Correction du TD d'application

I Intérêt des raisonnements énergétiques

1 On lance une balle avec une vitesse initiale v_0 vers le haut depuis l'altitude $z = 0$. Déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle en négligeant tout frottement.

Réponse

À $t = 0$, la balle est lancée en $z = 0$ avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_O\overrightarrow{u_z}$. Elle va monter en altitude en perdant de l'énergie cinétique et en gagnant en énergie potentielle.

Le système {masse} n'est soumis qu'au poids, qui est conservatif ; le système est donc conservatif et l'énergie mécanique se conserve, soit :

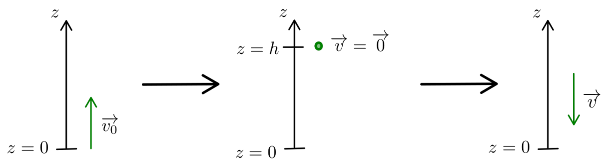


Figure M4.1 – Schéma de la situation

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_m(0) = \mathcal{E}_m(t_{\max})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}{v_0}^2 + \underbrace{mgz_0}_{=0} = \frac{1}{2}\cancel{m}v(t_{\max})^2 + \cancel{m}gh \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{h = \sqrt{\frac{{v_0}^2}{2g}}}$$

■

2 On considère un pendule simple (masse m ponctuelle, longueur ℓ, pas de frottements). On fait partir ce pendule de la verticale ($\theta = 0$, en bas) en lui communiquant une vitesse initiale v_0. Déterminer l'expression de l'amplitude maximale $\theta_{\max}$ du mouvement.

Réponse

Le système est conservatif puisque le poids est une force conservative et que le travail de la force de tension est nul ($\overrightarrow{T} \perp \overrightarrow{v}$). On peut donc utiliser le TEM en déterminant l'énergie potentielle en fonction de θ.

On prend la référence d'altitude $z = 0$ en bas du pendule. La longueur du pendule étant ℓ, on trouve l'altitude en projetant le point M sur l'axe z pour trouver $z(\theta) = \ell(1 - \cos(\theta))$; ainsi

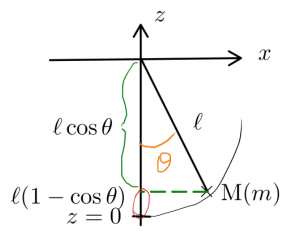


Figure M4.2 – Schéma

$$\Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cancel{m}{v_0}^2 + \underbrace{mgz_0}_{=0} = \frac{1}{2}\cancel{m}{v_{\max}}^2 + \cancel{m}gz_{\max}$$

$$\Leftrightarrow \ell(1 - \cos(\theta_{\max})) = \frac{{v_0}^2}{2g} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\cos(\theta_{\max}) = 1 - \frac{{v_0}^2}{2g\ell}}$$

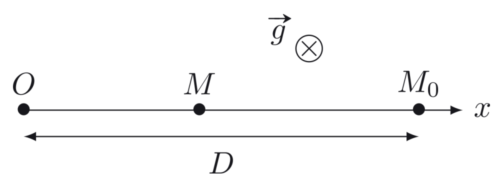
■

Cette équation est valable si ${v_0}^2/2g\ell < 2$, sinon $\cos(\theta_{\max}) < -1$. Cette condition traduit le fait que le pendule ne fait pas des tours, i.e. ne dépasse pas $\theta = \pi$.

II Curling

Le curling est un sport de précision pratiqué sur la glace avec des pierres en granite, taillées et polies selon un gabarit international. Le but est de placer les pierres le plus près possible d'une cible circulaire dessinée sur la glace, appelée la maison.

Nous envisageons le lancer d'une pierre assimilée à un point M de masse $m = 20\,\mathrm{kg}$ glissant selon l'axe Ox vers le point $\mathrm{M_0}$ visé (la maison). La pierre est lancée de la position initiale O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$, la maison se trouvant à la distance $D = \mathrm{OM_0} = 25\,\mathrm{m}$ du point O.



Nous supposerons que la force de frottement solide $\overrightarrow{F} = -F_0\overrightarrow{u_x}$ de la glace sur la pierre est constante pendant toute la glissade et s'annule lorsque la vitesse de la pierre s'annule. Nous prendrons $F_0 = 3{,}0\,\mathrm{N}$. Nous négligerons par ailleurs toute force de frottement fluide.

Le lancer étudié est supposé gagnant : la pierre atteint la maison et s'y arrête.

1 Exprimer le travail des forces appliquées sur la pierre pendant la glissade.

Réponse

◇ **Système** : {pierre}

◇ **Référentiel** : $\mathscr{R}_{\text{piste}}$, galiléen

◇ **Repère** : $(\mathrm{O},\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_z})$

◇ **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x}$

◇ **Conditions particulières**

Vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$

Position finale $\overrightarrow{\mathrm{OM}_0} = D\,\overrightarrow{u_x}$

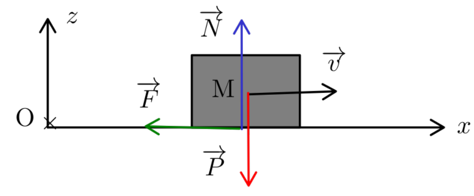


FIGURE M4.3 – Schéma de la situation

◇ **BDF et BDW** :

$$\begin{array}{lll}\textbf{Poids} & \overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_z} \\ \textbf{Réaction} & \overrightarrow{N} = N\overrightarrow{u_z} \\ \textbf{Frottements} & \overrightarrow{F} = -F_0\overrightarrow{u_x}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathscr{W}_{\mathrm{OM}_0}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}_0} = -mgD\underbrace{(\overrightarrow{u_z}\cdot\overrightarrow{u_x})}_{=0} = 0 \\ \mathscr{W}_{\mathrm{OM}_0}(\overrightarrow{N}) = \overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}_0} = ND\underbrace{(\overrightarrow{u_z}\cdot\overrightarrow{u_x})}_{=0} = 0 \\ \mathscr{W}_{\mathrm{OM}_0}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}_0} = -F_0D\underbrace{(\overrightarrow{u_x}\cdot\overrightarrow{u_x})}_{=1} = -F_0D\end{array}$$

◇

2 Que valent les énergies cinétiques initiale $\mathscr{E}_{c,I}$ et finale $\mathscr{E}_{c,F}$ de la pierre ? Appliquer alors le théorème de l'énergie cinétique à la pierre et en déduire la vitesse initiale v_0.

Réponse

Ici,

$$\Delta_{\mathrm{OM}_0}\mathscr{E}_c = \sum_i \mathscr{W}_{\mathrm{OM}_0}(\overrightarrow{F}_i)$$

$$\Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -F_0D$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2F_0D}{m}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_0 = 3{,}0\,\mathrm{N} \\ D = 25\,\mathrm{m} \\ m = 20\,\mathrm{kg}\end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{v_0 = 2{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

◇

☆☆★ III Piégeage d'un électron

Considérons le mouvement selon un axe $(\mathrm{O}z)$ d'un électron de masse $m = 9{,}1\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$ et de charge $-e = -1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ dans un dispositif de piégeage. Il est soumis uniquement à des forces conservatives, d'énergie potentielle totale $\mathscr{E}_p(z)$ telle que :

$$\mathscr{E}_p(z) = \frac{eV_0}{2d^2}z^2$$

avec $V_0 = 5{,}0\,\mathrm{V}$ et $d = 6{,}0\,\mathrm{mm}$.

