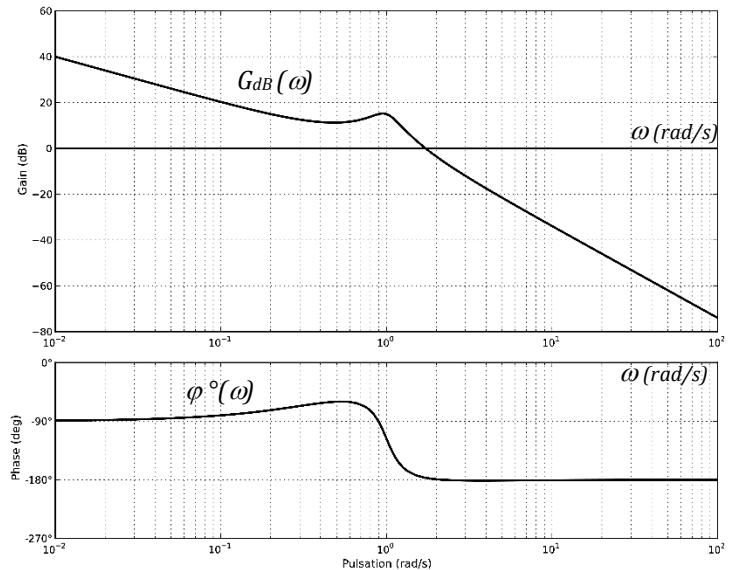
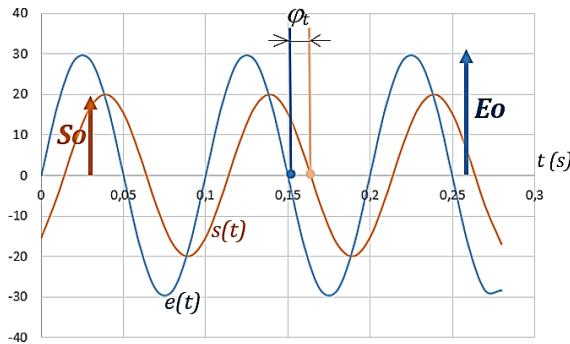


# ASSERVISSEMENT DES SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS

## PARTIE 3 : ANALYSE FREQUENTIELLE

## COURS



## Table des matières

1. LIMITÉ DU COURS.....	4
2. POSITION DU PROBLEME .....	4
3. REPONSE D'UN SLCI A UNE SOLICITATION HARMONIQUE .....	5
3.1. Cas du premier ordre .....	5
3.2. Généralisation pour une fonction de transfert quelconque .....	7
3.3. Passage dans le domaine complexe .....	7
4. LIEU FREQUENTIEL DE BODE.....	9
4.1. L'échelle logarithmique : éclaircissement.....	10
4.2. Le gain et la phase.....	10
4.2.1. Le gain en dB.....	10
4.2.2. La phase.....	11
4.2.3. Intérêt pratique du gain en dB et de la phase .....	11
4.2.4. Eclairage : qu'est-ce que le décibel ?.....	11
5. LIEU FREQUENTIEL DE BODE DES 4 SYSTEMES FONDAMENTAUX.....	13
5.1. Réponse harmonique d'un système à action proportionnelle .....	13
5.1.1. Transmittance du système en régime harmonique .....	13
5.1.2. Calculs du gain et de la phase.....	13
5.1.3. Diagrammes de Bode .....	13
5.2. Réponse harmonique d'un système intégrateur.....	14
5.2.1. Transmittance du système en régime harmonique .....	14
5.2.2. Calcul du gain et de la phase.....	14
5.2.3. Diagrammes de Bode gain et phase .....	14
5.3. Réponse harmonique d'un système du premier ordre (de classe 0) .....	15
5.3.1. Transmittance du système en régime harmonique .....	15
5.3.2. Calcul du gain et de la phase.....	15
5.3.3. Diagrammes de Bode gain et phase .....	16
5.3.4. Conséquences, remarques .....	16
5.4. Réponse harmonique d'un système du deuxième ordre (de classe 0) .....	17
5.4.1. Transmittance en régime harmonique.....	17
5.4.2. Calcul général du gain et de la phase commune aux trois régimes de fonctionnement .....	17
5.4.3. Caractéristiques communes aux trois régimes .....	18
5.4.4. Cas du régime apériodique (sur amorti) : $\xi > 1$ .....	18

5.4.5.	Cas du régime pseudo périodique (sous amorti) : $\xi < 1$ .....	19
5.4.6.	Bandé passante d'un système du deuxième ordre .....	21
5.5.	Synthèse des différentes pulsations .....	22
6.	GENERALISATION : REPONSE HARMONIQUE D'UN SYSTEME QUELCONQUE.....	23
7.	RETOUR SUR LES PERFORMANCES DES SLCI : POINT DE VUE FREQUENTIEL .....	27
7.1.	Stabilité d'un système bouclé : marges de stabilité.....	27
7.1.1.	Critère du Revers .....	27
7.1.2.	Marges de stabilité .....	28
7.2.	Rapidité : bande passante .....	30

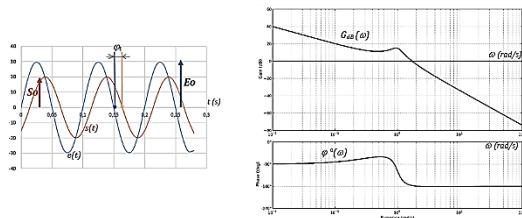


Illustration de la première de couverture  
 Excitation harmonique d'un système linéaire :  
 points de vue temporel et fréquentiel

