Travaux pratiques – TP 15

Correction du TP

Capacités exigibles

- ▢ Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.
- ▢ Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.
- ▢ Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.

Objectifs

- ◇ Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.
- ◇ Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.

I S'approprier : analyse spectrale

I/A Décomposition en série de Fourier

Rappel TP15.1 : Décomposition en série de Fourier

Toute fonction périodique peut se décomposer en série de Fourier, c'est-à-dire en une somme de fonctions sinusoïdales de pulsations différentes ; pour $y(t)$ une fonction périodique de période T et de pulsation $\omega = 2\pi/T$:

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos(n \cdot \omega t + \varphi_n)$$

avec Y_n et φ_n respectivement l'amplitude et la phase de l'harmonique de rang n.

Exemple TP15.1 :

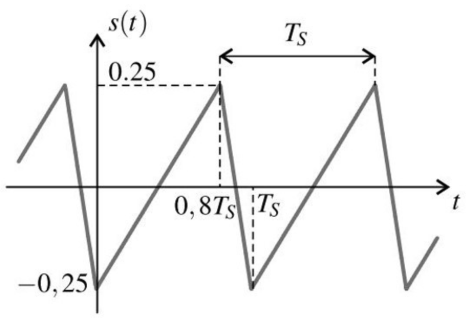

Figure TP15.1 – Représentation temporelle.

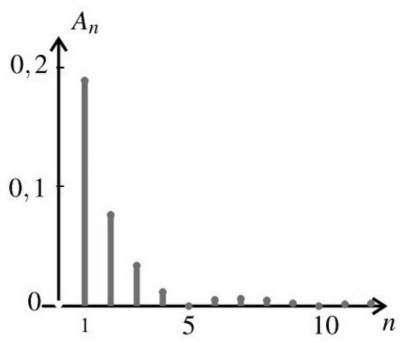

Figure TP15.2 – Spectrogramme correspondant.

Notation TP15.1 : Vocabulaire

- ◇ **Spectre** : représentation de l'amplitude de chacune des composantes spectrales d'un signal en fonction de leurs pulsations ou de leurs fréquences.
- ◇ $Y_0 = \langle y(t) \rangle$ est la valeur moyenne du signal $y(t)$, c'est-à-dire sa **composante continue** ;
- ◇ $y_1(t) = Y_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ est appelé **fondamental** ;
- ◇ $y_n(t) = Y_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ est l'**harmonique** de rang n.

Remarque TP15.1 :

1) Le spectre d'un signal temporel pair ne contient que des harmoniques de rang pair ($n = 2p, p \in \mathbb{N}$).
2) Le spectre d'un signal temporel impair ne contient que des harmoniques de rang impair ($n = 2p + 1, p \in \mathbb{N}$).

I/B Durée d'enregistrement et fréquence d'échantillonnage

Définition TP15.1 : Échantillonnage

Une mesure ne peut s'effectuer en continu : le relevé de données se fait toujours de manière **discrète** : on dit qu'on **échantillonne** le signal. On définit alors :

- T_e la **période d'échantillonnage**, c'est-à-dire l'écart temporel entre deux mesures ;
- $f_e = \frac{1}{T_e}$ la fréquence d'échantillonnage ;
- T_{tot} la **durée totale de mesure** ;
- N le **nombre total de points de mesure**.

T_e, T_{tot} et N ne sont **pas indépendants** : on ne peut contrôler que 2 paramètres sur 3. En effet, par construction on a

$$T_{\text{tot}} = (N-1)T_e \Leftrightarrow T_e = \frac{T_{\text{tot}}}{N-1}$$

On vise à reconstruire le plus fidèlement le spectre du signal mesuré.