1 Tracer l'allure de $\mathscr{E}_p(z)$. Identifier la position d'équilibre et donner sa stabilité.

Réponse

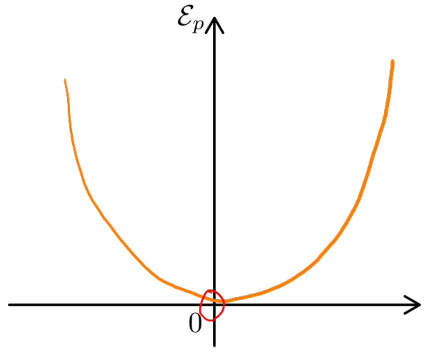


FIGURE M4.4 – $\mathcal{E}_p(z)$

On trace l'énergie potentielle, qui est **évidemment** une parabole convexe. On trouve le point d'équilibre en calculant sa dérivée et en trouvant quand elle s'annule ; visuellement, la dérivée s'annule en $z_{\text{eq}} = 0$, mathématiquement

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z}\right|_{z_{\text{eq}}} = \frac{eV_0}{d^2} z_{\text{eq}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{z_{\text{eq}} = 0}$$

On trouve sa stabilité en évaluant sa dérivée seconde en ce point, et il sera stable si elle est positive. En tant que fonction convexe en ce point, il est visiblement stable. On calcule :

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z_{\text{eq}}} = \frac{eV_0}{d^2} > 0}$$

Il est donc bien stable.

---

2 Calculer la fréquence des oscillations de l'électron dans le piège.

Réponse

Tout système conservatif autour de son point d'équilibre stable est régit par une équation d'oscillateur harmonique, faisant donc apparaître la pulsation propre ω_0. Il suffit pour démontrer cela d'utiliser la caractéristique principale d'un système conservatif : le fait que son énergie mécanique se conserve, i.e. $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0$. En effet, le TPC nous indique

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \sum_i \underbrace{\mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{\text{NC},i})}_{=0 \text{ car conservatif}} = 0$$

On nous donne $\mathcal{E}_p(z)$, donc pour avoir $\mathcal{E}_m$ il faut trouver la vitesse de la particule. Rien n'est indiqué dans l'énoncé, mais le problème n'indique qu'un potentiel selon $\overrightarrow{u_z}$; on peut supposer que la vitesse ne se fait que selon $\overrightarrow{u_z}$ également, et qu'on a donc $\overrightarrow{v} = \dot{z}\overrightarrow{u_z}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{eV_0}{2d^2}z^2\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow m\cancel{\dot{z}}\ddot{z} + \frac{eV_0}{d^2}z\cancel{\dot{z}} &= 0 \\
\Leftrightarrow \boxed{\ddot{z} + {\omega_0}^2 z = 0} & \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{eV_0}{md^2}}}
\end{aligned}$$

Étant donné que $\omega_0 = 2\pi f_0$, on obtient finalement

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{eV_0}{md^2}}} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{aligned} e &= 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \\ V_0 &= 5{,}0\,\mathrm{V} \\ m &= 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \\ d &= 6{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \end{aligned}\right.$$

A.N. : $\boxed{f_0 = 25\,\mathrm{MHz}}$ ■

---

3 Exprimer la résultante des forces $\overrightarrow{F}$ sur l'électron. On rappelle qu'en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

Réponse

Une force conservative dérive d'une énergie potentielle selon

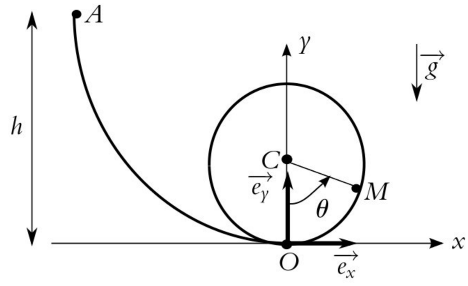
$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, \mathcal{E}_p$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{F} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{eV_0}{d^2} z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{eV_0}{d^2} z \overrightarrow{u_z}}$$ ■

IV Balle dans un tonneau

Une balle, assimilée à un point matériel M de masse m, est lâchée sur une rampe sans vitesse initiale depuis le point A d'une hauteur h par rapport au point O le bout de la rampe. Elle achève sa course dans un tonneau circulaire de rayon R lui permettant éventuellement de faire des *loopings*. On néglige les frottements.



1 Exprimer la norme v_{O} de la vitesse en O, puis v_{M} en un point M quelconque du tonneau repéré par l'angle θ, en fonction de g, h, a et θ. Donner la relation entre v_{M} et $\dot{\theta}(t)$.

Réponse

◇ **Système** : {balle}

◇ **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$, supposé galiléen

◇ **Repère** : cartésien pour la chute sur la rampe, avec $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant, et $(\mathrm{C}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ quand la balle est dans le tonneau ; voir schéma

◇ **Repérage** : dans le tonneau,

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = R\overrightarrow{u_r}$$
$$\overrightarrow{v}_{\mathrm{M}} = R\dot{\theta}(t)\overrightarrow{u_\theta}$$
$$\overrightarrow{a}_{\mathrm{M}} = R\ddot{\theta}(t)\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}(t)^2\overrightarrow{u_r}$$

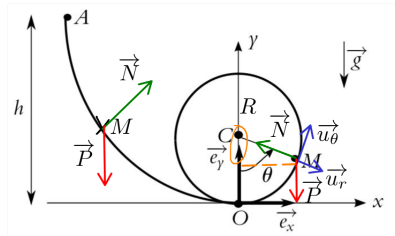


Figure M4.5 – Schéma de la situation

◇ **BDF** : dans le tonneau,

Poids $\overrightarrow{P} = mg(\cos(\theta)\overrightarrow{u_r} - \sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta})$

Réaction $\overrightarrow{N} = -N\overrightarrow{u_r}$

◇ **BDW** :

$$\overrightarrow{P}\text{conservatif}$$
$$\mathcal{W}_{\mathrm{AM}}(\overrightarrow{N}) = 0 \quad (\overrightarrow{N} \perp \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}})$$

Le système est donc **conservatif**. On peut appliquer le TEM :

◇ **En A** : $v_{\mathrm{A}} = 0$, $z_{\mathrm{A}} = h$

◇ **En O** : $v_{\mathrm{O}} = v_{\mathrm{O}}$, $\boxed{z_{\mathrm{O}} = 0}$ ⇐ référence **pour toute l'étude**

◇ **En M** : $z(\theta) = R(1 - \cos(\theta))$

◇ **TEM** :

$$\Delta_{\mathrm{AO}}\mathcal{E}_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_{\mathrm{O}}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v_{\mathrm{O}} = \sqrt{2gh}}$$ ■

puis $$\Delta_{\mathrm{OM}}\mathcal{E}_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{\frac{1}{2}\cancel{m}v_{\mathrm{M}}^2}^{\mathcal{E}_c(\mathrm{M})} + \overbrace{\cancel{m}gR(1-\cos(\theta))}^{\mathcal{E}_{p,p}(\mathrm{M})} = \overbrace{\frac{1}{2}\cancel{m}v_{\mathrm{O}}^2}^{\mathcal{E}_c(\mathrm{O})} + \overbrace{\underbrace{mgz_{\mathrm{O}}}_{=0}}^{\mathcal{E}_{p,p}(\mathrm{O})}$$

$$\Leftrightarrow v_{\mathrm{M}} = \sqrt{{v_{\mathrm{O}}}^2 + 2gR(\cos(\theta) - 1)}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{v_{\mathrm{M}} = \sqrt{2g}\sqrt{h + R(\cos(\theta) - 1)}} = R\dot{\theta}(t) \qquad \blacksquare$$