## 1. LIMITÉ DU COURS

Ce cours se limite à l'analyse fréquentielle des systèmes :

- Proportionnel
- Intégrateur
- Du premier ordre de classe zéro
- Du second ordre de classe zéro

## 2. POSITION DU PROBLÈME

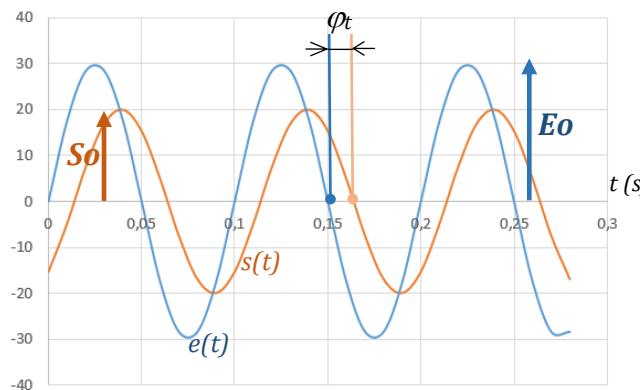
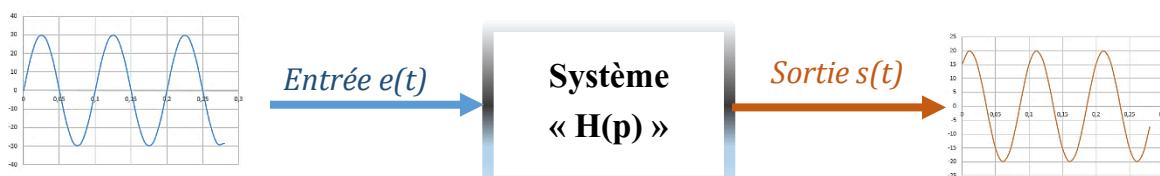
Quand on sollicite un système linéaire avec un signal d'entrée harmonique  $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$ , quand le régime permanent est atteint la sortie  $s(t)$  possède les caractéristiques suivantes :

- Le signal de sortie  $s(t)$  reste harmonique
- La fréquence, la pulsation, la période sont conservées :  $\omega_{\text{sortie}} = \omega_{\text{entrée}} = \omega$
- L'amplitude de  $s(t)$ , nommée  $S_0$ , est très souvent différente de celle de  $e(t)$ ,  $E_0$ .
- Les deux signaux peuvent être déphasés. Cela signifie que leurs extrêmes ne sont pas atteints au même instant.

On note ainsi la sortie :  $s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Grandeurs, unités :

- $e(t)$ ,  $E_0$ ,  $s(t)$ ,  $S_0$ , dépendent du système
- $\omega$  est la pulsation du signal en rad/s. On utilise aussi la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  (Hz), ou la période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  (s).
- $\varphi$  est le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée en radians. Si  $\varphi_t$  est le déphasage temporel en  $s$ , le déphasage est  $\varphi$  en radians est :  $\varphi = \varphi_t \cdot \frac{2\pi}{T}$ .



Il s'agira donc de connaître les caractéristiques du signal de sortie. La pulsation  $\omega$  étant imposée par le signal d'entrée, il faut donc chercher :

- L'amplitude  $S_0$  donc le gain du système,  $\frac{S_0}{E_0}$
- Le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée,  $\varphi$

Ce qui est remarquable c'est que gain et déphasage dépendent de la pulsation (et des caractéristiques intrinsèques constantes du système).

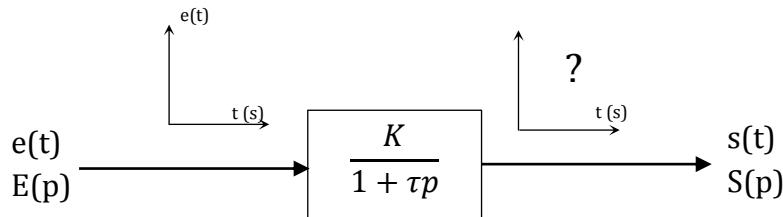
Dans une analyse fréquentielle, le point de vue change par rapport à l'analyse temporelle. Alors que la grandeur « d'entrée » était le temps  $t$  pour une analyse temporelle, la grandeur variable d'entrée devient la pulsation  $\omega$  pour une étude fréquentielle.

La question à laquelle répondait une analyse temporelle était : « comment évolue la sortie au cours du temps, pour un signal d'entrée de forme donnée ».

La question à laquelle répond une analyse fréquentielle harmonique est : « comment évolue la sortie en fonction de la fréquence, pour une loi d'entrée harmonique ».

