Delta\ell \ll h$ afin de simplifier le calcul.

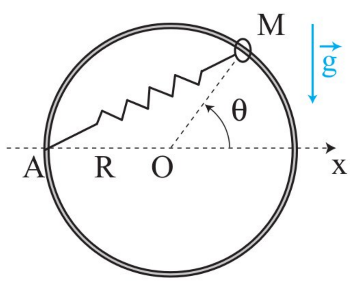
3. Donner enfin l'expression de la norme de la force maximal $F_{\max}$ qu'exerce la corde sur la grimpeuse. On introduira le facteur de chute $f = h/L_0$.

4. Au-delà d'une force de 12 kN, les dommages sur le corps humain deviennent importants. Que vaut $F_{\max}$ pour une chute de $h = 4\,\mathrm{m}$ sur une corde de longueur $L_0 = 4\,\mathrm{m}$? Conclure.

5. Une chute d'un mètre arrêtée par une corde de 50 cm est-elle plus ou moins dangereuse qu'une chute de 4 m arrêtée par une corde de 8 m ?

★☆ II Positions d'équilibre d'un anneau sur un cercle

Un anneau assimilable à un point matériel M de masse m peut glisser sans frottement sur une glissière circulaire de rayon R et de centre O. L'anneau est attaché à un ressort de raideur k dont une extrémité est fixée à la glissière au point A. Sa position est repérée par l'angle θ entre le rayon OM et l'axe horizontal (Ox). Pour simplifier les calculs, on considérera que la longueur à vide ℓ_0 du ressort est nulle.



1 Montrer que la longueur $\ell(t)$ s'exprime $\ell(t) = R\sqrt{2(1+\cos(\theta))}$.

2 Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ du système constitué de l'anneau et du ressort en fonction de l'angle θ.

3 Déterminer les positions d'équilibre de l'anneau.

4 Préciser si les positions d'équilibre obtenues sont stables.

III Pendule électrique

On étudie un pendule constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium, et suspendue à une potence par une fine tige de longueur $R = 10\,\mathrm{cm}$ dont nous négligerons la masse. La boule de masse $m = 20\,\mathrm{g}$ sera assimilée à un point matériel M.

Une boule identique est placée en A (voir schéma). Les deux boules sont chargées électriquement avec la même charge, et donc se repoussent. La force exercée par A sur M s'écrit

$$\overrightarrow{F}_e = \frac{k}{\mathrm{AM}^3}\overrightarrow{\mathrm{AM}} \quad \text{avec} \quad k = 4{,}4\times 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m^2}$$

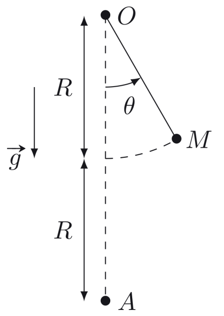


Figure M5.1 – Dispositif

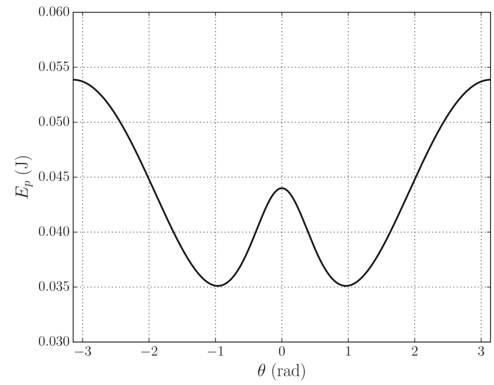


Figure M5.2 – Courbe $\mathcal{E}_p(\theta)$

1 Exprimer la distance AM en fonction de R et θ.

2 Montrer que la force $\overrightarrow{F}_e$ est conservative, et que son énergie potentielle s'exprime

$$\mathcal{E}_{p,e}(\theta) = \frac{k}{R\sqrt{5-4\cos(\theta)}}$$

3 Exprimer l'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p(\theta)$ de la boule M.

4 Le tracé de l'énergie potentielle est proposé sur la figure 2. Déduire de ce graphe l'existence de positions d'équilibres, et indiquer leur nature.

5 Discuter de la nature de la trajectoire de M suivant la valeur de son énergie mécanique.

IV Recul d'un canon

On considère un canon (figure M5.3) de masse $M = 800\,\mathrm{kg}$. Lors du tir horizontal d'un obus de masse $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ telle que $v_0 = 600\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, le canon acquiert une vitesse de recul $\overrightarrow{v_c} = -\frac{m}{M}\overrightarrow{v_0}$.

