

# Mouvement de particules chargées

## Sommaire

<b>I La force de LORENTZ . . . . .</b>	<b>2</b>
I/A Présentation . . . . .	2
I/B Aspects énergétiques . . . . .	3
<b>II Mouvement dans un champ électrique (stationnaire et uniforme) . . . . .</b>	<b>5</b>
II/A Situation générale . . . . .	5
II/B Accélération d'une particule chargée . . . . .	6
II/C Déviation d'une particule chargée . . . . .	6
<b>III Mouvement dans un champ magnétique (stationnaire et uniforme) . . . . .</b>	<b>7</b>
III/A Vitesse initiale parallèle au champ $\vec{B}$ . . . . .	7
III/B Vitesse initiale perpendiculaire au champ $\vec{B}$ . . . . .	7
III/C Applications . . . . .	10

## ☒ Capacités exigibles

- Force de LORENTZ exercée sur une charge ponctuelle
- Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
- Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.

- Mouvement d'une particule chargée dans un champ  $\vec{E}$  uniforme :
  - ▷ Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur  $\vec{u}$  constant ;
  - ▷ Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
- Mouvement d'une particule chargée dans un champ  $\vec{B}$  uniforme pour  $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$  : déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.

## ✓ L'essentiel

### ☒ Définitions

- M5.1 : Champs électrique et magnétique . . . . . 2
- M5.2 : Force de LORENTZ . . . . . 2
- M5.3 : Produit vectoriel . . . . . 2
- M5.4 : Tension électrique . . . . . 4
- M5.5 : Conditions d'étude . . . . . 5

### ❖ Propriétés

- M5.1 : Poids vs. LORENTZ . . . . . 2
- M5.2 : Produit vectoriel . . . . . 3
- M5.3 : Puissance de LORENTZ . . . . . 3
- M5.4 : Énergie potentielle électrique . . . . . 4
- M5.5 : Potentiel électrostatique . . . . . 4
- M5.6 : Tension et champ électrique . . . . . 4
- M5.7 : Mouvement général en champ  $\vec{E}$  . . . . . 5
- M5.8 : Particule  $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}$  . . . . . 6
- M5.9 : Déviation particule  $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$  . . . . . 6
- M5.10 : Particule  $\vec{v}_0 \parallel \vec{B}$  . . . . . 7
- M5.11 : Trajectoire  $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$  par FRENET . . . . . 7
- M5.12 : Mouvement  $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$  en cartésiennes . . . . . 8

### ♥ Points importants

- M5.1 : Comparaison  $\vec{E}$  et  $\vec{g}$  . . . . . 5

### ☰ Démonstrations

- M5.1 : Poids vs. LORENTZ . . . . . 2
- M5.2 : Produit vectoriel . . . . . 3
- M5.3 : Puissance de LORENTZ . . . . . 4
- M5.4 : Énergie potentielle électrique . . . . . 4
- M5.5 : Potentiel électrostatique . . . . . 4
- M5.6 : Tension et champ électrique . . . . . 5
- M5.7 : Mouvement général en champ  $\vec{E}$  . . . . . 5
- M5.8 : Particule  $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}$  . . . . . 6
- M5.9 : Déviation particule  $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$  . . . . . 6
- M5.10 : Particule  $\vec{v}_0 \parallel \vec{B}$  . . . . . 7
- M5.11 : Trajectoire  $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$  par FRENET . . . . . 7
- M5.12 : Mouvement  $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$  en cartésiennes . . . . . 8

### ⌚ Remarques

- M5.1 : Accélération rectiligne . . . . . 6
- M5.2 : Cas général  $\vec{v}_0$  dans  $\vec{B}$  . . . . . 10

### ☒ Exemples

- M5.1 : Produit vectoriel . . . . . 3
- M5.2 : Oscilloscope analogique. . . . . 7

## I La force de LORENTZ

### I/A Présentation

#### Définition M5.1 : Champs électrique et magnétique

##### Champ électrique

Un champ électrique  $\vec{E}(M,t)$  est un champ de vecteurs créé par des charges électriques et/ou par des variations temporelles du champ magnétique.

##### Champ magnétique

Un champ magnétique  $\vec{B}(M,t)$  est un champ de vecteurs créé par des courants électriques et/ou par des variations temporelles du champ électrique.