### 3. REPONSE D'UN SLCI A UNE SOLICITATION HARMONIQUE

#### 3.1. Cas du premier ordre



Pour un modèle premier ordre la fonction de transfert  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  est telle que :

$$S(p) = \frac{K}{1+\tau.p} \cdot E(p)$$

L'entrée harmonique est :

$$e(t) = E_0 \sin \omega t \xrightarrow{L} E(p) = \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

La sortie est donc :

$$S(p) = \dots \text{dont il faut trouver la fonction temporelle } s(t).$$

Déterminons d'abord la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{(1+\tau.p)(p^2+\omega^2)}$  qui s'écrit :

$$\frac{1}{(1+\tau.p)(p^2+\omega^2)} = \frac{A}{1+\tau.p} + \frac{Bp+C}{p^2+\omega^2} \quad \text{avec } A, B, C \text{ constantes réelles à déterminer.}$$

Après calcul on trouve :

$$A = \frac{\tau^2}{1+\tau^2\omega^2}$$

$$B = \frac{-\tau}{1+\tau^2\omega^2}$$

$$C = \frac{1}{1+\tau^2\omega^2}$$

D'où la D.E.S. :

$$\frac{1}{(1+\tau.p)(p^2+\omega^2)} = \frac{\tau^2}{1+\tau^2\omega^2} \cdot \frac{1}{1+\tau.p} + \frac{-\tau}{1+\tau^2\omega^2} \cdot \frac{p}{p^2+\omega^2} + \frac{1}{1+\tau^2\omega^2} \cdot \frac{1}{p^2+\omega^2}$$

Le retour dans le passage temporel donne :

$$\frac{1}{1+\tau.p} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$\frac{p}{p^2+\omega^2} \xrightarrow{L^{-1}} \cos \omega t$$

$$\frac{1}{p^2+\omega^2} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{\omega} \sin \omega t$$

D'où la sortie  $s(t)$  :

$$\frac{s(t)}{KE_0\omega} = \frac{\tau^2}{1+\tau^2\omega^2} \cdot \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{-\tau}{1+\tau^2\omega^2} \cdot \cos \omega t + \frac{1}{1+\tau^2\omega^2} \cdot \frac{1}{\omega} \sin \omega t$$

$$s(t) = \underbrace{\frac{KE_0\omega\tau}{1+\tau^2\omega^2} e^{-t/\tau}}_{s_{tran}(t)} + \underbrace{\frac{KE_0}{1+\tau^2\omega^2} [-\tau\omega \cos \omega t + \sin \omega t]}_{s_{per}(t)}$$

$$s(t) = s_{tran}(t) + s_{per}(t)$$

$s_{tran}(t)$  est la partie **transitoire** de la sortie avec  $\lim_{t \rightarrow \infty} s_{tran}(t) = 0$ .

$s_{per}(t)$  est la partie **permanente** de la sortie.

Or en quelques constantes de temps,  $s_{tran}(t) \ll s_{per}(t)$  donc  $s(t) \approx s_{per}(t)$ .

Donc seul le régime **permanent** nous intéresse, le régime **transitoire** devenant vite négligeable.

$$s(t) \approx s_{per}(t) = \frac{KE_0}{1+\tau^2\omega^2} [-\tau\omega \cos \omega t + \sin \omega t]$$

$$s_{per}(t) = \frac{KE_0\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}{1+\tau^2\omega^2} \left[ \frac{-\tau\omega}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}} \cos \omega t + \frac{1}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}} \sin \omega t \right]$$

Posons  $\varphi$  tel que :

$$\sin \varphi = \frac{-\tau\omega}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}$$

$$s_{per}(t) = \frac{KE_0\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}{1+\tau^2\omega^2} [\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t]$$

$$s_{per}(t) = \frac{KE_0}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}} [\sin(\omega t + \varphi)]$$

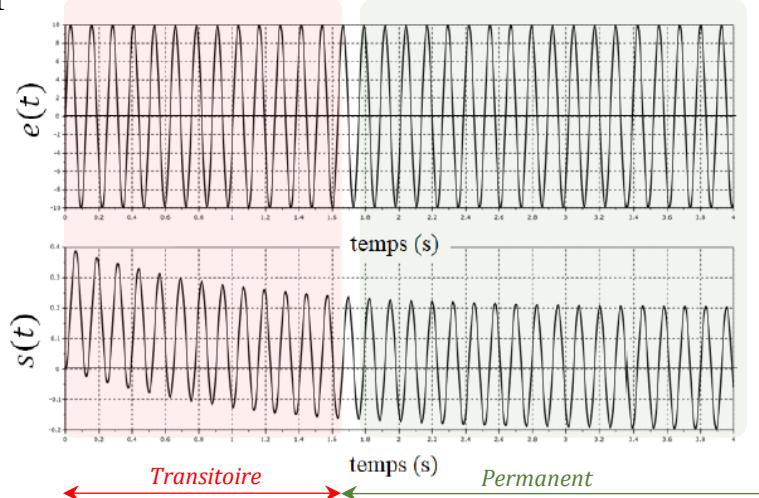


Illustration de la réponse harmonique d'un SLCI : régimes transitoire et permanent

Conclusion :

En régime permanent la réponse d'un système du premier ordre à une sollicitation harmonique est telle que :

- La sortie est, elle aussi, harmonique (sinus)
- La pulsation  $\omega$  est inchangée
- L'amplitude est différente, voire diminuée pour un premier ordre ( $KE_0 \rightarrow \frac{KE_0}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}$ ), et dépend de la pulsation
- La sortie est déphasée en retard par rapport à l'entrée, de l'angle  $\varphi$  tel que  $\tan \varphi = -\tau\omega$ , et dépend de la pulsation

### 3.2. Généralisation pour une fonction de transfert quelconque

Pour une fonction de transfert quelconque le calcul est similaire au cas particulier précédent.

Il s'agit de chercher la sortie  $s(t)$  pour une fonction écrite dans le domaine symbolique :

$$S(p) = H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1+a_1p+\dots+a_mp^m}{1+b_1p+\dots+b_np^n} \cdot \frac{E_0\omega}{p^2+\omega^2}$$

Il faut commencer par décomposer en élément simple la fraction rationnelle généralisée :  $\frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{1+a_1p+\dots+a_mp^m}{1+b_1p+\dots+b_np^n} \cdot \frac{1}{p^2+\omega^2}$  puis revenir dans le domaine temporel.