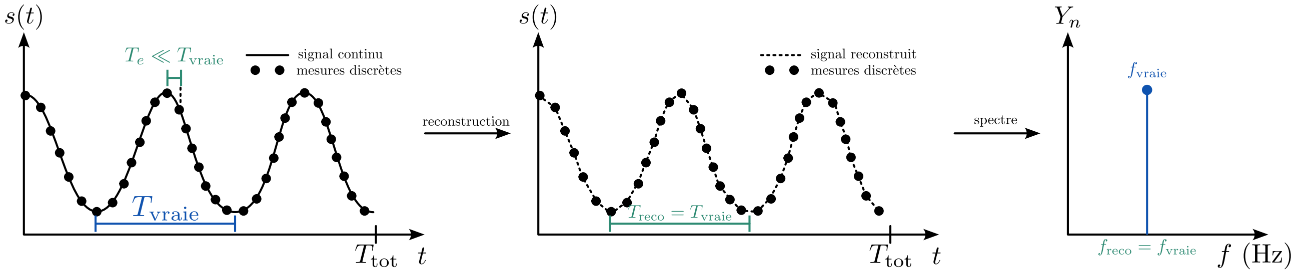

Figure TP15.3 – Échantillonnage d'un signal sinusoïdal

Propriété TP15.1 : Échantillonnage

Critère de Shannon

Le critère de Shannon stipule que **pour reconstruire le fondamental** d'un signal, il faut que la **fréquence d'échantillonnage** soit **au moins supérieure à deux fois la fréquence maximale du signal** étudié :

$$\boxed{f_e \geq \frac{f_{\text{signal}}}{2}}$$

Toutes les fréquences $f > f_e/2$ présentes dans un signal seront « perdues » dans le spectre reconstruit ; seules les fréquences $f < f_e/2$ sont utiles dans le spectre reconstruit.

Durée d'acquisition

Pour favoriser la précision, il faut **maximiser la durée totale d'acquisition**.

Fenêtrage

Pour éviter des problèmes de raccordement, la durée totale de mesure doit être un **multiple entier de la période du signal** : $T_{\text{tot}} = pT$, $p \in \mathbb{Z}$.

Démonstration TP15.1 : (HP) Échantillonnage

Critère de Shannon

Comme présenté dans la Figure TP15.3, on peut représenter la reconstruction du signal échantillonné en reliant les points de mesure par des segments. Avec beaucoup de points par période vraie du signal, c'est-à-dire $T_e \ll T_{\text{vraie}}$, le signal reconstruit est presque indiscernable du signal vrai.

Si l'on **réduit le nombre de points** par période, le signal reconstruit devient de plus en plus déformé, et on voit apparaître des **fréquences parasites**, notamment en hautes fréquences. Dans le cas d'un signal vrai sinusoïdal, le signal reconstruit tend vers un signal triangulaire, de même période que le signal vrai. On atteint cette limite pour $T_e = \frac{T_{\text{vraie}}}{2}$.

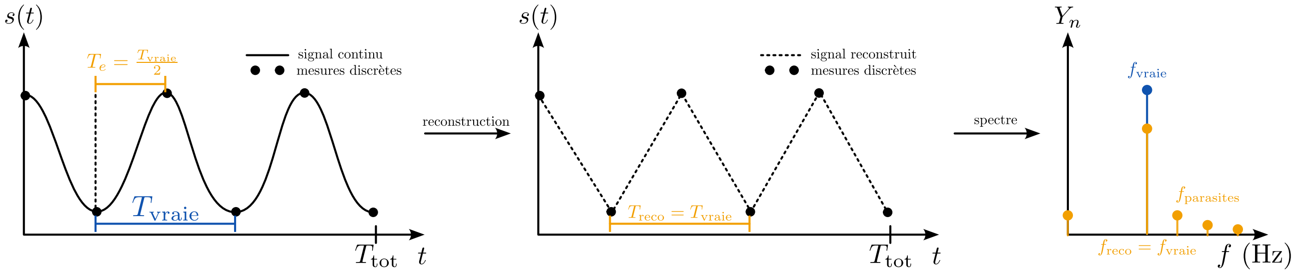

Figure TP15.4 – Échantillonnage limite

En-deçà de 2 points par période, le signal reconstruit aura une **période reconstruite supérieure à la période vraie**, et donc une **fréquence reconstruite inférieure à la fréquence vraie**, avec toujours des fréquences parasites (dont souvent une valeur continue parasite).