◇

2 Déterminer la réaction du tonneau en un point du cercle en fonction de g, h, a et θ.

Réponse

On sort de l'analyse énergétique, puisqu'on veut une valeur de force **en un point** du mouvement. On applique donc le **PFD** :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -mR\dot{\theta}(t)^2 = mg\cos(\theta) - N \\ mR\ddot{\theta}(t) = -mg\sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow N = mg\cos(\theta) + mR\dot{\theta}(t)^2$$

Or, $v_{\mathrm{M}} = R\dot{\theta}(t) \Leftrightarrow {v_{\mathrm{M}}}^2 = R^2\dot{\theta}(t)^2 \Leftrightarrow R\dot{\theta}(t)^2 = {v_{\mathrm{M}}}^2/R$ donc

$$N = m\left(g\cos(\theta) + \frac{2g}{R}\left(h + R(\cos(\theta) - 1)\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow N = m\left(g\cos(\theta) + 2g\cos(\theta) - 2g + 2g\frac{h}{R}\right)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{N = mg\left(3\cos(\theta) - 2 + 2\frac{h}{R}\right)} \qquad \blacksquare$$

◇

3 Déterminer la hauteur minimale $h_{\min}$ pour que la bille fasse le tour complet du tonneau sans tomber.

Réponse

La condition de contact entre deux solides est que la réaction normale ne soit pas nulle. Autrement dit, si la réaction normale est nulle, il n'y a plus contact : on cherche donc ici à voir si $N > 0$ à chaque instant. On pourrait tracer la fonction $N(\theta)$, mais on remarque facilement que l'endroit où N est la plus susceptible de s'annuler est quand $\theta = \pi$, quand la belle est « la tête à l'envers ». On résout donc

$$N(\pi) > 0$$
$$\Leftrightarrow \cancel{mg}\left(-3 - 2 + 2\frac{g}{R}\right) > 0$$
$$\Leftrightarrow 2\frac{h}{R} > 5$$
$$\Leftrightarrow \boxed{h > \frac{5}{2}R} = h_{\min} \qquad \blacksquare$$

◇

★☆☆

V Choc de deux chariots

Deux masses m_1 et m_2 sont montées sur un banc horizontal à coussins d'air, de sorte qu'on peut négliger tout frottements. On les projette l'une contre l'autre avec des vitesses initiales $\vec{v}_1 = v_1\vec{u_x}$ et $\vec{v}_2 = \vec{0}$ (m_2 initialement à l'arrêt).

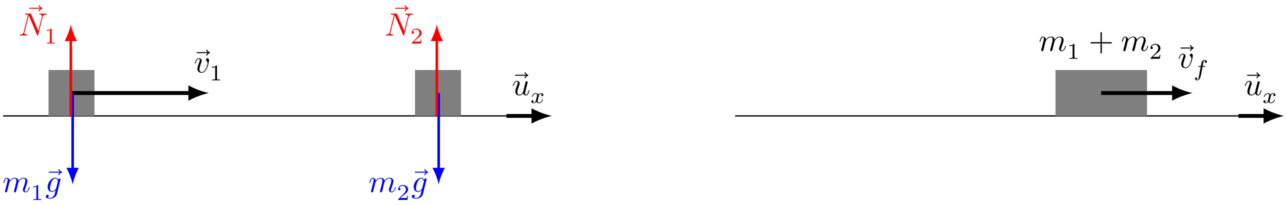
1 *Dans cette partie, on suppose qu'après le choc les masses restent solidaires.*

a − Quelle est la vitesse commune des deux masses après le choc ?

Réponse

◇ **Système** : {2 chariots} considérés chacun comme un point matériel
◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen
◇ **Base** : $(\vec{u_x},\vec{u_z})$ avec $\vec{u_z}$ vertical ascendant
◇ **BdF** :
 ▷ $\vec{P}_1 = -m_1 g\vec{u_z}$ et $\vec{N}_1\vec{u_z}$ pour le premier
 ▷ $\vec{P}_2 = -m_2 g\vec{u_z}$ et $\vec{N}_2\vec{u_z}$ pour le second

▷ Aucune force de frottements, donc système pseudo-isolé ($\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$)



Ainsi, $\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ soit $\vec{p}_{\text{tot}} = \overrightarrow{\text{cte}}$. Ainsi,

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}_f \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{v}_f = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_1 \vec{u_x}}$$

◇

b – Quel est le travail des actions intérieures lors du choc ? Commenter le signe du résultat.

Réponse

On utilise le TEC :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \mathcal{W}_{\text{int}} + \underbrace{\mathcal{W}_{\text{ext}}}_{=0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{W}_{\text{int}} = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = \frac{1}{2}(m_1+m_2){v_f}^2 - \frac{1}{2}m_1{v_1}^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{W}_{\text{int}} = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}{v_1}^2 < 0}$$

Le travail des forces intérieures est donc **négatif**, ce qui est cohérent avec le fait que le système perd de l'énergie cinétique, transformée en énergie thermique lors du choc.

◇

$\boxed{2}$ *On considère dans cette partie que le choc est élastique, c'est-à-dire que l'énergie cinétique de l'ensemble des deux masses est conservée au cours du choc et qu'elles ne sont plus solidaires après.*

a – Montrer que les vitesses v_1' et v_2' après le choc s'expriment :

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2} v_1 \quad \text{et} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_1$$

Réponse

On a toujours un système pseudo-isolé :

On a donc la conservation de la quantité de mouvement totale, ainsi que l'énergie cinétique totale ; ainsi entre les deux situations :

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1' + \frac{1}{2}m_2 v_2' \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1+m_2} v_1 \\ v_2' = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2} v_1 \end{cases}}$$

◇

b – Que se passe-t-il si $m_2 \gg m_1$?

Réponse

Si $m_2 \gg m_1$, alors $v_1' \to -v_1$ et $v_2' \to 0$. La masse m_1 rebondit sur la masse m_2, qui elle reste immobile. C'est la situation du lancer d'une balle rebondissante sur un mur.

◇

c – À quelle condition sur m_1 et m_2 est-il possible de réaliser un « carreau », i.e. échanger lors du choc les vitesses des deux masses, comme à la pétanque ?