On montre après un long calcul que la solution temporelle est du même type que la solution trouvée pour un premier ordre.

C'est-à-dire :

- La sortie  $s(t)$  est la somme d'une fonction transitoire  $s_{tran}(t)$  et permanente  $s_{per}(t)$  :  $s(t) = s_{tran}(t) + s_{per}(t)$  avec  $\lim_{t \rightarrow \infty} s_{tran}(t) = 0$
- $s_{tran}(t)$  devient très vite négligeable devant  $s_{per}(t)$
- $s_{per}(t)$  est de type harmonique de même pulsation que l'entrée
- L'amplitude est différente et dépend de la pulsation
- La phase est différente et dépend de la pulsation

### 3.3. Passage dans le domaine complexe

Nous allons montrer dans ce paragraphe que le remplacement, dans une fonction de transfert  $H(p)$ , de  $p$  par  $j\omega$  permet de déterminer aisément le déphasage et l'amplitude du signal de sortie en régime permanent dans le cas d'un signal harmonique en entrée. Le calcul qui suit est donc purement mathématique.

Convertissons l'entrée et la sortie en nombre complexe par remplacement de  $p$  par  $j\omega$  :

$$\begin{aligned} e(t) &= E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) & \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{e}(t) &= E_0 \cdot e^{j\omega t} \\ s(t) &= S_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) & \xrightarrow{\mathbb{C}} \underline{s}(t) &= S_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \end{aligned}$$

Le rapport « sortie sur entrée » complexe est donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} =$$

Déduisons l'équation différentielle du système linéaire dans le domaine complexe :

$$a_0.s(t) + a_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + \dots + a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0.e(t) + b_1 \cdot \frac{de(t)}{dt} + \dots + b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

$\rightarrow \mathbb{C} \rightarrow$

On obtient :

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{\underline{S}(t)}{\underline{E}(t)} = \frac{S_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}}{E_0 \cdot e^{j\omega t}} = \frac{S_0 \cdot e^{j(\varphi)}}{E_0} = \frac{b_0 + b_1 \cdot (j\omega) + b_2 \cdot (j\omega)^2 + \dots + b_m \cdot (j\omega)^m}{a_0 + a_1 \cdot (j\omega) + a_2 \cdot (j\omega)^2 + \dots + a_n \cdot (j\omega)^n}$$

$$\text{Conclusion : } H(j\omega) = \frac{S_0}{E_0} \cdot e^{j\varphi} = \frac{b_0 + b_1 \cdot (j\omega) + b_2 \cdot (j\omega)^2 + \dots + b_m \cdot (j\omega)^m}{a_0 + a_1 \cdot (j\omega) + a_2 \cdot (j\omega)^2 + \dots + a_n \cdot (j\omega)^n}$$

Pour obtenir le gain  $\frac{S_0}{E_0}$ , il suffit de calculer le module de la fonction de transfert dans laquelle on a remplacé  $p$  par  $j\omega$  :  $\frac{S_0}{E_0} = |H(j\omega)|$

Pour obtenir la phase  $\varphi$  il suffit de calculer l'argument de la fonction de transfert  $H(j\omega)$  :  $\varphi = \text{Arg}[H(j\omega)]$

Il conviendra donc pour trouver la réponse harmonique d'un système linéaire en régime permanent, d'utiliser la méthode du remplacement de  $p$  par  $j\omega$ , même si  $p$  n'est pas égal à  $j\omega$ , mais une variable complexe quelconque comme vu lors de la définition de la transformée de Laplace.

☞ Je me teste... et c'est pas si compliqué !

Soit la fonction de transfert  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{4}{1+0,2p}$ .

L'entrée est harmonique :  $e(t) = 3 \sin 2t$  (pulsation  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ )

L'objectif est de trouver la réponse  $s(t)$ .

- Ecrire  $H(j\omega)$ .
- Déduire  $|H(j\omega)|$  et  $\text{arg}[H(j\omega)]$ .
- Faire l'application numérique pour  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  :  $|H(2j)|$  et  $\text{arg}[H(2j)]$  ?
- Déduire la sortie  $s(t)$ .
- Tracer sur un même graphique  $e(t)$  et  $s(t)$ . Remarquez le déphasage du signal. Le signal de sortie est-il en avance ou en retard par rapport au signal d'entrée ?
- Refaire les calculs pour une pulsation  $\omega = 30 \text{ rad/s}$ . Tracez. Observez la différence avec la pulsation précédente.

## 4. LIEU FREQUENTIEL DE BODE

L'étude de la réponse fréquentielle d'un SLCI se traduit par le calcul de l'amplitude et de la phase du signal de sortie en fonction de la pulsation du signal d'entrée.

Le tracé de ces deux fonctions de  $\omega$  est appelé lieu fréquentiel de Bode.