##### Unités

$\|\vec{E}\|$  en  $V \cdot m^{-1}$

$\|\vec{B}\|$  en Tesla (T)

#### Ordre de grandeur M5.1 : Champs électriques et magnétiques

	Champ $\vec{E}$	Champ $\vec{B}$	
Condensateur	$10 V \cdot mm^{-1} \approx 10 kV \cdot m^{-1}$	Bobine	$0,1 mT$
Téléphonie mobile	$5 V \cdot dm^{-1} \approx 50 V \cdot m^{-1}$	Aimant permanent	$[10^{-2} ; 10^{-1}] T$
Surface Terre	$100 V \cdot m^{-1}$	Surface Terre	$0,05 mT$
Orage	$10 kV \cdot m^{-1}$	IRM	$[1 ; 3] T$

#### ♥ Définition M5.2 : Force de LORENTZ

La force subie par une charge  $q$  plongée dans un champ électrique  $\vec{E}$  et un champ magnétique  $\vec{B}$  est appelée **force de LORENTZ**, et s'exprime :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}(t) \wedge \vec{B}) = \vec{F}_e + \vec{F}_m \quad \text{avec} \quad \vec{F}_e = q\vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{F}_m = q(\vec{v}(t) \wedge \vec{B})$$

On appelle  $\vec{F}_e$  la **force électrique** et  $\vec{F}_m$  la **force magnétique**.

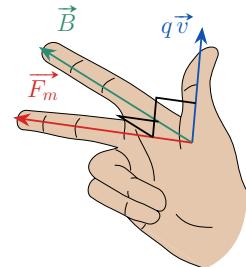


FIGURE M5.1 –  $\vec{F}_m$

#### ♥ Propriété M5.1 : Poids vs. LORENTZ

Dans les problèmes incluant des particules chargées, on négligera toujours le poids devant la force de LORENTZ.

#### Démonstration M5.1 : Poids vs. LORENTZ

Pour un proton dans des conditions standard de laboratoire :

$$\begin{cases} m = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg} \\ q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \\ \|\vec{v}\| \approx 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \|\vec{E}\| \approx 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \\ \|\vec{B}\| \approx 10^{-3} \text{ T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\vec{P}\| \approx 2 \times 10^{-26} \text{ N} \\ \|\vec{F}_e\| \approx 2 \times 10^{-16} \text{ N} \\ \|\vec{F}_m\| \approx 2 \times 10^{-16} \text{ N} \end{cases} \Rightarrow \|\vec{P}\| \ll \|\vec{F}\| \quad \blacksquare$$

#### Définition M5.3 : Produit vectoriel

##### Définition

Le produit vectoriel  $\vec{c}$  de deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  s'écrit  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$  est un **vecteur** :

◊ **perpendiculaire au plan**  $(\vec{a}, \vec{b})$ , donc à  $\vec{a}$  et à  $\vec{b}$  :  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \perp \vec{a}$  et  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \perp \vec{b}$

◊ de sens donné par la règle de la **main droite** ;

◊ de norme

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| |\sin(\theta)|$$

avec  $\theta = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$



### ♥ Démonstration M5.3 : Puissance de LORENTZ

La puissance de la force de LORENTZ est :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\vec{F}) &= \left( q \left( \vec{E} + \vec{v}(t) \wedge \vec{B} \right) \right) \cdot \vec{v}(t) \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}(\vec{F}) &= q \vec{E} \cdot \vec{v}(t) + q \underbrace{\left( \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v}}_{\perp \vec{v}} \\ \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F}_e)} &\stackrel{\text{TPC}}{=} \frac{d\mathcal{E}_c}{dt}\end{aligned}$$

Ainsi, seule la force électrique peut faire varier l'énergie cinétique, et donc la vitesse, d'une particule chargée ; la force magnétique peut changer sa direction mais pas sa norme.

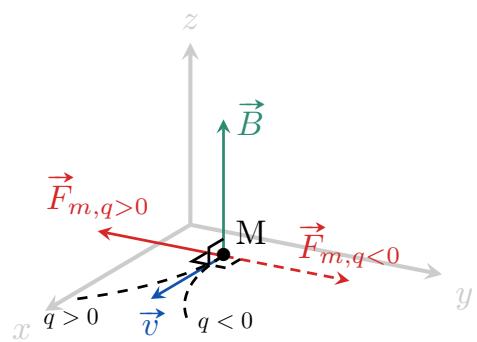


FIGURE M5.6

### I/B) 2 Énergie potentielle

#### ♥ Propriété M5.4 : Énergie potentielle électrique

La force électrique est conservative, donc dérive d'une énergie potentielle  $\mathcal{E}_{p,e}(M)$  ; pour  $\vec{E} \parallel \vec{u}_z$  :

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = \pm qE\vec{u}_z \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,e}(z) = \mp qEz + \text{cte}} \quad \text{tel que} \quad \vec{F}_e = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_{p,e}(z))$$

### Démonstration M5.4 : Énergie potentielle électrique

Comme  $\vec{F}_m$  ne travaille pas, on s'intéresse uniquement à  $\vec{F}_e$ . Prenons  $\vec{E} = -E\vec{u}_z$  :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}_{AB}(\vec{F}) &= \vec{F}_e \cdot d\vec{OM} \\ \Leftrightarrow \delta\mathcal{W}_{AB}(\vec{F}) &= -qE\vec{u}_z \cdot (dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) \\ \Leftrightarrow \delta\mathcal{W}_{AB}(\vec{F}) &= -qE dz = -d(qEz) \triangleq -d(\mathcal{E}_{p,e}) \\ \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,e}(z) = qEz + \text{cte}} &\quad \blacksquare\end{aligned}$$