Pour limiter la course du canon, on utilise un ressort de raideur k_1, de longueur à vide L_0 dont l'une des extrémités est fixe, et l'autre liée au canon. Le déplacement a lieu suivant l'axe Ox. Dans la suite, le canon est assimilé à un point matériel, son centre de gravité G (figure M5.4).

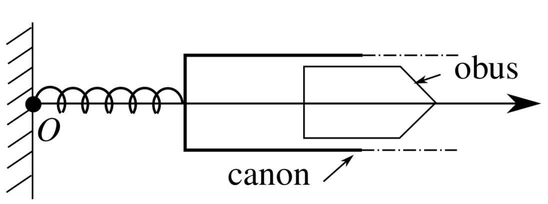


Figure M5.3 – Canon

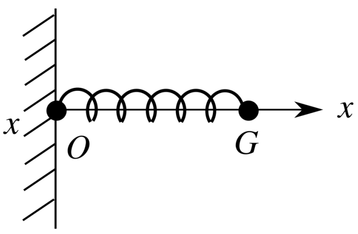


Figure M5.4 – Repérage

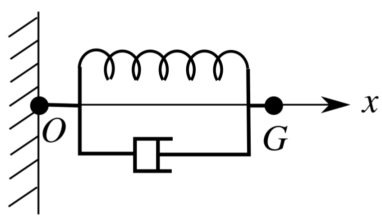


Figure M5.5 – Amortisseur

1 Quelle est la longueur du ressort lorsque le canon est au repos ?

2 En utilisant l'énergie mécanique, déterminer la distance de recul d. En déduire la raideur k_1 pour avoir un recul inférieur ou égal à d. Application numérique pour $d = 1{,}0\,\mathrm{m}$.

3 Retrouver la relation entre k_1 et d en appliquant le PFD.

4 Quel est l'inconvénient d'utiliser un ressort seul ?

Pour pallier ce problème, on ajoute au système un dispositif amortisseur (figure M5.5), exerçant une force de frottement $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, $\vec{v}$ étant la vitesse du canon.

5 Le dispositif de freinage absorbe une fraction $\mathcal{E}_a = 778\,\mathrm{J}$ de l'énergie cinétique initiale. Calculer la nouvelle valeur k_2 de la constante de raideur du ressort avec les données numériques précédentes. Déterminer la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.

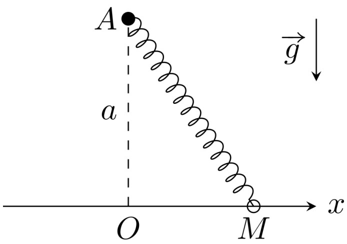
6 Déterminer λ pour que le régime soit critique. Application numérique.

7 Déterminer l'expression de l'élongation $x(t)$ du ressort, ainsi que celle de la vitesse $\dot{x}(t)$. En déduire l'instant t_m pour lequel le recul est maximal. Exprimer alors ce recul en fonction de m, v_0 et λ. L'application numérique redonne-t-elle la valeur de d précédente ?

V Oscillateur de LANDAU

L'oscillateur de LANDAU est un modèle théorique permettant de modéliser efficacement des systèmes physiques pour lesquelles des faibles non-linéarités sont à prendre en compte. Il s'agit d'une approximation un peu plus précise que celle de l'oscillateur harmonique pour étudier le comportement de systèmes au voisinage de leur position d'équilibre.

Un exemple de système modèle permettant de réaliser un oscillateur de Landau est un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale choisie comme axe (Ox). Cet anneau est relié à un ressort, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k, dont l'autre extrémité est fixée en A. La distance de A à la tige est notée AO $= a$.



1 Exprimer l'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p(x)$.

2 La courbe d'énergie potentielle est représentée ci-dessous pour quatre valeurs de a : $a_1 = \ell_0/10$, $a_2 = \ell_0/3$, $a_3 = \ell_0$ et $a_4 = 3\ell_0$. En raisonnement qualitativement sur les positions d'équilibre, attribuer chaque courbe à la valeur de a qui lui correspond.

3 Pour chaque valeur de a, analyser le mouvement possible de l'anneau en fonction des conditions initiales.

4 Pour les valeurs de a précédentes, l'anneau est lâché avec les mêmes conditions initiales. Sa vitesse et sa position sont enregistrées au cours du temps, ce qui donne les trajectoires de phase de la figure ci-dessous. Déterminer la condition initiale et affecter chaque trajectoire de phase à la valeur de a qui lui correspond.