Réponse

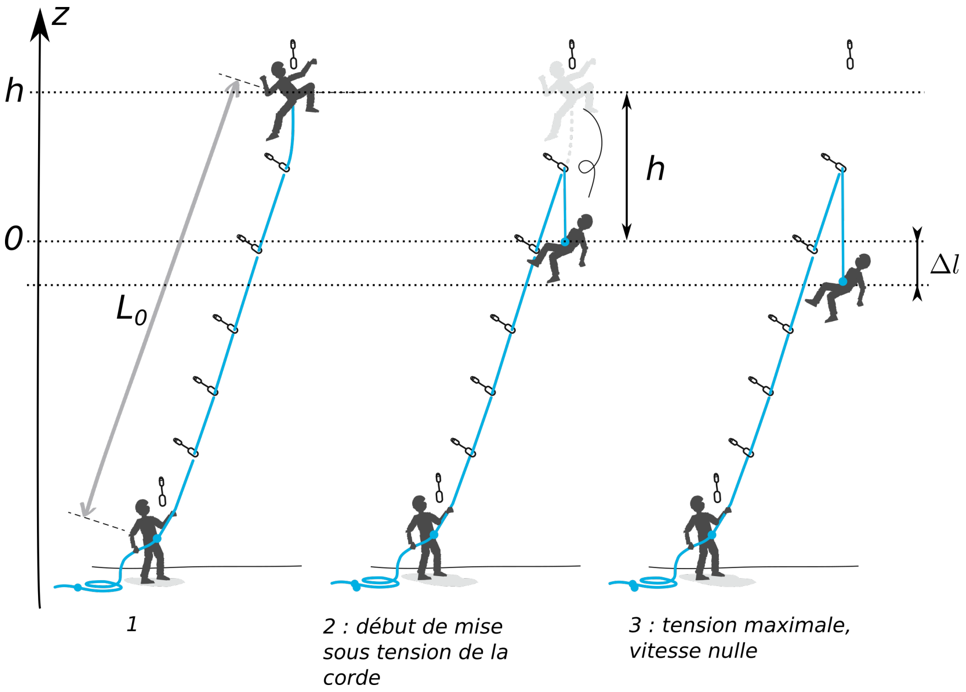
Pour faire un carreau, on veut $v_1' = 0 \Rightarrow \boxed{m_1 = m_2}$, et on aura bien $v_2' = v_1$.

◇

Correction du TD d'entraînement

I Chute sur corde en escalade

On étudie une grimpeuse qui chute. Une corde d'escalade de longueur L_0 peut, en première approximation, être modélisée par un ressort de longueur à vide L_0 et de raideur $k = \alpha/L_0$, avec α une caractéristique de la corde.



La grimpeuse est en chute libre sur une hauteur h pendant laquelle la corde n'est pas sous tension. La corde passe ensuite sous tension, et la chute se poursuit sur une hauteur $\Delta\ell$. La vitesse de la grimpeuse devient ainsi nulle au bout d'une hauteur totale de chute $h + \Delta\ell$.

On prendra $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $\alpha = 5{,}0 \times 10^4\,\mathrm{N}$ et une grimpeuse de masse $m = 50\,\mathrm{kg}$.

1 À l'aide d'un bilan énergétique, donner l'expression de la vitesse maximale atteinte par la grimpeuse. Faire l'application numérique pour une hauteur de chute $h = 5\,\mathrm{m}$.

Réponse

Pendant la chute libre, la grimpeuse ne subit que l'action du poids, qui est conservatif. On peut donc utiliser le TEM. Or, z **axe ascendant** donc $\mathcal{E}_{p,p} = +mg(z - z_{\text{ref}})$, et comme suggéré on prend $r_{\text{ref}} = z_{\mathrm{O}}$. Ainsi :

$$\begin{cases} z(t_1) = h \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p}(t_1) = mgh \\ v(t_1) = 0 \Rightarrow \quad \mathcal{E}_c(t_1) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z(t_2) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p}(t_2) = 0 \\ v(t_2) = \;? \Rightarrow \quad \mathcal{E}_c(t_2) = \frac{1}{2}mv(t_2)^2 \end{cases}$$

D'où
$$\Delta\mathcal{E}_m = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv(t_2)^2 = mgh \Leftrightarrow \boxed{v(t_2) = \sqrt{2gh}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ h = 5\,\mathrm{m} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{v(t_2) = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

◇

2 Toujours à l'aide d'une méthode énergétique, donner l'expression de l'allongement maximal $\Delta\ell$ de la corde. On supposera $\Delta\ell \ll h$ afin de simplifier le calcul.

Réponse

On a maintenant **deux** forces conservatives qui agissent sur la grimpeuse, donc **deux énergies potentielles**. On peut utiliser le TEM entre le point tout en haut et le point le plus bas, ou entre le point O et le point le plus bas. Faisons le premier cas :

$$\begin{cases} z(t_1) = h \;\Rightarrow \mathcal{E}_{p,p}(t_1) = mgh \\ v(t_1) = 0 \;\;\Rightarrow \quad \mathcal{E}_c(t_1) = 0 \\ \ell(t_1) = L_0 \Rightarrow \mathcal{E}_{p,el}(t_1) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z(t_3) = -\Delta\ell \quad \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p}(t_3) = 0 \\ v(t_3) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_c(t_3) = 0 \\ \ell(t_3) = L_0 + \Delta\ell \Rightarrow \mathcal{E}_{p,el}(t_3) = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \end{cases}$$

Ainsi, $\Delta\mathcal{E}_m = 0 \Leftrightarrow mgh = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + mg(-\Delta\ell) \Leftrightarrow mg(h + \underbrace{\cancel{\Delta\ell}}_{\ll h}) = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \Leftrightarrow \boxed{\Delta\ell = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}}$ ■

La solution trouvée est plausible : homogène, augmente avec m, h et g mais diminue avec k.

◇

3 Donner enfin l'expression de la norme de la force maximal $F_{\max}$ qu'exerce la corde sur la grimpeuse. On introduira le facteur de chute $f = h/L_0$.

Réponse

En norme, une force de rappel s'exprime $F = k(\ell - \ell_0)$, soit ici

$$F_{\max} = k\Delta\ell = \sqrt{2mgh\,k} = \sqrt{2mgh\frac{\alpha}{L_0}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{F_{\max} = \sqrt{2mg\alpha f}}$$ ■

◇

4 Au-delà d'une force de 12 kN, les dommages sur le corps humain deviennent importants. Que vaut $F_{\max}$ pour une chute de $h = 4\,\mathrm{m}$ sur une corde de longueur $L_0 = 4\,\mathrm{m}$? Conclure.

Réponse

On fait l'application numérique : avec $\begin{cases} m = 50\,\mathrm{kg} \\ g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ \alpha = 5{,}0 \times 10^4\,\mathrm{N} \\ f = 1 \end{cases}$ A.N. : $\underline{F_{\max} = 10\,\mathrm{kN}}$

Il n'y a donc pas de risque aggravé pour la grimpeuse avec cette chute.

◇

5 Une chute d'un mètre arrêtée par une corde de 50 cm est-elle plus ou moins dangereuse qu'une chute de 4 m arrêtée par une corde de 8 m ?

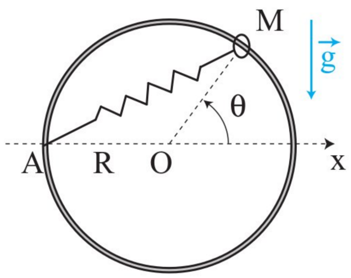
Réponse

Dans le premier cas, $f_1 = 2$; dans le second, $f_2 = 0{,}5$. Or, $F_{\max}$ évolue en $\sqrt{f}$, donc plus f augmente plus la force subie augmente : le premier cas est donc 2 fois plus dangereux que le premier !

◇

II Positions d'équilibre d'un anneau sur un cercle

Un anneau assimilable à un point matériel M de masse m peut glisser sans frottement sur une glissière circulaire de rayon R et de centre O. L'anneau est attaché à un ressort de raideur k dont une extrémité est fixée à la glissière au point A. Sa position est repérée par l'angle θ entre le rayon OM et l'axe horizontal (Ox). Pour simplifier les calculs, on considérera que la longueur à vide ℓ_0 du ressort est nulle.