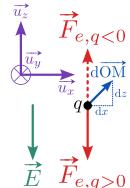


FIGURE M5.7

### I/B) 3 Potentiel électrostatique

#### ♥ Propriété M5.5 : Potentiel électrostatique

Le champ  $\vec{E}$  dérive d'une grandeur scalaire, appelée potentiel électrique, noté  $V$  ; pour  $\vec{E} \parallel \vec{u}_z$  :

$$\begin{aligned}\vec{E} = \pm E\vec{u}_z &\Leftrightarrow \boxed{V(z) = \mp Ez + \text{cte}} \quad \text{tel que} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V(z)) \\ \text{soit} \quad \boxed{V(M) = \frac{\mathcal{E}_{p,e}(M)}{q}} &\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,e}(M) = qV(M)} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} \text{ suit les } V} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Unités

$$\begin{array}{ll}V & \text{en V} \\ \|\vec{E}\| & \text{en } \text{V}\cdot\text{m}^{-1}\end{array}$$

### Démonstration M5.5 : Potentiel électrostatique

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_{p,e}) \Leftrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\mathcal{E}_{p,e}}{q}\right) \quad \text{soit} \quad V(M) = \frac{\mathcal{E}_{p,e}(M)}{q} \quad \blacksquare$$

#### Définition M5.4 : Tension électrique

La tension entre deux points A et B est alors la différence de potentiel entre ces deux points :

$$\boxed{U_{AB} = V(A) - V(B)}$$

#### ♥ Propriété M5.6 : Tension et champ électrique

En appliquant une tension  $U_{AB}$  entre deux grilles A et B, planes parallèles et distantes de  $d$ , on obtient un champ électrique perpendiculaire aux grilles, tel que

$$\boxed{\|\vec{E}\| = \frac{U_{AB}}{d}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\vec{E} \text{ vers les } V} \quad \blacksquare$$

### Démonstration M5.6 : Tension et champ électrique

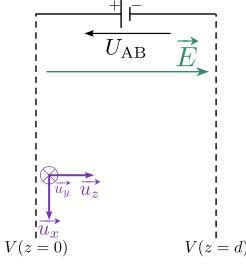


FIGURE M5.8

En négligeant les effets de bord,  $V(M)$  ne dépend que de  $z$ , i.e.  $\frac{\partial V}{\partial y} = 0 = \frac{\partial V}{\partial x}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \Leftrightarrow E\vec{u}_z = -\frac{dV}{dz}\vec{u}_z \\ \Leftrightarrow \int_A^B E dz &= -\int_A^B dV \Leftrightarrow E(z_B - z_A) = V(A) - V(B) \quad \checkmark \cdot \vec{u}_z \text{ et } \int_A^B dz \\ \Leftrightarrow Ed &= U_{AB} \Leftrightarrow E = \frac{U_{AB}}{d} > 0\end{aligned}$$

■

### Important M5.1 : Comparaison $\vec{E}$ et $\vec{g}$

L'impact du champ électrique  $\vec{E}$  est tout à fait similaire à celle du champ de pesanteur  $\vec{g}$  :

	Poids	Force électrique
<b>Champ</b>	$\vec{g}$	$\vec{E}$
<b>Sensibilité</b>	$m$	$q$
<b>Force</b>	$\vec{P} = m\vec{g} = \pm m g \vec{u}_z$	$\vec{F}_e = q\vec{E} = \pm q E \vec{u}_z$
<b>Énergie potentielle</b>	$\mathcal{E}_{p,p}(z) = \mp m g z + \text{cte}$	$\mathcal{E}_{p,e}(z) = \mp q E z + \text{cte} = qV(z)$
<b>Potentiel</b>	$\ll V_p(z) = \mp g z + \text{cte} \gg$	$V(z) = \mp E z + \text{cte}$
<b>Sens des champs</b>	$\vec{g}$ selon $z \searrow$	$\vec{E}$ selon $V \searrow$
<b>Sens des forces</b>	Sens de $\vec{g}$ car $m > 0$	Sens dépend de $q \leq 0$

### Définition M5.5 : Conditions d'étude

On considérera des champs **uniformes** (constants dans l'espace) et **stationnaires** (constants dans le temps).

## II | Mouvement dans un champ électrique (stationnaire et uniforme)

### II/A | Situation générale

#### ♥ Propriété M5.7 : Mouvement général en champ $\vec{E}$

Les équations scalaires du mouvement d'une particule de charge  $q$  dans un champ électrique  $\vec{E}$  sont semblables à celle d'un corps non chargé de masse  $m$  dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$ .

