Mécanique – chapitre 5

Mouvement de particules chargées

Sommaire

Capacités exigibles

- ◯ Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle
- ◯ Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
- ◯ Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
- ◯ Mouvement d'une particule chargée dans un champ $\vec{E}$ uniforme :
  - ▷ Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur $\vec{a}$ constant ;
  - ▷ Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
- ◯ Mouvement d'une particule chargée dans un champ $\vec{B}$ uniforme pour $\vec{v_0} \perp \vec{B}$: déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.

L'essentiel

Définitions

Propriétés

Points importants

Démonstrations

Remarques

Exemples

I La force de LORENTZ

I/A Présentation

Définition M5.1 : Champs électrique et magnétique

Champ électrique

Un champ électrique $\overrightarrow{E}(\mathrm{M},t)$ est un champ de vecteurs créé par des charges électriques et/ou par des variations temporelles du champ magnétique.

Champ magnétique

Un champ magnétique $\overrightarrow{B}(\mathrm{M},t)$ est un champ de vecteurs créé par des courants électriques et/ou par des variations temporelles du champ électrique.

Unités

$\|\overrightarrow{E}\|$ en ______

$\|\overrightarrow{B}\|$ en ________

Ordre de grandeur M5.1 : Champs électriques et magnétiques

Champ $\overrightarrow{E}$		Champ $\overrightarrow{B}$	
Condensateur	$10\,\mathrm{V{\cdot}mm^{-1}} \approx 10\,\mathrm{kV{\cdot}m^{-1}}$	**Bobine**	$0{,}1\,\mathrm{mT}$
Téléphonie mobile	$5\,\mathrm{V{\cdot}dm^{-1}} \approx 50\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$	**Aimant permanent**	$[10^{-2}\ ;\ 10^{-1}]\,\mathrm{T}$
Surface Terre	$100\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$	**Surface Terre**	$0{,}05\,\mathrm{mT}$
Orage	$10\,\mathrm{kV{\cdot}m^{-1}}$	**IRM**	$[1\ ;\ 3]\,\mathrm{T}$

Définition M5.2 : Force de LORENTZ

La force subie par une charge q plongée dans un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est appelée **force de LORENTZ**, et s'exprime :

avec et

On appelle $\overrightarrow{F_e}$ la **force électrique** et $\overrightarrow{F_m}$ la **force magnétique**.

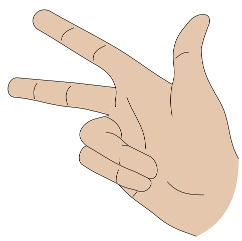


FIGURE M5.1 – $\overrightarrow{F_m}$

Propriété M5.1 : Poids vs. LORENTZ

Dans les problèmes incluant des particules chargées, on négligera toujours le poids devant la force de LORENTZ.

Démonstration M5.1 : Poids vs. LORENTZ

Pour un proton dans des conditions standard de laboratoire :

$$\left\{\begin{array}{r} m = \\ q = \\ \|\overrightarrow{v}\| \approx \\ \|\overrightarrow{E}\| \approx \\ \|\overrightarrow{B}\| \approx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} \|\overrightarrow{P}\| \approx \\ \|\overrightarrow{F_e}\| \approx \\ \|\overrightarrow{F_m}\| \approx \end{array}\right. \Rightarrow \qquad \blacksquare$$

Définition M5.3 : Produit vectoriel

Définition

Le produit vectoriel $\overrightarrow{c}$ de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ s'écrit $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ est un **vecteur** :

- ◇ **perpendiculaire au plan** $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$, donc à $\overrightarrow{a}$ **et** à $\overrightarrow{b}$: et
- ◇ de sens donné par la règle de la **main droite** ;
- ◇ de norme avec $\theta = (\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}})$

Propriété M5.2 : Produit vectoriel

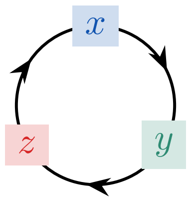
Antisymétrie (admis)

C'est un opérateur **antisymétrique** :

Aire (admis)

Sa **norme** est **l'aire du parallélogramme** $\vec{a}$, $\vec{b}$:

Application aux BOND



Pour toute base orthonormée **directe** (BOND), le produit vectoriel de deux vecteurs donne le troisième avec un signe + s'ils se suivent dans une permutation circulaire ($x \to y \to z \to x$ ou $r \to \theta \to z \to r$), et − sinon :

$$\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y} = \qquad \overrightarrow{u_y} \wedge \overrightarrow{u_z} = \qquad \overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_x} =$$
$$\overrightarrow{u_y} \wedge \overrightarrow{u_x} = \qquad \overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_y} = \qquad \overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_z} =$$

ce qui permet de calculer n'importe quel produit vectoriel exprimé dans une BOND, et d'établir l'aide suivante :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \underset{a_x}{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}} \wedge \underset{b_x}{\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

Démonstration M5.2 : Produit vectoriel

Le résultat quelconque n'est pas à connaître, et **chaque calcul doit se faire explicitement** :

Exemple M5.1 : Produit vectoriel

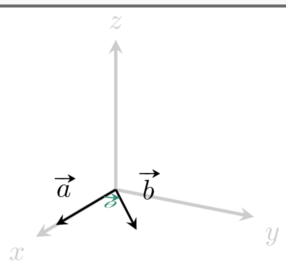


FIGURE M5.2

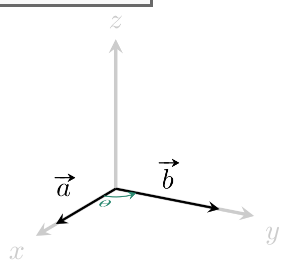


FIGURE M5.3

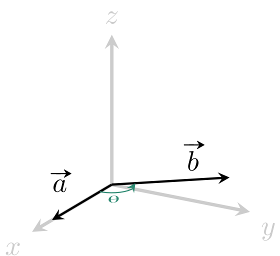


FIGURE M5.4

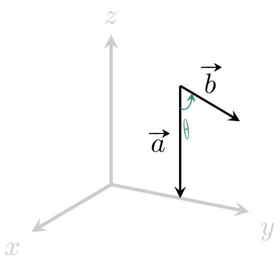


FIGURE M5.5

I/B Aspects énergétiques

I/B) 1 Puissance de la force de LORENTZ

Propriété M5.3 : Puissance de LORENTZ

La force magnétique a une puissance nulle :

donc

Ainsi, **un champ magnétique ne peut pas accélérer ou ralentir une particule chargée mais ne peut que la dévier**.

Démonstration M5.3 : Puissance de Lorentz

La puissance de la force de Lorentz est :

Ainsi, **seule la force électrique peut faire varier l'énergie cinétique**, et donc la vitesse, d'une particule chargée ; la **force magnétique peut changer sa direction mais pas sa norme**.

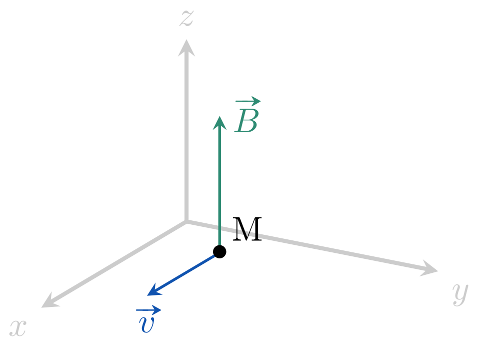


FIGURE M5.6

I/B) 2 Énergie potentielle

Propriété M5.4 : Énergie potentielle électrique

La **force électrique** est **conservative**, donc dérive d'une **énergie potentielle** $\mathcal{E}_{p,e}(\mathrm{M})$; pour $\vec{E} \parallel \vec{u_z}$:

$\Leftrightarrow$ tel que

Démonstration M5.4 : Énergie potentielle électrique

Comme $\overrightarrow{F_m}$ ne travaille pas, on s'intéresse uniquement à $\overrightarrow{F_e}$. Prenons $\vec{E} = -E\vec{u_z}$:

FIGURE M5.7

I/B) 3 Potentiel électrostatique

Propriété M5.5 : Potentiel électrostatique

Le **champ** $\vec{E}$ dérive d'une grandeur scalaire, appelée **potentiel électrique**, noté V ; pour $\vec{E} \parallel \vec{u_z}$:

$\vec{E} = \pm E\vec{u_z} \quad \Leftrightarrow$ tel que

soit $\Leftrightarrow$ et

Unités

V en

$\|\vec{E}\|$ en

Démonstration M5.5 : Potentiel électrostatique

Définition M5.4 : Tension électrique

La **tension** entre deux points A et B est alors la **différence de potentiel** entre ces deux points :