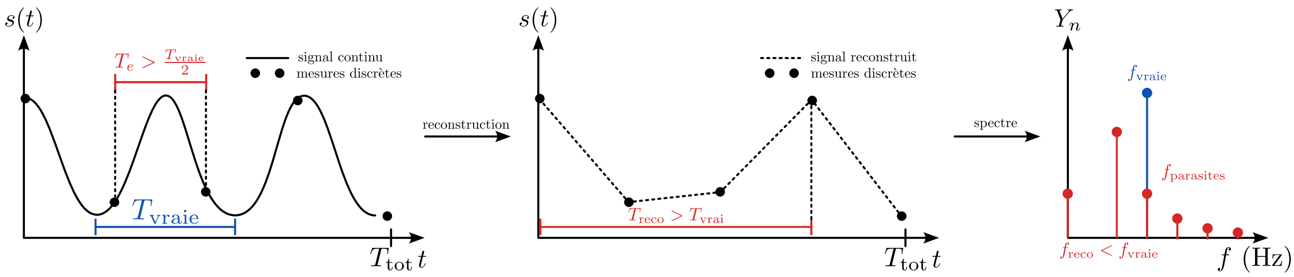

Figure TP15.5 – Mauvais échantillonnage

À la limite de **1 point par période**, les valeurs mesurées auraient toutes la même valeur (c'est le principe d'un signal périodique) : le signal reconstruit serait alors un **signal constant, de fréquence nulle**.

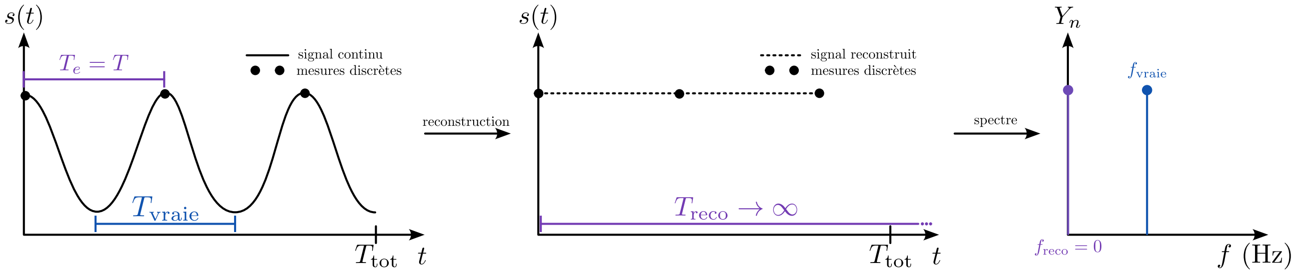

Figure TP15.6 – Échantillonnage absurde

Important TP15.1 : Conclusion f_e

Pour reconstruire un signal de fréquence f, il faut au moins 2 points par période, soit

$$\boxed{T_e \leq \frac{T_{\text{vraie}}}{2} \Leftrightarrow f_e \geq 2 f_{\text{vraie}}}$$

Durée d'acquisition

Le spectre est constitué de N points calculés sur l'intervalle de fréquence $[0\ ;\ f_e]$. La distance entre deux points successifs, qui représente la **résolution spectrale**, est donc

$$\Delta f = \frac{f_e}{N-1} = \frac{1}{T_{\text{tot}}}$$

Ainsi, il faut échantillonner sur une longue durée T_{tot} pour avoir une bonne résolution spectrale.

Fenêtrage

Un spectre est défini pour une fonction périodique. Or, ne disposons pas d'un signal continu, mais d'un échantillon de durée T_{tot} (qui n'est donc pas périodique !).