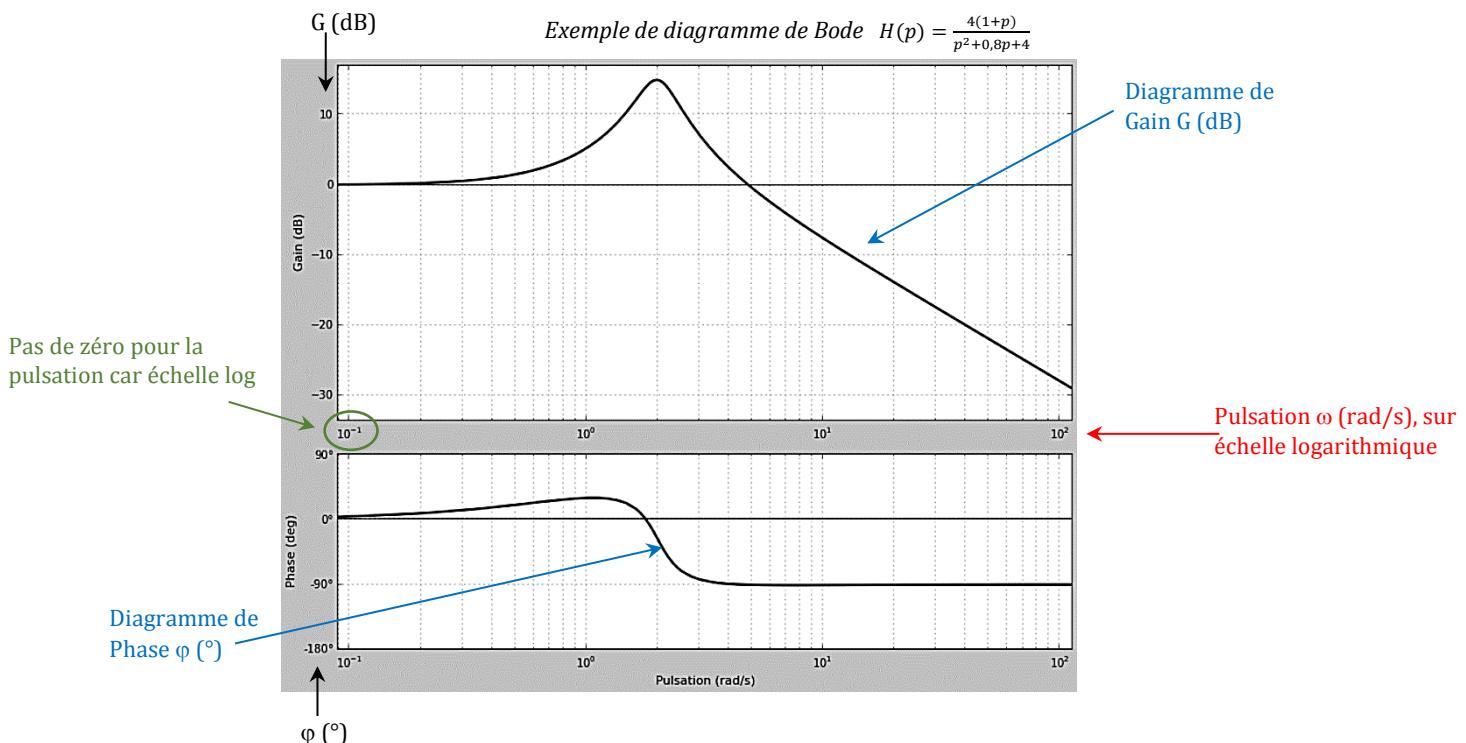
### Description du lieu de Bode

Le lieu fréquentiel de Bode est constitué de deux diagrammes.

L'axe des abscisses de ces deux diagrammes a pour grandeur physique la pulsation  $\omega$  (rad/s), représentée en échelle logarithmique base 10 :  $\log_{10}(\omega)$ . L'axe des ordonnées est linéaire décimal.

Les deux diagrammes sont :

- Un diagramme de gain, dont la grandeur de l'axe des ordonnées est le gain en dB (décibel)
- Un diagramme de phase, dont la grandeur de l'axe des ordonnées est la phase en ° ou rad. En sciences de l'ingénieur nous utilisons plutôt le °.

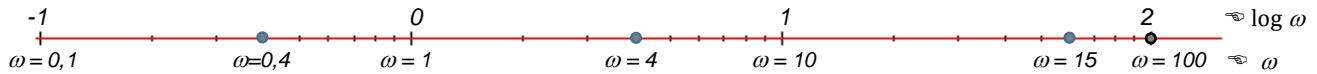


☞ Remarque 1 : le terme de phase est abusif mais nous l'employons souvent. Il s'agit en fait du déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

⚠ Remarque 2 : Vous remarquez donc, en raison du logarithme, que la pulsation ne peut pas être... nulle ! Ce qui semble normal pour une étude fréquentielle. En revanche, elle peut être aussi petite que l'on veut (et positive !).

#### 4.1. L'échelle logarithmique : éclaircissement

Cette échelle est linéaire en  $\log \omega$ , mais on inscrit la valeur de  $\omega$ , pas la valeur du  $\log \omega$  !



Un intervalle est appelé **décade** quand  $\omega$  est multiplié par 10 : [1 ; 10] ou [3 ; 30] par exemple. L'intervalle logarithmique vaut alors 1.

Un intervalle est appelé **octave** quand  $\omega$  est multiplié par 2 : [0,1 ; 0,2] ou [3 ; 6] par exemple. L'écart logarithmique vaut alors 0,3. Le vocabulaire **octave** est emprunté à la gamme musicale occidentale comptant sept notes. La fréquence du signal acoustique est multipliée par deux entre deux mêmes notes de gammes consécutives (huit notes et sept intervalles donc).