Propriété M5.6 : Tension et champ électrique

En appliquant une tension U_{AB} entre deux grilles A et B, planes parallèles et distantes de d, on obtient un champ électrique **perpendiculaire** aux grilles, dirigé vers les potentiels **décroissants** (de $\oplus$ à $\ominus$) de norme

Démonstration M5.6 : Tension et champ électrique

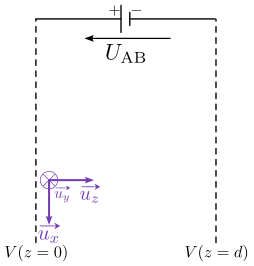


FIGURE M5.8

En négligeant les effets de bord, $V(\mathrm{M})$ ne dépend que de z, i.e. $\frac{\partial V}{\partial y} = 0 = \frac{\partial V}{\partial x}$. Ainsi :

■

Important M5.1 : Comparaison $\vec{E}$ et $\vec{g}$

L'impact du **champ électrique** $\vec{E}$ est tout à fait **similaire** à celle du **champ de pesanteur** $\vec{g}$:

	Poids	Force électrique
Champ		
Sensibilité		
Force		
Énergie potentielle		
Potentiel		
Sens des champs		
Sens des forces		

Définition M5.5 : Conditions d'étude

On considèrera des champs **uniformes** (constants dans l'espace) et **stationnaires** (constants dans le temps).

II Mouvement dans un champ électrique (stationnaire et uniforme)

II/A Situation générale

Propriété M5.7 : Mouvement général en champ $\vec{E}$

Les équations scalaires du mouvement d'une particule de charge q dans un champ électrique $\vec{E}$ sont semblables à celle d'un corps non chargé de masse m dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.

Démonstration M5.7 : Mouvement général en champ $\vec{E}$

1 **Système et référentiel** : {particule} masse m charge q dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen.

2 **Repère et repérage** :

- **Repère** : cartésien, $\vec{u_z} \perp$ grilles, avec $\vec{E} = E\,\vec{u_z}$ avec $E = U_{AB}/d$;
- **Repérage** :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t)\vec{u_x} + y(t)\vec{u_y} + z(t)\vec{u_z}$$
$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u_x} + \dot{y}(t)\vec{u_y} + \dot{z}(t)\vec{u_z}$$
$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u_x} + \ddot{y}(t)\vec{u_y} + \ddot{z}(t)\vec{u_z}$$

3 **BDF** :

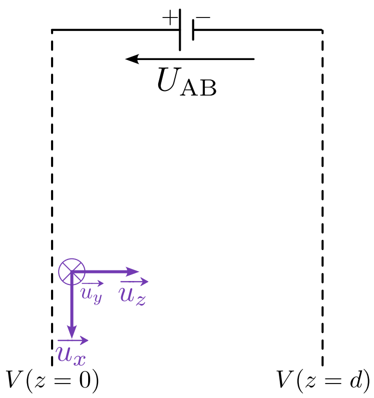


FIGURE M5.9 – 4

5 **PFD** :

II/B Accélération d'une particule chargée

Propriété M5.8 : Particule $\vec{v_0} \parallel \vec{E}$

Une particule **chargée positivement** et lâchée depuis A en $z = 0$ à la vitesse $\vec{v_0}$ **dans le sens d'un champ électrique** est **accélérée**, et sa vitesse finale en B à $z = d$ s'exprime :

Démonstration M5.8 : Particule $\vec{v_0} \parallel \vec{E}$

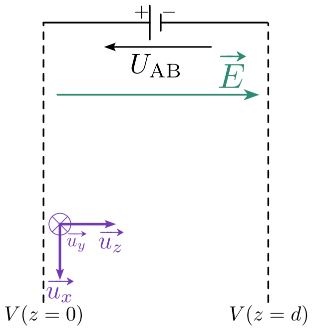


Figure M5.10

Comme le système est **conservatif** et qu'on s'intéresse à un **instant précis** du mouvement, il vaut mieux utiliser le **TEM** plutôt que le PFD.

◇ **Variation de $\mathcal{E}_m$** :

▷ **En A** :

▷ **En B** :

◇ **TEM** :

Remarque M5.1 : Accélération rectiligne

◇ En faisant l'application numérique pour un proton de charge $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C, de masse $m = 1{,}673 \times 10^{-27}$ kg partant de $v_0 = 0\,\text{m·s}^{-1}$ et accéléré par $U = 1\,\text{kV}$, on trouve ____________________

◇ L'électron-volt est une unité d'énergie, telle que

C'est **l'énergie cinétique que gagne un électron** (ou un proton) **accéléré par une tension de 1 V**. Dans les accélérateurs de particules modernes, on touche au TeV.