La construction du spectre à partir de cet échantillon revient à construire un signal périodique, en **dupliquant et juxtaposant l'échantillon de durée $T_{\mathbf{tot}}$**. On obtient donc un signal périodique par construction, dont T_{tot} est une période.

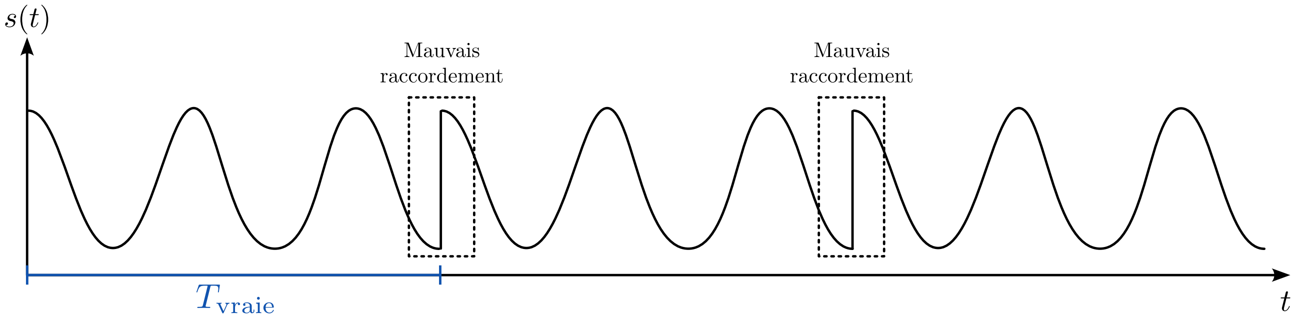

FIGURE TP15.7

Partant d'un signal $s(t)$ sinusoïdal, le signal construit n'est clairement plus une sinusoïde, et ce peu importe le nombre de points d'échantillonnage ! Le spectre calculé sera très éloigné du spectre attendu.

Important TP15.2 : Conclusion fenêtrage

Pour bien construire le spectre d'un signal, il faut sélectionner un nombre entier de périodes. Cela peut être fait automatiquement par LatisPro, ou sélectionné manuellement à l'aide de curseurs.

Exemple TP15.2 : Échantillonnage

Soit $N = 10\,000$.

- Si on prend $T_{\text{tot}} = 10\,000 T_{\text{vraie}} = N T_{\text{vraie}}$, on aura plein de périodes (c'est bien !), mais seulement 1 point par période (c'est pas bien !).
- Si $T_{\text{tot}} = T_{\text{vraie}}$, on a 10 000 pts/période (c'est bien !), mais seulement 1 période (c'est pas bien !).

Outils TP15.1 : Choix de paramètres d'échantillonnage

1. **Fixez un nombre de points par période** ;
2. En déduire T_{tot} de sorte à avoir un bon nombre de période.

II Réaliser et valider

II/A Analyses spectrales de signaux périodiques de différentes formes

II/A) 1 Signal sinusoïdal

Expérience TP15.1 :

Acquisition

1) Connecter le générateur basses fréquences (GBF) à l'interface SYSAM entre les voies EA0 et la masse.
2) Ouvrir le logiciel Latispro en suivant le chemin : programmes → discipline → physique-chimie → latispro.
3) Allumer le GBF. Générer un signal sinusoïdal de fréquence 500 Hz et d'amplitude moyenne (≤ 10 V) en utilisant le bouton *offset*.
4) Pour faire une acquisition : cliquer sur le bouton 
   - *Pour activer la voie EA0* : dans le cadre entrées analogiques, cliquer sur les boutons des entrées à activer (EA0 ici !).

◇ *Pour paramétrer l'acquisition* : Dans le cadre acquisition, onglet temporel, mode normal, entrer le nombre de points de mesure et la durée totale de l'acquisition. On choisira :

▷ Nombre de points : 10 000 ;

▷ Acquisition temporelle ;

(1) Durée totale d'acquisition $T_{\text{acq tot}}$ à choisir. Justifier ce choix succinctement.