#### ♥ Démonstration M5.7 : Mouvement général en champ $\vec{E}$

1 **Système et référentiel** : {particule} masse  $m$  charge  $q$  dans  $\mathcal{R}_{\text{labo}}$  supposé galiléen.

2 **Repère et repérage** :

◊ **Repère** : cartésien,  $\vec{u}_z \perp$  grilles, avec  $\vec{E} = E \vec{u}_z$  avec  $E = U_{AB}/d$ ;

◊ **Repérage** :  $\vec{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$   
 $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z$   
 $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z$

3 **BDF** :

Poids  $\vec{P}$  négligeable devant  $\vec{F}$

Force électrique  $\vec{F} = q\vec{E} = qE\vec{u}_z$

5 **PFD** :

$$m\vec{a} = \vec{F}_e \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{y}(t) = 0 \\ m\ddot{z}(t) = qE \end{cases}$$

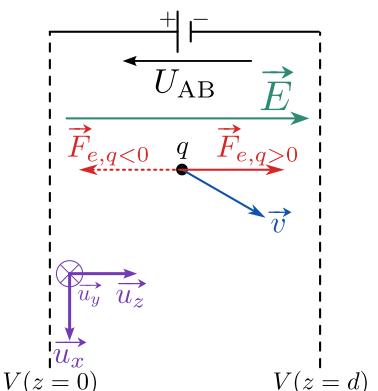


FIGURE M5.9 – 4

■

## II/B Accélération d'une particule chargée

### ♥ Propriété M5.8 : Particule $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}$

Une particule chargée positivement et lâchée depuis A en  $z = 0$  à la vitesse  $\vec{v}_0$  dans le sens d'un champ électrique est accélérée, et sa vitesse finale en B à  $z = d$  s'exprime :

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qU_{AB}}{m}} \Leftrightarrow v_f = \sqrt{v_0^2 - \frac{2\Delta_{AB}\mathcal{E}_{p,e}}{m}}$$

### ♥ Démonstration M5.8 : Particule $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}$

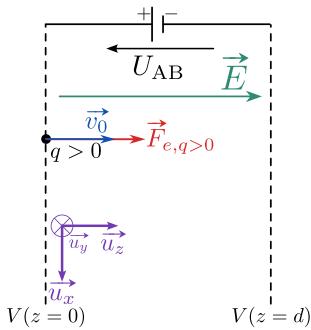


FIGURE M5.10

Comme le système est **conservatif** et qu'on s'intéresse à un **instant précis** du mouvement, il vaut mieux utiliser le **TEM** plutôt que le PFD.

#### ◊ Variation de $\mathcal{E}_m$ :

$$\triangleright \text{En A} : \mathcal{E}_m(A) = \mathcal{E}_c(t_A) + \mathcal{E}_{p,e}(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV(0)$$

$$\triangleright \text{En B} : \mathcal{E}_m(B) = \mathcal{E}_c(t_B) + \mathcal{E}_{p,e}(d) = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV(d)$$

$$\diamond \text{TEM} : \quad \Delta_{AB}\mathcal{E}_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv_f^2 + qV(d) = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV(0)$$

$$\Leftrightarrow v_f^2 = v_0^2 + \frac{2q(V_A - V_B)}{m} \quad \Leftrightarrow \quad v_f = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qU_{AB}}{m}}$$

■

### Remarque M5.1 : Accélération rectiligne

- ◊ En faisant l'application numérique pour un proton de charge  $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$ , de masse  $m = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$  partant de  $v_0 = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et accéléré par  $U = 1 \text{ kV}$ , on trouve  $v_f = 4,4 \times 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 440 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$
- ◊ L'électron-volt est une unité d'énergie, telle que

$$1,602 \times 10^{-19} \text{ J} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V} = e \times 1 \text{ V}$$

C'est **l'énergie cinétique que gagne un électron** (ou un proton) **accéléré par une tension de 1 V**. Dans les accélérateurs de particules modernes, on touche au TeV.

- ◊ Si  $U < 0$  ou  $q < 0$ , on peut **ralentir** la particule chargée. Elle peut même **faire demi-tour** si  $\Delta\mathcal{E}_p > \mathcal{E}_c(0)$ . Dans le cas du champ  $\vec{g}$ , c'est le cas du lancer vertical d'un corps de masse  $m$ .
- ◊ Cette expression est similaire à la chute sans frottement dans le champ  $\vec{g}$ . Avec  $\vec{v}_0 = \vec{0}$  :

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \frac{mg(z_A - z_B)}{m}} = \sqrt{-2 \frac{\Delta_{AB}\mathcal{E}_{p,p}}{m}}$$

## II/C Déviation d'une particule chargée

### ♥ Propriété M5.9 : Déviation particule $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$

Une particule chargée positivement et lancée perpendiculairement à un champ électrique est déviée paraboliquement, et son angle final est proportionnel à la tension.