##### Intérêt de l'échelle logarithmique.

L'échelle logarithmique en abscisse permet de représenter une large plage de fréquence en augmentant la lisibilité des petites valeurs (basses fréquences) dans chaque décade. Cette échelle effectue donc un zoom sur les basses fréquences tout en contractant les hautes fréquences à l'intérieur de chaque décade. D'un point de vue global elle permet en même temps d'étudier une large plage de fréquence.

Grâce à l'échelle log, on a donc une précision d'étude élevée :

- quelle que soit la fréquence d'un point de vue global
- en basse fréquence sur chaque décade

Comme l'ordonnée est le gain exprimé en décibel (voir ci-après) et que le décibel est une fonction logarithme, l'échelle logarithmique en abscisse va permettre des représentations asymptotiques linéaires, impossibles si l'échelle avait été « proportionnelle ».

#### 4.2. Le gain et la phase

##### 4.2.1. Le gain en dB

Le gain est exprimé en décibel (dB) :  $G_{dB} = 20 \cdot \log |H(j\omega)|$

$H(j\omega)$  est la fonction de transfert du système en régime harmonique.

$|H(j\omega)|$  est le module du nombre complexe  $H(j\omega)$ .

Il suffira donc de remplacer la variable symbolique  $p$  par  $j\omega$  dans la fonction de transfert  $H(p)$ , tel que  $j^2 = -1$ .

⚠ Remarque : la dimension de  $p$  est  $[T]^{-1}$ ... comme  $j\omega$ .

#### 4.2.2. La phase

La phase est définie de la manière suivante :  $\varphi = \arg[H(j\omega)]$ , en degré (préféré au radian en SII).

$\arg[H(j\omega)]$  est l'argument du nombre complexe  $H(j\omega)$ .

#### 4.2.3. Intérêt pratique du gain en dB et de la phase

Les modules et les arguments s'ajoutent quand les fonctions de transfert se multiplient. Si on a deux composants (1) et (2) en série,  $H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$  :

##### Addition des modules (gains en dB)

$$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log [|H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)|] = 20 \log |H_1(j\omega)| + 20 \log |H_2(j\omega)| \\ = G_{dB1} + G_{dB2}$$

##### Addition des arguments (phase)

$$\varphi = \arg[H(j\omega)] = \arg[H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)] = \arg[H_1(j\omega)] + \arg[H_2(j\omega)] = \varphi_1 + \varphi_2$$

#### Conclusion

Pour une fonction de transfert  $H(p)$  qui est le produit de fonctions de transfert plus simples,  $H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdots H_n(p)$ , on étudiera le gain et la phase de chacune des FT  $H_i(p)$  et on additionnera les graphiques.

#### 4.2.4. Eclairage : qu'est-ce que le décibel ?

Le décibel, ou déciBel, 1/10<sup>ème</sup> du Bel, n'est pas une unité. C'est une grandeur d'évaluation adimensionnelle. Explications ...

Au départ, le **Bel** (un hommage, semble-t-il, à Graham Bell physicien et ingénieur à qui on doit l'invention du téléphone), est le logarithme du rapport de deux puissances :

$$G_{Bel} = \log (Ps/Pe).$$

Le Bel étant une grandeur trop faible, donc insuffisamment précise pour nos études usuelles, on utilise le décibel qui multiplie par 10 le gain en Bel, et supprime une décimale inutile :

$$G_{dB} = 10 \cdot G_{Bel} = 10 \cdot \log (Ps/Pe).$$

Quand la puissance est multipliée par 10 (amplification), le gain est +10 dB.

Quand le rapport des puissances est 100 le gain est +20 dB.

Quand la puissance du signal est divisée par 100 (atténuation) le gain est -20 dB, etc.

Notez au passage que l'opération multiplicative est convertie en opération additive.

Le passage à l'échelle logarithmique est justifié par, entre autres, deux raisons :

- Une raison pratique similaire à l'utilisation de l'échelle logarithmique vue plus haut : la gamme de puissance balayée est souvent large en traitement du signal. Si la puissance s'étend de 0.001 W à 1000 W, (rapport  $10^6$ ), passer en dB permet une étude d'amplitude 60 dB !

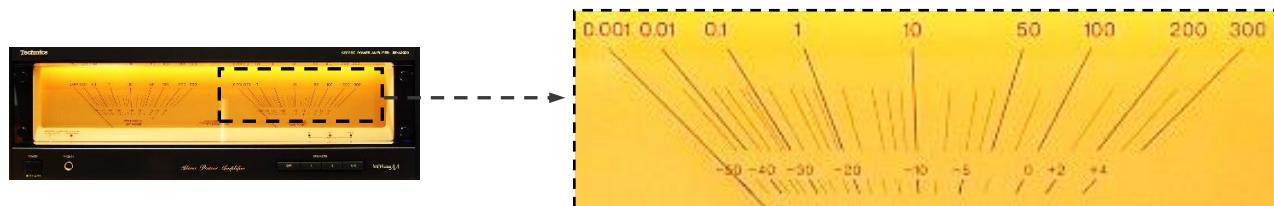
- Une raison physiologique emprunté notamment à l'acoustique : nos sensations physiques ressenties varient peu lorsque la grandeur extérieure provoquant la stimulation varie beaucoup. On dit encore que la sensation ressentie varie comme le logarithme de l'excitation (loi de Weber-Fechner). Nous percevons donc les sollicitations au niveau de nos sens de manière logarithmique. Cela est bien connu en acoustique mais est aussi vrai pour les autres sens. Des modèles avancent même une perception logarithmique de l'écoulement du temps.