Réponse

Une période dure $T = 2{,}00\,\text{ms}$. On veut un long temps d'acquisition, mais avec suffisamment de points de mesure dans une période. Partons avec 50 points par période ; avec $N = 10\,000$ points, on aurait 200 périodes, ce qui semble convenable pour avoir suffisamment de données pour le spectre. Ainsi, on peut partir avec $T_{\text{tot}} = 200T = 0{,}400\,\text{s}$.

◇

▷ Fin des réglages, vous êtes prêt-e à faire vos enregistrements.

◇ Lancer l'acquisition en cliquant sur 

Spectre

1) Aller dans traitements → calculs spécifiques → analyse de Fourier.

2) Accéder à la liste des courbes grâce à 

3) Glisser la courbe et cliquer sur calcul.

1 Recopier l'allure du spectre sur votre copie. Observez-vous des harmoniques ?

Réponse

Graphique non réalisé.

On n'observe pas d'harmonique, le spectre est purement sinusoïdal.

◇

2 En cliquant droit sur le graphe, prendre la loupe pour zoomer, plusieurs fois si nécessaire, ou utiliser le calibrage. Relever la fréquence fondamentale grâce à la fonction réticule (toujours en cliquant droit sur le graphe) et la comparer à celle indiquée par le GBF. Commenter l'éventuelle différence.

Réponse

La fréquence reconstruite est très proche de la valeur attendue. On observe un léger décalage et d'éventuels artéfacts de très faible amplitude à côté, ce qui est inhérent à la discrétisation. Cette imprécision est un exemple d'incertitude de mesure.

◇

II/A) 2 Signaux triangulaires et carrés

Expérience TP15.2 :

Changer la forme du signal délivré par le GBF en gardant la même fréquence fondamentale et recommencer le même protocole.

3 Recopier l'allure de chacun des spectres (signal triangulaire et carré) sur votre copie. Observez-vous des harmoniques ? Commenter.

Réponse

Graphiques non tracés.

On observe de nombreuses harmoniques, théoriquement une infinité d'après la décomposition en série de Fourier de ces signaux ; on est ici limité-es à l'intervalle $[0\ ;\ f_e]$ en fréquence d'une part, et par le seuil de détection en amplitude d'autre part.

◇

4 Quelle est la particularité de ces deux spectres ? Quelles sont leurs différences ?

Réponse

Ces deux spectres sont constitués de multiples impairs du fondamental, étant donné que les signaux temporels sont impairs. En revanche, la diminution des amplitudes est différente : elles décroissent plus vite pour le signal triangulaire.

◇

II/B Étude du spectre obtenu en sortie du filtre de Rauch

On reprend le filtre de RAUCH de la semaine précédente afin de filtrer le signal carré :

$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

Avec
$$Q = \sqrt{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}, \quad H_0 = -1 \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}\,\frac{1}{RC}$$

Notre objectif est d'obtenir à partir de ce signal carré un signal sinusoïdal de **fréquence fondamentale triple**.

Expérience TP15.3 : Manipulation amplificateur

1) Connecter la borne $+15\,\mathrm{V}$ du boitier à la sortie $+15\,\mathrm{V}$ d'un générateur de tension continue,
2) Connecter la borne $-15\,\mathrm{V}$ du boitier à la sortie $-15\,\mathrm{V}$ du générateur
3) Connecter le point milieu du boitier à la masse du générateur.

Attention TP15.1 :

À la fin de la séance, on coupe le signal du GBF avant les alimentations de l'amplificateur opérationnel qui doivent être coupées en dernier.

4) Réalisez ensuite le montage en prenant $C = 1\,\mathrm{nF}$ (cavalier prêt à être connecté sur la boite) et αR avec une boite de résistances variables.

On réalise le montage en prenant $C = 1\,\mathrm{nF}$ (cavalier prêt à être connecté sur la boite) et αR est une boite de résistances variables. Le filtre a été fabriqué avec $R = 100\,\mathrm{k\Omega}$.