◇ Si $U < 0$ ou $q < 0$, on peut **ralentir** la particule chargée. Elle peut même **faire demi-tour** si $\Delta\mathcal{E}_p > \mathcal{E}_c(0)$. Dans le cas du champ $\vec{g}$, c'est le cas du lancer vertical d'un corps de masse m.

◇ Cette expression est similaire à la chute sans frottement dans le champ $\vec{g}$. Avec $\vec{v_0} = \vec{0}$:

II/C Déviation d'une particule chargée

Propriété M5.9 : Déviation particule $\vec{v_0} \perp \vec{E}$

Une particule **chargée positivement** et lancée **perpendiculairement à un champ électrique** est **déviée paraboliquement**, et son **angle final** est **proportionnel à la tension**.

Démonstration M5.9 : Déviation particule $\vec{v_0} \perp \vec{E}$

Prenons $\vec{v_0} = v_0\vec{u_x}$. On reprend le résultat obtenu dans la situation générale (II/A) et on intègre :

C'est une trajectoire parabolique, en tout point **similaire à la chute libre**.

On peut alors déterminer l'angle de déviation α_f une fois qu'elle a quitté le champ $\overrightarrow{E}$:

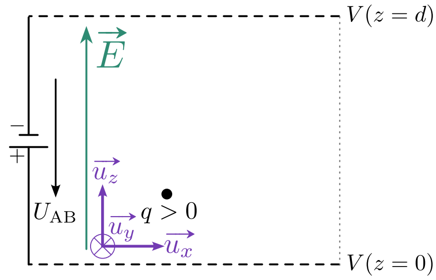


FIGURE M5.11 – Déviation ($q>0$)

Exemple M5.2 : Oscilloscope analogique.

Un faisceau d'électrons de vitesse initiale fixée (grâce à un accélérateur linéaire) est dévié par la tension de mesure. Cette déviation est proportionnelle à la tension mesurée. En utilisant un écran fluorescent, on visualise l'impact des électrons et ainsi la tension mesurée en balayant l'écran à une vitesse déterminée par le calibre temporel.

III Mouvement dans un champ magnétique (stationnaire et uniforme)

III/A Vitesse initiale parallèle au champ $\overrightarrow{B}$

Propriété M5.10 : Particule $\overrightarrow{v_0} \parallel \overrightarrow{B}$

Une particule chargée de vitesse initiale colinéaire au champ magnétique a un mouvement rectiligne uniforme.

Démonstration M5.10 : Particule $\overrightarrow{v_0} \parallel \overrightarrow{B}$

III/B Vitesse initiale perpendiculaire au champ $\overrightarrow{B}$

♥ Propriété M5.11 : Trajectoire $\overrightarrow{v_0} \perp \overrightarrow{B}$ par FRENET

Une particule chargée dans un champ $\overrightarrow{B}$ perpendiculaire à sa vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ **décrit un cercle**, de **rayon cyclotron** $R_c = \dfrac{mv_0}{|q|B}$.

♥ Démonstration M5.11 : Trajectoire $\overrightarrow{v_0} \perp \overrightarrow{B}$ par FRENET

$\boxed{1}$ **Système et référentiel** : {particule} masse m charge q dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen.

$\boxed{2}$ **Repère et repérage** :

◇ **Repère** : avec $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$ avec $\overrightarrow{B} \perp \overrightarrow{v_0}$

◇ **Repérage** :

$\overrightarrow{v}(t) =$ Or,

$\overrightarrow{a}(t) =$ Donc

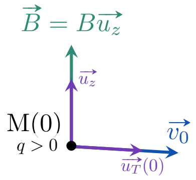


FIGURE M5.12 – $\boxed{4}$

$\boxed{3}$ **BDF** :

$\boxed{5}$ **PFD** :

Planéité

Or, ■

Autrement dit, $(\overrightarrow{u_T}(0),\overrightarrow{u_N}(0))$ donne le plan de la trajectoire $\forall t$: **la trajectoire de M(t) s'effectue dans le plan constant perpendiculaire à $\vec{B}$!**

Circularité

En reprenant le PFD en norme, on a

La trajectoire est donc un **cercle** de rayon constant R_c.