1 Montrer que la longueur $\ell(t)$ s'exprime $\ell(t) = R\sqrt{2(1+\cos(\theta))}$.

Réponse

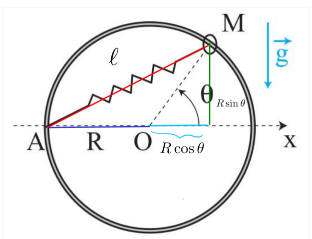


FIGURE M5.1 – Détermination de ℓ

On peut réutiliser la relation de CHASLES pour écrire $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$ et déterminer la distance en prenant la norme, mais ici une simple utilisation du théorème de PYTHAGORE suffit. On projette M sur l'axe x pour avoir

$$\ell^2 = (R + R\cos(\theta))^2 + (R\sin(\theta))^2$$
$$\Leftrightarrow \ell^2 = R^2 + 2R^2\cos(\theta) + R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$
$$\Leftrightarrow \ell^2 = 2R^2(1+\cos(\theta))$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\ell = R\sqrt{2(1+\cos(\theta))}}$$ ■

◇

2 Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ du système constitué de l'anneau et du ressort en fonction de l'angle θ.

Réponse

L'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p$ est constituée de l'énergie potentielle de pesanteur de l'anneau et de l'énergie potentielle élastique du ressort. Pour $\mathcal{E}_{p,p}$ avec origine en O, on a une altitude $R\sin(\theta)$; pour $\mathcal{E}_{p,el}$ on a la différence de longueur à a vide $\ell - \ell_0$ avec $\ell_0 = 0$, d'où

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p,p} + \mathcal{E}_{p,el} \\ \Leftrightarrow\ &\mathcal{E}_p = mgR\sin(\theta) + \frac{k}{2}\ell^2 \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{\mathcal{E}_p = mgR\sin(\theta) + kR^2(1+\cos(\theta))} \end{aligned}$$

■

◇

3 Déterminer les positions d'équilibre de l'anneau.

Réponse

On trouve les positions d'équilibre de l'anneau en trouvant les angles θ_{eq} tels que la dérivée de $\mathcal{E}_p$ s'annule, soit

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta_{\mathrm{eq}}} = -kR^2\sin(\theta_{\mathrm{eq}}) + mgR\cos(\theta_{\mathrm{eq}}) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\sin(\theta_{\mathrm{eq}}) = \frac{mg\cancel{R}}{kR^{\cancel{2}}}\cos(\theta_{\mathrm{eq}}) \\ \Leftrightarrow\ &\tan(\theta_{\mathrm{eq}}) = \frac{mg}{kR} \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{\theta_{\mathrm{eq},1} = \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta_{\mathrm{eq},2} = \pi + \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right)} \end{aligned}$$

■

avec $\theta_{\mathrm{eq},1}$ compris entre 0 et 90°, et $\theta_{\mathrm{eq},2}$ compris entre 180 et 270°.

◇

4 Préciser si les positions d'équilibre obtenues sont stables.

Réponse

On étudie la stabilité des positions en évaluant la dérivée seconde de $\mathcal{E}_p$ en ce point et en vérifiant son signe. On obtient

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\mathrm{eq}}} = -kR^2\cos(\theta_{\mathrm{eq}}) - mgR\sin(\theta_{\mathrm{eq}}) \\ \Leftrightarrow\ &\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\mathrm{eq}}} = -\left(kR^2 + \frac{m^2g^2}{k}\right)\cos(\theta_{\mathrm{eq}}) \end{aligned}$$

en utilisant les résultats précédents sur la dérivée première de $\mathcal{E}_p$. L'intérieur de la parenthèse étant positif, le signe de cette dérivée seconde est opposé à celui du cosinus de la position d'équilibre. Or, $\cos(\theta_{\mathrm{eq},1}) > 0$ et $\cos(\theta_{\mathrm{eq},2}) < 0$, donc

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\mathrm{eq},1}} < 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\mathrm{eq},2}} > 0}$$

■

La première position est donc instable, et la seconde stable.

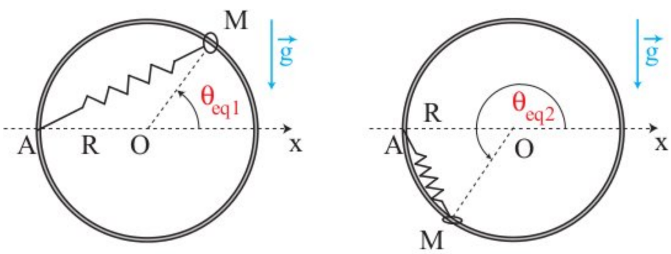


FIGURE M5.2 – Positions d'équilibre du système

◇

III Pendule électrique

On étudie un pendule constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium, et suspendue à une potence par une fine tige de longueur $R = 10\,\text{cm}$ dont nous négligerons la masse. La boule de masse $m = 20\,\text{g}$ sera assimilée à un point matériel M.

Une boule identique est placée en A (voir schéma). Les deux boules sont chargées électriquement avec la même charge, et donc se repoussent. La force exercée par A sur M s'écrit

$$\overrightarrow{F}_e = \frac{k}{\text{AM}^3}\overrightarrow{\text{AM}} \quad \text{avec} \quad k = 4{,}4\times 10^{-3}\,\text{N}\cdot\text{m}^2$$

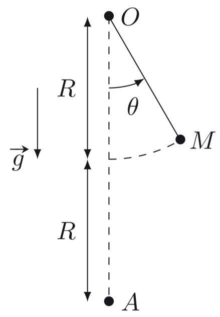


Figure M5.3 – Dispositif

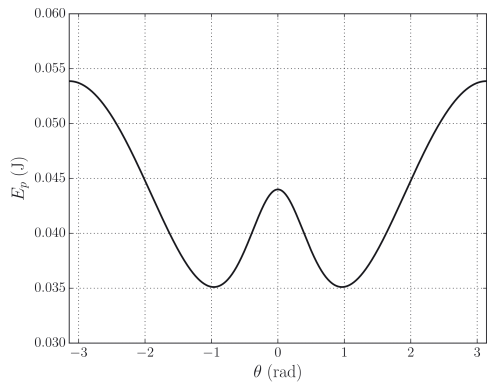


Figure M5.4 – Courbe $\mathcal{E}_p(\theta)$

1 Exprimer la distance AM en fonction de R et θ.

Réponse

Pour exprimer la distance AM, on la décompose par des vecteurs connus et on pourra prendre la norme du vecteur $\overrightarrow{\text{AM}}$ avec $\sqrt{x_{\text{AM}}{}^2 + y_{\text{AM}}{}^2}$, ou $\sqrt{\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{\text{AM}}}$. Notamment, $\overrightarrow{\text{AM}} = \overrightarrow{\text{AO}} + \overrightarrow{\text{OM}}$.