Alors... pourquoi **20.log()** en sciences de l'ingénieur et en physique, au lieu de **10.log()** ? D'une manière générale, dans les systèmes linéaires, la puissance est proportionnelle au carré d'une grandeur cause. Par exemple, pour un conducteur ohmique la puissance est proportionnelle à la tension aux bornes :  $P=U^2/R$ .

Suivons cet exemple concret :

$$G_{dB} = 10 \cdot \log (P_s/P_e) = 10 \cdot \log [(U_s^2/R) / (U_e^2/R)] = 10 \cdot \log [U_s^2 / U_e^2]$$

$G_{dB} = 20 \cdot \log(U_s/U_e)$ . Voilà, nous y sommes !



Vu-mètre d'amplificateur de puissance audio : remarquez l'échelle décibel par rapport à l'échelle puissance,  
 $GdB=10 \cdot \log(P/100)$  ici.

Deux valeurs approchées en dB remarquables à connaître

$$20 \log 2 = 6,0 \quad (6,0206...)$$

$$20 \log 3 = 9,5 \quad (9,5424)$$

On peut déduire les autres valeurs sans calculette

$$20 \log 4 = 20 \log 2^2 = 2 \cdot 20 \log 2 = \dots$$

$$20 \log 5 = 20 \log(10/2) = 20 \log 10 - 20 \log 2 = \dots$$

$$20 \log 6 = 20 \log(2 \cdot 3) = 20 \log 2 + 20 \log 3 = \dots$$

$$20 \log 7 \approx 20 \log(20/3) = 20 \log 2 + 20 \log 10 - 20 \log 3 = \dots$$

$$20 \log 11 \approx 20 \log 10 \dots$$

$$20 \log 13 = 20 \log(39/3) \approx 20 \log(40/3) = \dots$$

## 5. LIEU FREQUENTIEL DE BODE DES 4 SYSTEMES FONDAMENTAUX

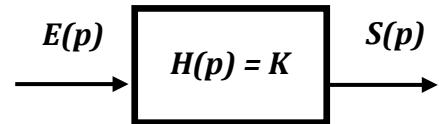
Rappelons qu'il s'agit de traiter les quatre systèmes : proportionnel, intégrateur, 1<sup>er</sup> ordre, 2<sup>ème</sup> ordre.

### 5.1. Réponse harmonique d'un système à action proportionnelle

#### 5.1.1. Transmittance du système en régime harmonique

Transmittance :  $H(p) = K$

Transmittance en régime harmonique :  $H(j\omega) = K$



#### 5.1.2. Calculs du gain et de la phase

##### Gain

$$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log K$$

##### Phase

$$\varphi = \arg[H(j\omega)] = \arg[K] = 0^\circ$$

#### 5.1.3. Diagrammes de Bode

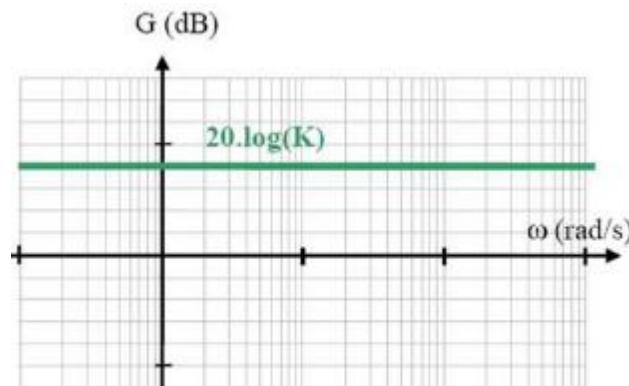


Diagramme de gain d'un système proportionnel

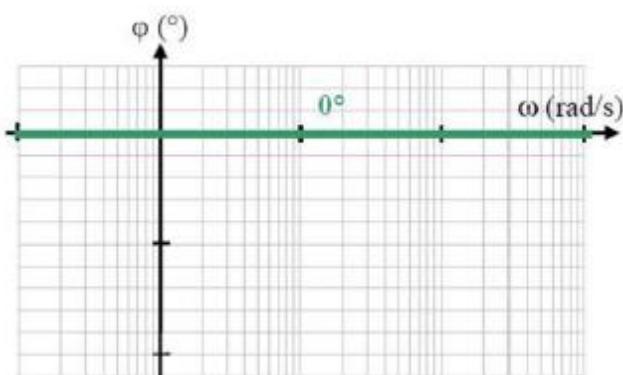
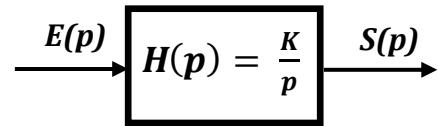


Diagramme de phase d'un système proportionnel

## 5.2. Réponse harmonique d'un système intégrateur

### 5.2.1. Transmittance du système en régime harmonique

Transmittance :  $H(p) = \frac{K}{p}$   
 Transmittance en régime harmonique :  $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$



### 5.2.2. Calcul du gain et de la phase

#### Gain

$$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{K}{j\omega} \right| = 20 \log K - 20 \log \omega$$

La courbe de gain est donc une droite de pente -20dB/décade.

La droite coupe l'axe de ordonnées,  $\omega=1$ , à  $G_1=20 \log K$

La droite coupe l'axe des abscisses,  $G=0$  dB, à  $\omega_c = K$ .