### ♥ Démonstration M5.9 : Déviation particule $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$

Prenons  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ . On reprend le résultat obtenu dans la situation générale (II/A) et on intègre :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{y}(t) = 0 \quad \text{ignorée} \\ m\ddot{z}(t) = qE = q\frac{U_{AB}}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{z}(t) = \frac{qU_{AB}}{md}t \\ \dot{y}(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ z(t) = \frac{qU_{AB}}{2md}t^2 \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

On trouve alors l'équation de la trajectoire :

$$z(x) = \frac{qU_{AB}}{2mdv_0^2}x^2$$

■

C'est une trajectoire parabolique, en tout point **similaire à la chute libre**.

On peut alors déterminer l'angle de déviation  $\alpha_f$  une fois qu'elle a quitté le champ  $\vec{E}$  :

$$\begin{aligned} x(t_f) = L \Leftrightarrow t_f = \frac{L}{v_0} &\quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x}(t_f) = v(t_f) \cos(\alpha_f) = v_0 \\ \dot{z}(t_f) = v(t_f) \sin(\alpha_f) = \frac{qUL}{mdv_0} \end{cases} \\ \Rightarrow \tan(\alpha_f) = \frac{\dot{z}(t_f)}{\dot{x}(t_f)} \approx \alpha_f &\Leftrightarrow \boxed{\alpha_f = \frac{qUL}{mdv_0^2}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

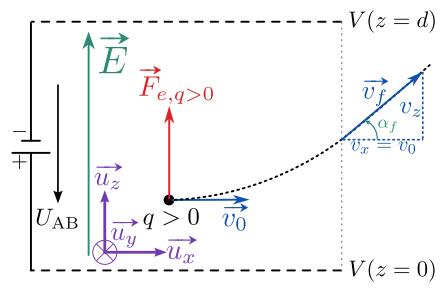


FIGURE M5.11 – Déviation ( $q > 0$ )

#### Exemple M5.2 : Oscilloscope analogique.

Un faisceau d'électrons de vitesse initiale fixée (grâce à un accélérateur linéaire) est dévié par la tension de mesure. Cette déviation est proportionnelle à la tension mesurée. En utilisant un écran fluorescent, on visualise l'impact des électrons et ainsi la tension mesurée en balayant l'écran à une vitesse déterminée par le calibre temporel.

### III | Mouvement dans un champ magnétique (stationnaire et uniforme)

#### III/A Vitesse initiale parallèle au champ $\vec{B}$

##### Propriété M5.10 : Particule $\vec{v}_0 \parallel \vec{B}$

Une particule chargée de vitesse initiale colinéaire au champ magnétique a un mouvement rectiligne uniforme.

##### Démonstration M5.10 : Particule $\vec{v}_0 \parallel \vec{B}$

$$\vec{B} \parallel \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{F}_m(0) = q(\vec{v}_0 \wedge \vec{B}) = \vec{0} \Leftrightarrow m\vec{a}(0) = \vec{0} \quad \blacksquare$$

Ainsi, aucune action ne s'exerce sur la particule à  $t = 0$ , donc elle conserve son vecteur vitesse.

#### III/B Vitesse initiale perpendiculaire au champ $\vec{B}$

##### Propriété M5.11 : Trajectoire $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ par FRENET

Une particule chargée dans un champ  $\vec{B}$  perpendiculaire à sa vitesse initiale  $\vec{v}_0$  décrit un cercle, de rayon cyclotron  $R_c = \frac{mv_0}{|q|\vec{B}|}$ .

##### Démonstration M5.11 : Trajectoire $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ par FRENET

1 Système et référentiel : {particule} masse  $m$  charge  $q$  dans  $\mathcal{R}_{\text{labo}}$  supposé galiléen.

2 Repère et repérage :

◊ Repère :  $(M(t), \vec{u}_T, \vec{u}_N)$  avec  $\vec{B} = B\vec{u}_z$  avec  $\vec{B} \perp \vec{v}_0$

◊ Repérage :

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}_T$$

$$\vec{a}(t) = \dot{v}(t)\vec{u}_T + \frac{v^2(t)}{R(t)}\vec{u}_N$$

$$\text{Or, } \mathcal{P}(\vec{F}_m) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_c(t) = \text{cte}$$

$$\text{Donc } \vec{v}(t) = v_0\vec{u}_T \quad \text{et} \quad \vec{a}(t) = \frac{v_0^2}{R(t)}\vec{u}_N$$