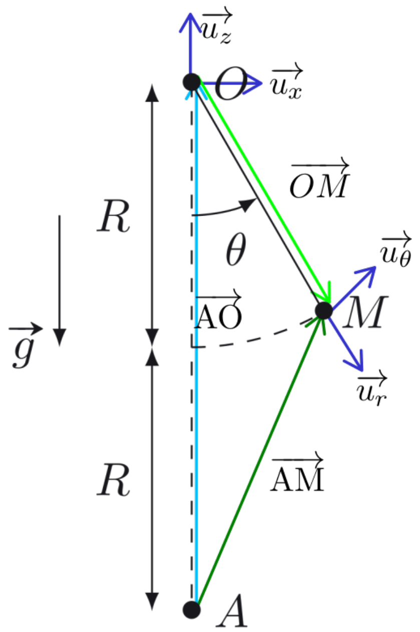


Figure M5.5 – Détermination de AM

Il faut donc décomposer $\overrightarrow{\text{AO}}$ et $\overrightarrow{\text{OM}}$ sur la même base, comme on le fait pour le poids sur un plan incliné. En effet,

$$\overrightarrow{\text{AO}} = 2R\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{\text{OM}} = R\overrightarrow{u_r}$$

mais on ne peut pas sommer les deux dans des bases différentes. Décomposons $\overrightarrow{u_r}$ sur $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$: on trouve

$$\overrightarrow{u_r} = \sin(\theta)\overrightarrow{u_x} - \cos(\theta)\overrightarrow{u_z}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\text{AM}} = \overrightarrow{\text{AO}} + \overrightarrow{\text{OM}} \\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{\text{AM}} = \begin{pmatrix} R\sin(\theta) \\ 2R - R\cos(\theta)\end{pmatrix} \\
\Rightarrow\ &\|\overrightarrow{\text{AM}}\| = \sqrt{R^2\sin^2\theta + (2R - R\cos(\theta))^2} \\
\Leftrightarrow\ &\text{AM} = \sqrt{R^2\sin^2\theta + 4R^2 - 4R^2\cos(\theta) + R^2\cos^2\theta} \\
\Leftrightarrow\ &\text{AM} = \sqrt{5R^2 - 4R^2\cos(\theta)} \quad \text{avec} \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\text{AM} = R\sqrt{5 - 4\cos(\theta)}}
\end{aligned}$$

■

◇

2 Montrer que la force $\overrightarrow{F}_e$ est conservative, et que son énergie potentielle s'exprime

$$\mathcal{E}_{p,e}(\theta) = \frac{k}{R\sqrt{5 - 4\cos(\theta)}}$$

Réponse

Une force est conservative si son travail élémentaire s'exprime sous la forme $-\text{d}\mathcal{E}_p$. Calculons son travail élémentaire :

$$\delta W(\overrightarrow{F}_e) = \overrightarrow{F}_e \cdot \text{d}\overrightarrow{\text{AM}}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \delta W(\vec{F}_e) = \frac{k}{\mathrm{AM}^3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\\
&\Leftrightarrow -\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,e} = \frac{1}{2}\frac{k}{\mathrm{AM}^3}\,\mathrm{d}\left(\|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\|^2\right)
\end{aligned}$$

Avec $u = \mathrm{AM}^2$:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,e} = \frac{1}{2}\frac{k}{u^{3/2}}\,\mathrm{d}u\\
&\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,e}}{\mathrm{d}u} = -\frac{1}{2}\frac{k}{u^{3/2}}\\
&\Rightarrow \mathcal{E}_{p,e} = \frac{k}{u^{1/2}} + \underbrace{\mathrm{cte}}_{\text{prise nulle}}\\
&\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,e} = \frac{k}{\mathrm{AM}} = \frac{k}{R\sqrt{5-4\cos(\theta)}}}
\end{aligned}$$

■

◇

3 Exprimer l'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p(\theta)$ de la boule M.

Réponse

La boule M a également une énergie potentielle de pesanteur. En prenant O comme origine de l'altitude, l'altitude de la boule M $z(\theta)$ s'exprime

$$z(\theta) = -R\cos(\theta)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_p(\theta) = \mathcal{E}_{p,p}(\theta) + \mathcal{E}_{p,e}(\theta)\\
&\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_p(\theta) = \frac{k}{R\sqrt{5-4\cos(\theta)}} - mgR\cos(\theta)}
\end{aligned}$$

■

◇

4 Le tracé de l'énergie potentielle est proposé sur la figure 2. Déduire de ce graphe l'existence de positions d'équilibres, et indiquer leur nature.

Réponse

On observe en tout 5 positions d'équilibres : deux stables dans les puits de potentiel vers $\pm 1\,\mathrm{rad}$, et trois instables (maxima locaux d'énergie potentielle) en $-\pi$, 0 et π.

◇

5 Discuter de la nature de la trajectoire de M suivant la valeur de son énergie mécanique.

Réponse

Le mouvement du pendule ne se fait que dans les zones du graphique où $\mathcal{E}_p < \mathcal{E}_m$. On distingue donc 4 cas :

Cas 1	$0\,\mathrm{J} < \mathcal{E}_m < 3{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{J}$	$\Rightarrow$ pas de mouvement
Cas 2	$3{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{J} < \mathcal{E}_m < 4{,}4\times10^{-2}\,\mathrm{J}$	$\Rightarrow$ oscillations $\approx$ position stable
Cas 3	$4{,}4\times10^{-2}\,\mathrm{J} < \mathcal{E}_m < 5{,}4\times10^{-2}\,\mathrm{J}$	$\Rightarrow$ mouvement périodique entre $\mathcal{E}_{p,\,\max}$
Cas 4	$5{,}4\times10^{-2}\,\mathrm{J} < \mathcal{E}_m < +\infty$	$\Rightarrow$ mouvement révolutif : tours à l'infini

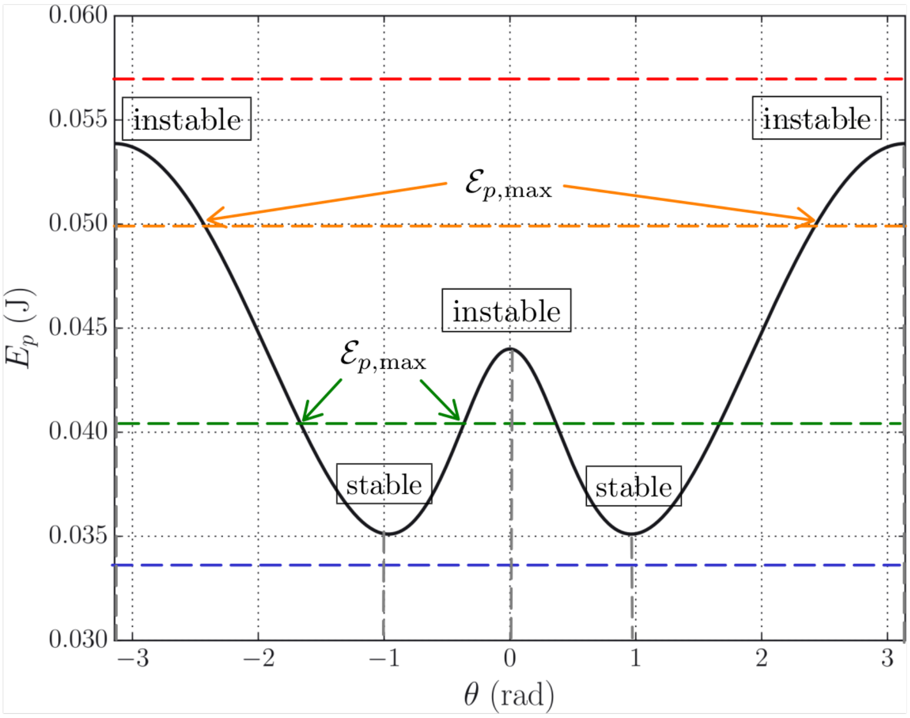


Figure M5.6 – Mouvement selon $\mathcal{E}_m$

IV Recul d'un canon

On considère un canon (figure M5.7) de masse $M = 800\,\mathrm{kg}$. Lors du tir horizontal d'un obus de masse $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ telle que $v_0 = 600\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, le canon acquiert une vitesse de recul $\overrightarrow{v_c} = -\frac{m}{M}\overrightarrow{v_0}$.