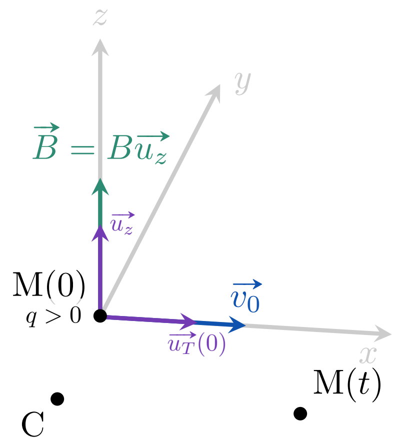


FIGURE M5.13 – Trajectoire pour $q > 0$

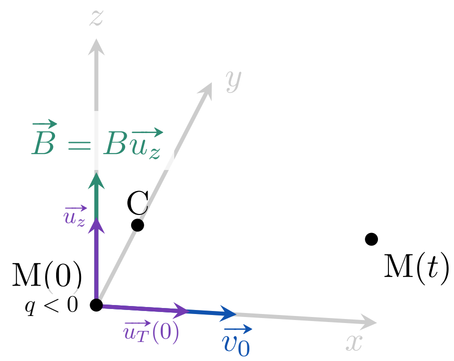


FIGURE M5.14 – Trajectoire pour $q < 0$

III/B) 1 Solution horaire

Propriété M5.12 : Mouvement $\overrightarrow{v_0} \perp \vec{B}$ en cartésiennes

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ $\vec{B} \perp \overrightarrow{v_0}$ est un cercle,

de rayon cyclotron parcouru à la pulsation cyclotron tel que

Démonstration M5.12 : Mouvement $\overrightarrow{v_0} \perp \vec{B}$ en cartésiennes

1 **Système et référentiel** : {particule} masse m charge q dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen.

2 **Repère et repérage** :

◇ **Repère** : avec

◇ **Repérage** :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_z}$$
$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\overrightarrow{u_x} + \dot{y}(t)\overrightarrow{u_y} + \dot{z}(t)\overrightarrow{u_z}$$
$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}(t)\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}(t)\overrightarrow{u_z}$$

◇ **Conditions initiales** :

3 **BDF** :

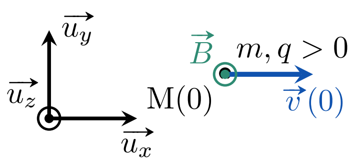


FIGURE M5.15 – 4

5 **PFD** :

Trajectoire

c'est un **cercle**, de rayon de centre

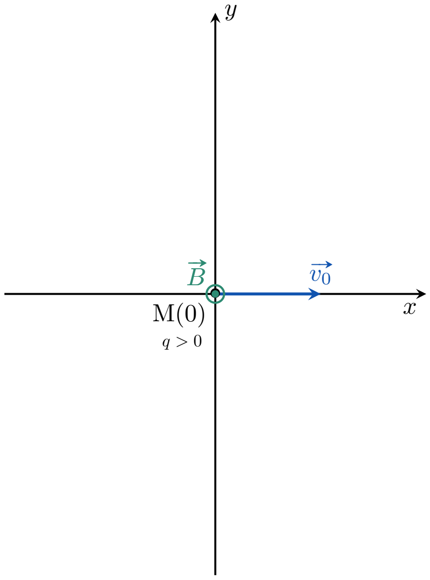


Figure M5.16 – Trajectoire pour $q > 0$

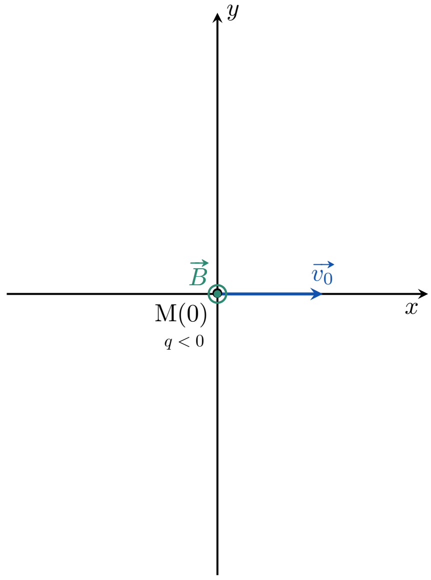


Figure M5.17 – Trajectoire pour $q < 0$

Équations différentielles

En repartant du PFD et en procédant par substitution,

Ce sont des **oscillateurs harmoniques**, de pulsation propre

Équations horaires

Solution générale $x(t) = x_h(t)$:

Et avec les conditions initiales

Solution générale $y(t) = y_h(t) + y_p$:

Et avec les conditions initiales

Remarque M5.2 : Cas général $\overrightarrow{v_0}$ dans $\overrightarrow{B}$

Soit $\overrightarrow{v_0} = v_{0,x}\overrightarrow{u_x} + v_{0,z}\overrightarrow{u_z}$. Les équations découplent le mouvement dans le plan xy et selon z :

- Sur z on garde une vitesse constante : $v_z(t) = v_{0,z}$;
- Pour les composantes sur x et y, on a $v_x(t)^2 + v_y(t)^2 = {v_{0,x}}^2$ et les mêmes équations différentielles : le mouvement est un cercle de rayon $R = \frac{v_{0,x}}{\omega_c}$.

Ainsi, la trajectoire est la superposition d'une rotation circulaire uniforme autour de (Oz) et d'une translation le long de cet axe : c'est un **mouvement hélicoïdal**. Une animation est disponible en ligne.

III/C Applications

- **Spectromètre de masse.** Un spectromètre de masse permet de **mesurer la masse d'atomes**, et éventuellement de déterminer les abondances isotopiques (utilisable par exemple pour la datation). Le principe est le suivant :

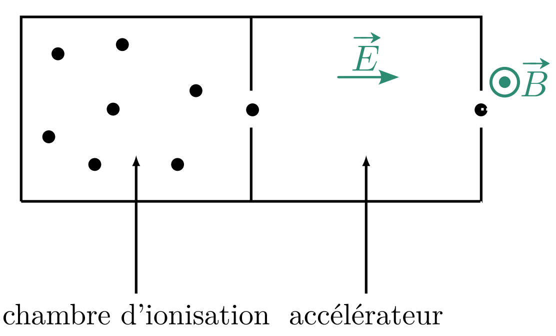


Figure M5.18 – Fonctionnement d'un spectromètre

- ▷ Des atomes sont ionisés dans une chambre d'ionisation ;
- ▷ Les particules sont accélérées par un champ électrique, pour les amener à une vitesse $v_f = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}}$;
- ▷ Un champ magnétique courbe ensuite leur trajectoire, avec un rayon

Ainsi, la donnée de la distance d'impact permet de retrouver la masse des particules !

- **Le cyclotron.** Il est constitué de deux demi-cylindres dans lequel règne un champ magnétique. Entre les deux demi-cylindres, deux électrodes imposent un champ électrique.

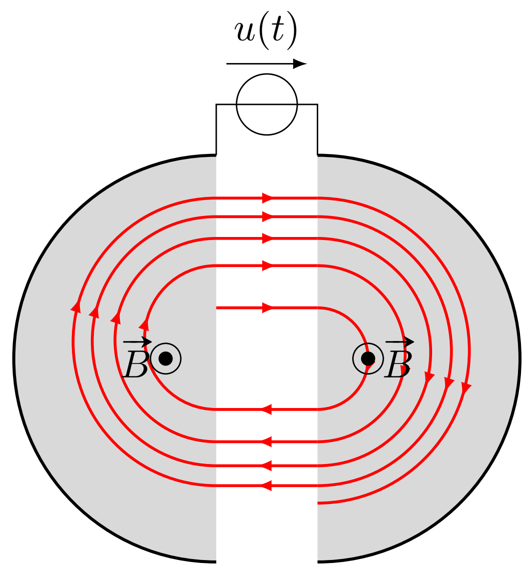


Figure M5.19 – Fonctionnement d'un cyclotron

- ▷ La particule chargée est accélérée dans l'espace entre les cylindres ;
- ▷ Elle fait demi-tour grâce à un champ magnétique qui la fait revenir dans la zone entre-deux ;
- ▷ Avec un courant alternatif bien réglé, la tension accélère de nouveau la particule ;
- ▷ Le champ magnétique la fait revenir, et ainsi de suite.

À chaque demi-tour, l'énergie cinétique croît de $|qU|$. La vitesse croît donc comme la racine carré du nombre de passages dans l'espace entre les cylindres.

Le rayon de courbure est proportionnel à la vitesse de la particule : la sélection de ce rayon permet la sélection de l'énergie cinétique voulue. Voir l'animation en ligne.