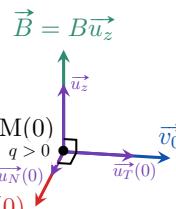


FIGURE M5.12 – 4

3 BDF :

$$\vec{F}_m = q(\vec{v}(t) \wedge \vec{B}) = qBv_0(\vec{u}_T \wedge \vec{u}_z)$$

5 PFD :

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}_m \Leftrightarrow \frac{mv_0^2}{R(t)}\vec{u}_N = qB(\vec{u}_T \wedge \vec{u}_z) \Leftrightarrow \frac{mv_0^2}{R(t)}\vec{u}_N = qB(\vec{u}_T \wedge \vec{u}_z)$$

### Planéité

$$\vec{u}_N = \vec{u}_T \wedge \vec{u}_z \quad \text{soit} \quad \vec{u}_N \wedge \vec{u}_z \quad \forall t$$

Or,  $\vec{u}_T \perp \vec{u}_N$  donc  $\vec{u}_T \perp \vec{u}_z \quad \forall t$  ■

Autrement dit,  $(\vec{u}_T(0), \vec{u}_N(0))$  donne le plan de la trajectoire  $\forall t$  : **la trajectoire de  $M(t)$  s'effectue dans le plan constant perpendiculaire à  $\vec{B}$ !**

### Circularité

En reprenant le PFD en norme, on a

$$\frac{mv_0}{R(t)} = |q|B \Leftrightarrow R(t) = R_c = \frac{mv_0}{|q|B}$$

La trajectoire est donc un  **cercle** de rayon constant  $R_c$ .

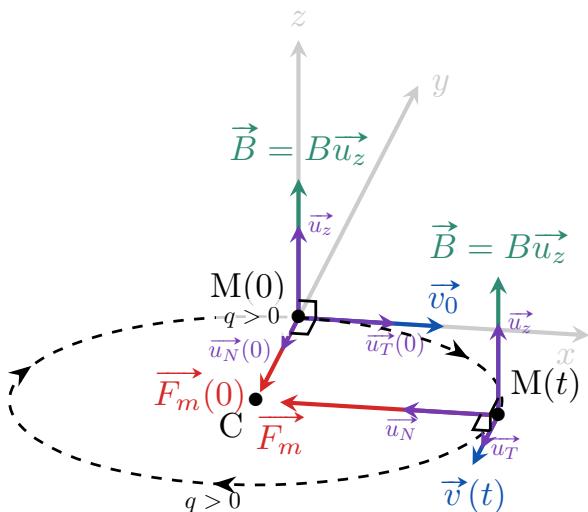


FIGURE M5.13 – Trajectoire pour  $q > 0$

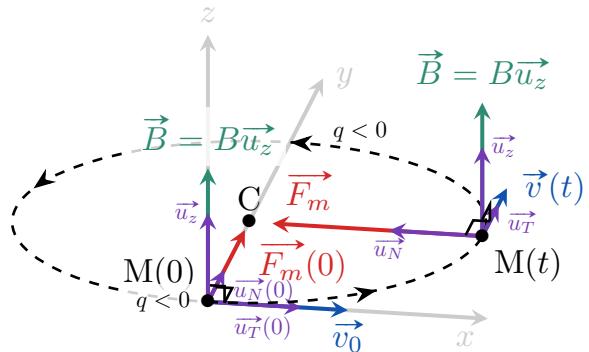


FIGURE M5.14 – Trajectoire pour  $q < 0$

### III/B) 1 Solution horaire

#### ♥ Propriété M5.12 : Mouvement $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ en cartésiennes

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ  $\vec{B} \perp \vec{v}_0$  est un cercle,

de rayon cyclotron  $R_c = \frac{mv_0}{qB}$  parcouru à la pulsation cyclotron  $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$  tel que  $R_c = \frac{v_0}{\omega_c}$

#### ♥ Démonstration M5.12 : Mouvement $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ en cartésiennes

**1 Système et référentiel :** {particule} masse  $m$  charge  $q$  dans  $\mathcal{R}_{\text{labo}}$  supposé galiléen.

**2 Repère et repérage :**

◊ **Repère :**  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  avec  $\vec{B} = Bu_z$

◊ **Repérage :**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}(t) &= x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z \\ \vec{v}(t) &= \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z \\ \vec{a}(t) &= \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z\end{aligned}$$

◊ **Conditions initiales :**  $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$  et  $\vec{v}(0) = v_0\vec{u}_x$

**3 BDF :**

$$\begin{aligned}\vec{F}_m &= q(\vec{v}(t) \wedge \vec{B}) = qB(\dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z) \wedge \vec{u}_z \\ &\Leftrightarrow \vec{F}_m = qB\dot{y}(t)\vec{u}_x - qB\dot{x}(t)\vec{u}_y\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F}_m = qB\dot{y}(t)\vec{u}_x - qB\dot{x}(t)\vec{u}_y}$$