Pour limiter la course du canon, on utilise un ressort de raideur k_1, de longueur à vide L_0 dont l'une des extrémités est fixe, et l'autre liée au canon. Le déplacement a lieu suivant l'axe Ox. Dans la suite, le canon est assimilé à un point matériel, son centre de gravité G (figure M5.8).

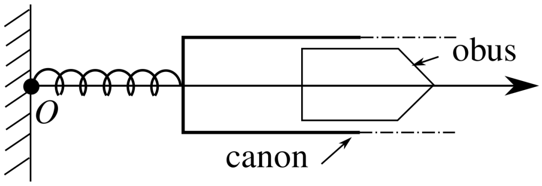


Figure M5.7 – Canon

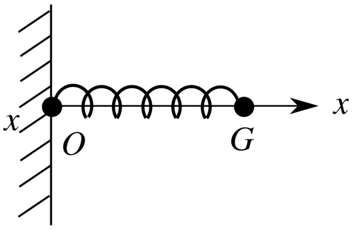


Figure M5.8 – Repérage

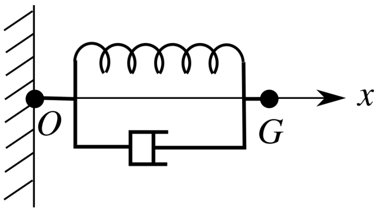


Figure M5.9 – Amortisseur

1 Quelle est la longueur du ressort lorsque le canon est au repos ?

Réponse

Au repos, la tension du ressort est nulle, donc $\ell = L_0$.

2 En utilisant l'énergie mécanique, déterminer la distance de recul d. En déduire la raideur k_1 pour avoir un recul inférieur ou égal à d. Application numérique pour $d = 1{,}0\,\mathrm{m}$.

Réponse

- **Système** : {canon}, repéré par G de masse M
- **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$, supposé galiléen
- **Repère** : mouvement horizontal donc cartésien, $(\mathrm{O},\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_z})$ avec $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant
- **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OG}}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x}$ et $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$ et $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$
- **BDF** :

Poids $\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$

Réaction $\overrightarrow{N} = N\overrightarrow{u_z}$

Ressort $\overrightarrow{F} = -k_1(x - L_0)\overrightarrow{u_x}$

Le poids et la tension du ressort sont conservatives, et la réaction du sol ne travaille pas : on a donc un système conservatif, et on applique simplement le TEM :

- ◇ **Au moment du tir** : $v = v_c$, $x = L_0 \Rightarrow \mathcal{E}_{c,0} = M{v_c}^2/2$ et $\mathcal{E}_{p,el} = k_1(L_0 - L_0)^2/2 = 0$
- ◇ **Après le recul** : $v = 0$, $x = L_0 - d \Rightarrow \mathcal{E}_{c,f} = 0$ et $\mathcal{E}_{p,el} = k_1 d^2/2$
- ◇ **TEM** :

$$\frac{1}{2}k_1 d^2 = \frac{1}{2}M \underbrace{v_c}_{=mv_0/M}{}^2$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{m^2}{k_1 M}{v_0}^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{d = \frac{m}{\sqrt{k_1 M}}v_0}$$ ■

$$\Leftrightarrow \boxed{k_1 = \frac{m^2{v_0}^2}{d^2 M}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 2{,}0\,\text{kg} \\ M = 800\,\text{kg} \\ v_0 = 600\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \\ d = 1{,}0\,\text{m} \end{cases}$$ ■

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{k_1 = 1800\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}}$$

◇

3 Retrouver la relation entre k_1 et d en appliquant le PFD.

Réponse

Avec le **PFD** et en projetant sur $\overrightarrow{u_x}$ (on a $N = mg$ sur $\overrightarrow{u_z}$) :

$$M\ddot{x} = -k_1(x - L_0)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 L_0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{M}}$$

$$\Rightarrow x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + L_0$$

Or,

$$x(t=0) = L_0 \Rightarrow A\cos\varphi = 0$$

On choisit $\varphi = -\pi/2$, et ainsi

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + L_0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = A\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

Or,

$$\dot{x}(t=0) = -\frac{m}{M}v_0$$

$$\Rightarrow A = -\frac{m}{M}\frac{v_0}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{mv_0}{\sqrt{k_1 M}}\sin(\omega_0 t) + L_0}$$ ■

On obtient alors d comme étant l'amplitude du sinus, c'est-à-dire le résultat précédent.

◇

4 Quel est l'inconvénient d'utiliser un ressort seul ?

Réponse

On vient donc de démontrer qu'avec un seul ressort, le canon va osciller et donc après le recul, il va repartir vers l'avant. L'amplitude va diminuer petit à petit à cause des frottements inéluctables, mais le temps avant immobilisation sera important : on a donc intérêt à ajouter une force de frottements visqueux.

◇

Pour pallier ce problème, on ajoute au système un dispositif amortisseur (figure M5.9), exerçant une force de frottement $\overrightarrow{F} = -\lambda\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}$ étant la vitesse du canon.

$\boxed{5}$ Le dispositif de freinage absorbe une fraction $\mathcal{E}_a = 778\,\mathrm{J}$ de l'énergie cinétique initiale. Calculer la nouvelle valeur k_2 de la constante de raideur du ressort avec les données numériques précédentes. Déterminer la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.

Réponse

Le système n'est plus conservatif, et la variation d'énergie mécanique est maintenant égale à l'énergie absorbée par le dispositif de freinage, c'est-à-dire

$$\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,f} - \mathcal{E}m,i = -\mathcal{E}_a$$

puisque l'énergie cinétique doit décroître et que $\mathcal{E}_a$ est positive. Or, initialement et finalement,

$$\mathcal{E}_{m,i} = \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}M{v_c}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,f} = \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k_2 d^2$$

Soit
$$\frac{1}{2}k_2 d^2 - \frac{1}{2}M{v_c}^2 = -\mathcal{E}_a$$ ■

$$\Leftrightarrow k_2 = \frac{1}{d^2}\left(M{v_c}^2 - 2\mathcal{E}_a\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k_2 = \frac{1}{d^2}\left(\frac{m^2}{M}{v_0}^2 - 2\mathcal{E}_a\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 2{,}0\,\mathrm{kg} \\ M = 800\,\mathrm{kg} \\ v_0 = 600\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \\ \mathcal{E}_a = 778\,\mathrm{J} \end{cases}$$ ■

A.N. : $\boxed{k_2 = 244\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}}$

De plus,
$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k_2}{M}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_2 = 244\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} \\ M = 800\,\mathrm{kg} \end{cases}$$

A.N. : $\boxed{\omega_0 = 0{,}55\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$

◇

$\boxed{6}$ Déterminer λ pour que le régime soit critique. Application numérique.

Réponse

On reprend la question 3) mais avec la force de frottements, pour obtenir l'équation d'un oscillateur amorti :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{M}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 L_0$$

Le discriminant de l'équation caractéristique associée est

$$\Delta = \left(\frac{\lambda}{M}\right)^2 - 4{\omega_0}^2$$

et on a un régime critique quand ce discriminant est nul ; soit

$$\boxed{\lambda = 2M\omega_0} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M = 800\,\mathrm{kg} \\ \omega_0 = 0{,}55\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \end{cases}$$ ■

A.N. : $\boxed{\lambda = 884\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}}$

◇

$\boxed{7}$ Déterminer l'expression de l'élongation $x(t)$ du ressort, ainsi que celle de la vitesse $\dot{x}(t)$. En déduire l'instant t_m pour lequel le recul est maximal. Exprimer alors ce recul en fonction de m, v_0 et λ. L'application numérique redonne-t-elle la valeur de d précédente ?