II/B) 1 $\alpha = 1$

On s'intéresse tout d'abord au cas où $\alpha = 1$: On prend donc $\alpha R = 100\,\mathrm{k\Omega}$. On injecte à l'entrée du filtre un signal créneau de fréquence fondamentale $f_{\text{entrée}}$.

5 Comment choisir $f_{\text{entrée}}$ *a priori* afin d'obtenir à partir de ce signal un signal sinusoïdal de **fréquence fondamentale triple** ? Vous recopierez pour cela sommairement le diagramme de BODE en gain pour $\alpha = 1$ de la semaine dernière, auquel vous ajouterez sur l'axe de droite le spectre d'un signal créneau. Quelle est la période $T_{\text{entrée}}^{\alpha=1}$ correspondante ?

Réponse

Superposition spectre/DdB non incluse.

Il faut $f_r = 3f_{\text{entrée}}$, comme ça seule l'harmonique de rang 3 passe et les autres sont atténuées. Or, avec $\alpha = 1$, $f_r = f_0 \approx 1{,}5\,\mathrm{kHz}$; il faut donc donc

$$\underline{f_{\text{entrée}} = \frac{f_r}{3} \approx 5{,}0 \times 10^2\,\mathrm{Hz}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{T_{\text{entrée}}^{\alpha=1} \approx 2{,}0\,\mathrm{ms}}$$

◇

Expérience TP15.4 :

Sélectionnez cette fréquence sur le GBF. Faire l'analyse spectrale des **signaux d'entrée <u>et</u> de sortie** du filtre. Modifier éventuellement les paramètres d'acquisition pour que le spectre soit de bonne qualité.

6 Indiquez sur votre copie les paramètres d'acquisition utilisés, en justifiant votre choix. Recopier les allures des spectres d'entrée et de sortie. Commentez : la sélection de la fréquence est-elle efficace ?

Réponse

On prend $T_{\text{tot}} = 500\,\mathrm{ms} = 250 \cdot T_{\text{entrée}}$: avec $N = 10\,000$ points, cela fait 40 points/période, c'est un bon compromis.

Tracé non réalisé.

La sélection n'est pas efficace.

◇

II/B) 2 $\alpha = \mathbf{10^{-2}}$

7 Quelle valeur faut-il alors choisir pour la fréquence fondamentale du créneau ? Vous justifierez de la même manière que précédemment (recopier le DdB et superposer le spectre). En déduire la valeur de $T_{\text{entrée}}^{\alpha=10^{-2}}$.

Réponse

De même, mais $f_0 = 11{,}3\,\text{kHz}$: $\underline{f_{\text{entrée}} = \dfrac{f_0}{3} = 3{,}8\,\text{kHz}}$ $\Leftrightarrow$ $\underline{T_{\text{entrée}}^{\alpha=10^{-2}} = 0{,}26\,\text{ms}}$

Expérience TP15.5 :

Refaire le même protocole pour $\alpha = 10^{-2}$ (on prend donc $\alpha R = 1000\,\Omega$).

8 Indiquez sur votre copie les paramètres d'acquisition utilisés, en justifiant votre choix. Recopier les allures des spectres d'entrée et de sortie. Commentez : la sélection de la fréquence est-elle efficace ?

Réponse

On prend $T_{\text{tot}} = 65\,\text{ms} = 250 \cdot T_{\text{entrée}}$: avec $N = 10\,000$ points, cela fait 40 points/période, c'est un bon compromis.

Tracé non réalisé.

La sélection est bien plus efficace.

III Conclure

9 Comparez les deux spectres de sortie. Interprétez les différences obtenues. Quel filtre permet d'atteindre l'objectif que l'on s'est initialement fixé ?

Réponse

$\alpha = 1 \times 10^{-2}$ a une bien meilleure sélectivité que $\alpha = 1$, la sélection fonctionne donc mieux.