**5 PFD :**

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}_m \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x}(t) = qB\dot{y}(t) \\ m\ddot{y}(t) = -qB\dot{x}(t) \\ m\ddot{z}(t) = 0 \Rightarrow \dot{z}(t) = \text{cte} = 0 \end{cases} \text{ ignoré}$$

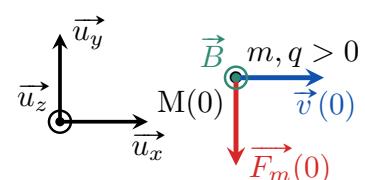


FIGURE M5.15 – 4

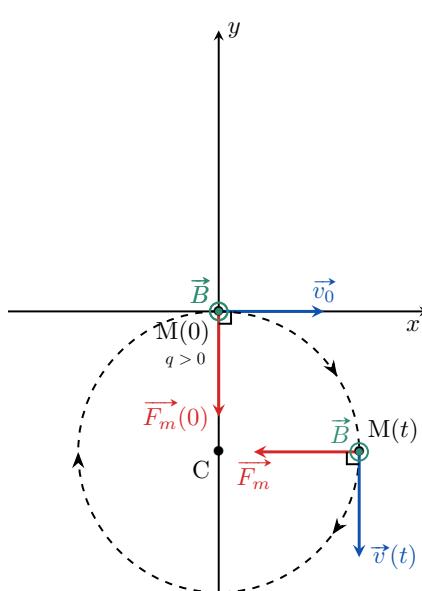
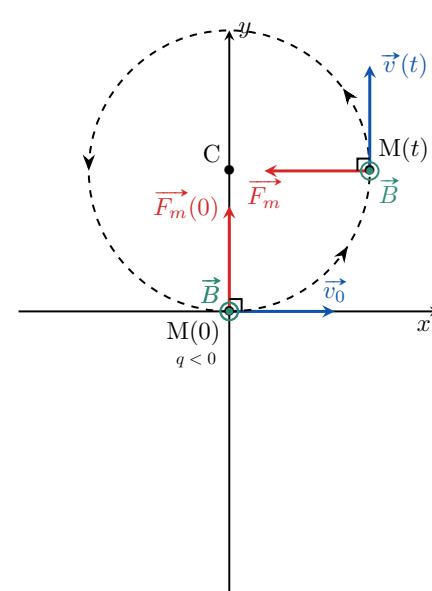
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = \frac{qB}{m} (y(t) - y(0)) \\ \dot{y}(t) - \dot{y}(0) = -\frac{qB}{m} (x(t) - x(0)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 + \frac{qB}{m} (y(t)) \\ \dot{y}(t) = -\frac{qB}{m} (x(t)) \end{cases}$$

**Trajectoire**

$$\mathcal{P}(\vec{F}_m) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_c(t) = \mathcal{E}_{c,0} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m (\dot{y}^2(t) + \dot{x}^2(t)) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Leftrightarrow \left( -\frac{qB}{m} x(t) \right)^2 + \left( \frac{qB}{m} y(t) + v_0 \right)^2 = v_0^2 \Leftrightarrow (x(t))^2 + \left( y(t) + \frac{mv_0}{qB} \right)^2 = \left( \frac{mv_0}{qB} \right)^2$$

c'est un  **cercle**, de rayon  $R_c = \frac{v_0 m}{|q| B}$  de centre C  $\begin{cases} (0, -R_c) & \text{si } q > 0 \\ (0, R_c) & \text{si } q < 0 \end{cases}$

FIGURE M5.16 – Trajectoire pour  $q > 0$ FIGURE M5.17 – Trajectoire pour  $q < 0$ **Équations différentielles**

En repartant du PFD et en procédant par substitution,

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{qB}{m} \dot{y}(t) = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 x(t) \\ \ddot{y}(t) = -\frac{qB}{m} \dot{x}(t) = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 y(t) - \frac{qB}{m v_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\ddot{x}(t) + \omega_c^2 x(t) = 0} \\ \boxed{\ddot{y}(t) + \omega_c^2 y(t) = \omega_c^2 (\pm R_c)} \end{cases}$$

Ce sont des **oscillateurs harmoniques**, de pulsation propre  $\omega_c = \frac{|q| B}{m} \Leftrightarrow R_c = \frac{v_0}{\omega_c}$

**Équations horaires**

Solution générale  $x(t) = x_h(t)$  :

$$x(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t)$$

Et avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} x(0) &= A \quad \text{or} \quad x(0) = 0 \quad \text{donc} \quad A = 0 \\ \dot{x}(0) &= \omega_c B \quad \text{or} \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad \text{donc} \quad B = \frac{v_0}{\omega_c} \\ \Rightarrow [x(t) = R_c \sin(\omega_c t)] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Solution générale  $y(t) = y_h(t) + y_p$  :

$$y(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t) \pm R_c$$

Et avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} y(0) &= A \pm R_c \quad \text{or} \quad y(0) = 0 \quad \text{donc} \quad A = \mp R_c \\ \dot{y}(0) &= \omega_c B \quad \text{or} \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \text{donc} \quad B = 0 \\ \Rightarrow [y(t) = \pm R_c (1 - \cos(\omega_c t))] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Remarque M5.2 : Cas général $\vec{v}_0$ dans $\vec{B}$