Réponse

Avec le régime critique, on a
$$x(t) = (At + B)\exp\left(-\frac{\lambda t}{2M}\right) + L_0$$ ■

Or,
$$x(0) = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = A\exp\left(-\frac{\lambda t}{2M}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{2M}t\right)$$

Or,
$$\dot{x}(0) = v_c \Rightarrow \boxed{A = v_c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}(t) = -\frac{m}{M}\exp\left(-\frac{\lambda t}{2M}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{2M}t\right)}$$

et $$\boxed{x(t) = -\frac{m}{M} v_0 t \exp\left(-\frac{\lambda t}{2M}\right) + L_0}$$ ■

Le recul est maximal quand la vitesse s'annule, soit

$$t_m = \frac{2M}{\lambda} = 1{,}8\,\mathrm{s}$$

On calcule $x(t_m)$, sachant qu'on a par définition $x(t_m) = L_0 - d$:

$$\begin{aligned} x(t_m) &= -\frac{m}{M} v_0 \frac{2M}{\lambda} \mathrm{e}^{-1} + L_0 \\ \Leftrightarrow L_0 - d &= L_0 - \frac{2mv_0}{\lambda \mathrm{e}} \\ \Leftrightarrow & \boxed{d = \frac{2mv_0}{\lambda \mathrm{e}}} \end{aligned}$$ ■

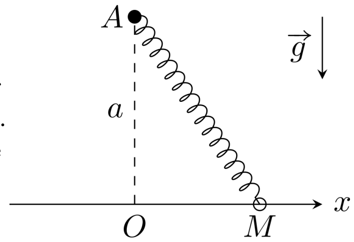
et l'application numérique donne $\boxed{d = 1{,}0\,\mathrm{m}}$

On retrouve bien la distance de recul précédente, mais cette fois il n'y a pas d'oscillation ! Cahier des charges rempli.

V Oscillateur de Landau

L'oscillateur de Landau est un modèle théorique permettant de modéliser efficacement des systèmes physiques pour lesquelles des faibles non-linéarités sont à prendre en compte. Il s'agit d'une approximation un peu plus précise que celle de l'oscillateur harmonique pour étudier le comportement de systèmes au voisinage de leur position d'équilibre.

Un exemple de système modèle permettant de réaliser un oscillateur de Landau est un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale choisie comme axe (Ox). Cet anneau est relié à un ressort, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k, dont l'autre extrémité est fixée en A. La distance de A à la tige est notée AO = a.



1 Exprimer l'énergie potentielle totale $\mathscr{E}_p(x)$.

Réponse

Comme l'anneau est contraint de se déplacer sur une ligne horizontale, son énergie potentielle de pesanteur est constante. Ainsi, la seule contribution à l'énergie potentielle est d'origine élastique,

$$\mathscr{E}_p(x) = \frac{1}{2} k (\mathrm{AM} - \ell_0)^2$$

La longueur AM s'exprime à partir du théorème de Pythagore,

$$\mathrm{AM}^2 = a^2 + x^2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathscr{E}_p(x) = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0\right)^2}$$

2 La courbe d'énergie potentielle est représentée ci-dessous pour quatre valeurs de a : $a_1 = \ell_0/10$, $a_2 = \ell_0/3$, $a_3 = \ell_0$ et $a_4 = 3\ell_0$. En raisonnement qualitativement sur les positions d'équilibre, attribuer chaque courbe à la valeur de a qui lui correspond.

Réponse

Qualitativement, il est assez simple de comprendre pourquoi certaines courbes font apparaître deux minima et d'autre un seul. Si $a < \ell_0$, alors deux positions de M, symétriques par rapport à O sont telles que AM = ℓ_0. Dans ce cas, l'énergie potentielle élastique est nulle. Au contraire, si $a > \ell_0$, le ressort est toujours étiré et l'énergie potentielle élastique jamais nulle.

Remarque M5.1 :

Ce raisonnement se retrouve tout à fait sur l'expression mathématique de $\mathscr{E}_p$!

Ainsi on peut identifier la courbe en **pointillés violets au cas $\mathbf{a_4} = 3\ell_0$**. La courbe en **points verts** ne fait apparaître qu'un seul minimum, mais son énergie potentielle est nulle : elle correspond au cas $\mathbf{a_3} = \ell_0$. Enfin, il reste à identifier les deux dernières courbes, ce qui peut se faire à partir de la valeur de l'énergie potentielle en $x = 0$. Elle est plus élevée sur la courbe bleue que sur la courbe rouge, signe que le ressort est davantage comprimé. On en déduit que la **courbe bleue** est celle du cas $\mathbf{a_1} = \boldsymbol{\ell_0/10}$ alors que la courbe **rouge** correspond à $\mathbf{a_2} = \boldsymbol{\ell_0/3}$.

◇

3 Pour chaque valeur de a, analyser le mouvement possible de l'anneau en fonction des conditions initiales.

Réponse

Quelles que soient les conditions initiales, le mouvement est borné car $\mathcal{E}_p$ diverge en $\pm\infty$, et il est donc périodique. Dans le cas $a \leq \ell_0$, si les conditions initiales sont telles que $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_p(x = 0)$, alors le mouvement est restreint à un côté $x < 0$ ou $x > 0$ car l'anneau n'a pas assez d'énergie pour franchir la barrière de potentiel en $x = 0$. Si les conditions initiales sont en revanche telles que $\mathcal{E}_m > \mathcal{E}_p(x = 0)$, le mouvement a lieu de part et d'autre de la barrière, et il est symétrique car le profil d'énergie potentielle l'est. C'est également le cas si $a > \ell_0$, et ce quelles que soient les conditions initiales.

◇

4 Pour les valeurs de a précédentes, l'anneau est lâché avec les mêmes conditions initiales. Sa vitesse et sa position sont enregistrées au cours du temps, ce qui donne les trajectoires de phase de la figure ci-dessous. Déterminer la condition initiale et affecter chaque trajectoire de phase à la valeur de a qui lui correspond.

Réponse

La condition initiale est très simple à déterminer : c'est le seul point commun à toutes les trajectoires de phase. Compte tenu de la symétrie des portraits de phase et des profils d'énergie potentielle, seule la norme de la vitesse peut être déterminée. On trouve

$$x_0 = 0{,}4\ell_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}_0 = 0{,}5\ell_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Seule la trajectoire de phase représentée en **bleu** n'est pas symétrique par rapport à $x = 0$. Elle correspond donc au cas où la barrière de potentiel centrale est la plus élevée, donc **le cas** $\mathbf{a_1} = \boldsymbol{\ell_0/10}$. La trajectoire de phase représentée en **rouge** montre une réduction de vitesse en $x = 0$: elle correspond donc au cas où il y a une barrière de potentiel, mais moins élevée, c'est-à-dire le cas $\mathbf{a_2} = \boldsymbol{\ell_0/3}$. Enfin, la trajectoire de phase **verte** est plus aplatie que la trajectoire de phase violette. Cet aplatissement se retrouve dans les courbes d'énergie potentielle : la courbe verte correspond au cas $\mathbf{a_3} = \boldsymbol{\ell_0}$ et la courbe **violette** au cas $\mathbf{a_4} = \boldsymbol{3\ell_0}$.

◇