Soit  $\vec{v}_0 = v_{0,x}\vec{u}_x + v_{0,z}\vec{u}_z$ . Les équations découpent le mouvement dans le plan  $xy$  et selon  $z$  :

- ◊ Sur  $z$  on garde une vitesse constante :  $v_z(t) = v_{0,z}$  ;
- ◊ Pour les composantes sur  $x$  et  $y$ , on a  $v_x(t)^2 + v_y(t)^2 = v_{0,x}^2$  et les mêmes équations différentielles : le mouvement est un cercle de rayon  $R = \frac{v_{0,x}}{\omega_c}$ .

Ainsi, la trajectoire est la superposition d'une rotation circulaire uniforme autour de ( $Oz$ ) et d'une translation le long de cet axe : c'est un **mouvement hélicoïdal**. Une animation est disponible [en ligne](#).

## III/C Applications

- ◊ **Spectromètre de masse.** Un spectromètre de masse permet de **mesurer la masse d'atomes**, et éventuellement de déterminer les abondances isotopiques (utilisable par exemple pour la datation). Le principe est le suivant :

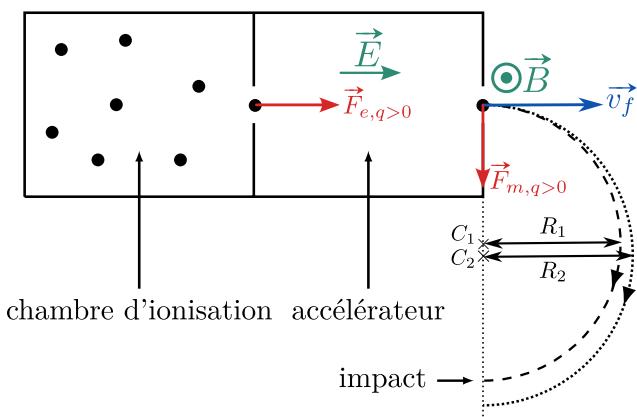


FIGURE M5.18 – Fonctionnement d'un spectromètre

- ▷ Des atomes sont ionisés dans une chambre d'ionisation ;
- ▷ Les particules sont accélérées par un champ électrique, pour les amener à une vitesse  $v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$  ;
- ▷ Un champ magnétique courbe ensuite leur trajectoire, avec un rayon

$$R_c = \frac{mv_f}{qB} = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \frac{m}{qB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2U}{q}} \sqrt{m}$$

Ainsi, la donnée de la distance d'impact permet de retrouver la masse des particules !

- ◊ **Le cyclotron.** Il est constitué de deux demi-cylindres dans lequel règne un champ magnétique. Entre les deux demi-cylindres, deux électrodes imposent un champ électrique.

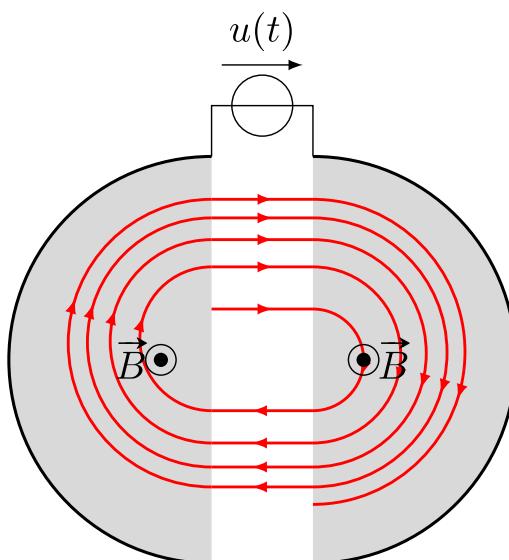


FIGURE M5.19 – Fonctionnement d'un cyclotron

- ▷ La particule chargée est accélérée dans l'espace entre les cylindres ;
- ▷ Elle fait demi-tour grâce à un champ magnétique qui la fait revenir dans la zone entre-deux ;
- ▷ Avec un courant alternatif bien réglé, la tension accélère de nouveau la particule ;
- ▷ Le champ magnétique la fait revenir, et ainsi de suite.

À chaque demi-tour, l'énergie cinétique croît de  $|qU|$ . La vitesse croît donc comme la racine carré du nombre de passages dans l'espace entre les cylindres.

Le rayon de courbure est proportionnel à la vitesse de la particule : la sélection de ce rayon permet la sélection de l'énergie cinétique voulue. Voir l'animation [en ligne](#).