#### Phase

$$\varphi = \arg[H(j\omega)] = \arg \left[ \frac{K}{j\omega} \right] = \arg K - \arg(j\omega) = 0 - 90^\circ = -90^\circ$$

### 5.2.3. Diagrammes de Bode gain et phase

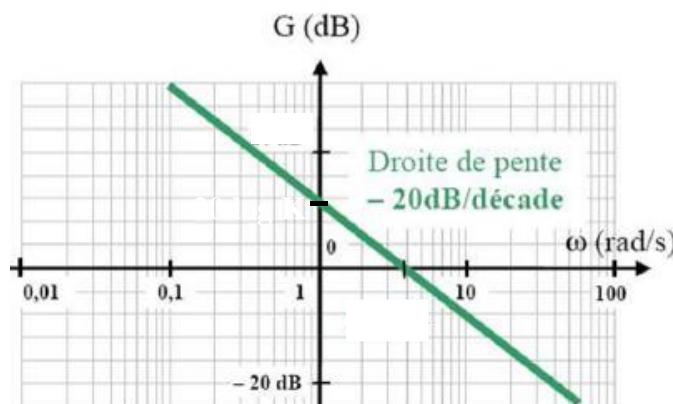


Diagramme de gain d'un système intégrateur pur

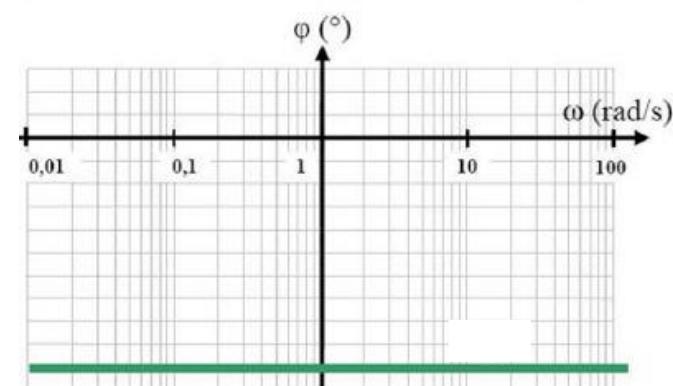


Diagramme de phase d'un système intégrateur pur : constante à -90°

### ✉ Je me teste et je me rassure

Un vérin est alimenté avec un débit d'huile  $q(t)$  en  $\text{m}^3/\text{s}$ . La position de la tige est  $x(t)$ .

La section du piston est  $S$ .

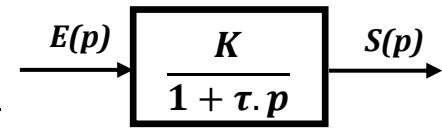
- Ecrire la relation entre  $q(t)$ ,  $S$  et la vitesse de tige  $\dot{x}(t)$ .
- Ecrire la fonction de transfert  $H(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$ . L'écrire pour une section  $S=200 \text{ mm}^2$ .
- Tracez les diagrammes de Bode de  $H(p) = \frac{5000}{p}$ . Prenez une plage de pulsation  $[10^3, 10^5 \text{ rad/s}]$ .

## 5.3. Réponse harmonique d'un système du premier ordre (de classe 0)

### 5.3.1. Transmittance du système en régime harmonique

$$\text{Transmittance : } H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

$$\text{Transmittance en régime harmonique : } H(j\omega) = \frac{K}{1 + j \cdot \tau \omega}$$



### 5.3.2. Calcul du gain et de la phase

#### Gain

$$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{K}{1 + j \cdot \tau \omega} \right| = 20 \log K - 20 \cdot \log \sqrt{1 + (\tau \omega)^2}$$

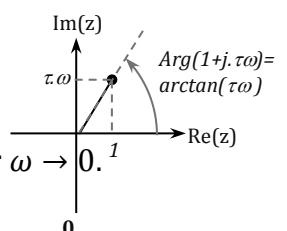
- Basses fréquences,  $\omega \rightarrow 0$  :  $G_{dB} \rightarrow 20 \log K \Rightarrow$  asymptote horizontale  $G=20 \cdot \log K$ , pour  $\omega \rightarrow 0$ .
- Hautes fréquences,  $\omega \rightarrow \infty$  :  $G_{dB} \rightarrow 20 \log K - 20 \cdot \log \sqrt{(\tau \omega)^2}$ , car  $(\tau \omega)^2 \gg 1$ .  
 $G_{dB} \rightarrow 20 \log K - 20 \cdot \log(\tau \omega)$   
 $\Rightarrow$  asymptote oblique de pente -20dB/décade, coupant l'asymptote horizontale ( $G=20 \cdot \log K$ ) à la valeur  $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$ , appelé pulsation de cassure.
- Valeur remarquable, pulsation de coupure à -3dB :  $G_{dB}(\omega = \omega_c) = 20 \log K - 20 \cdot \log \sqrt{2}$   
 $G_{dB}(\omega = \omega_c) = 20 \log K - 20 \cdot \log \sqrt{2} = 20 \log K - 3dB$   
 $\Rightarrow \omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$  est la pulsation de coupure à -3dB

#### Phase

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg[H(j\omega)] = \arg \left[ \frac{K}{1 + j \cdot \tau \omega} \right] = \arg[K] - \arg[1 + j \cdot \tau \omega] \\ &= -\arg[1 + j \cdot \tau \omega] = -\arctan\left(\frac{\tau \omega}{1}\right) \end{aligned}$$

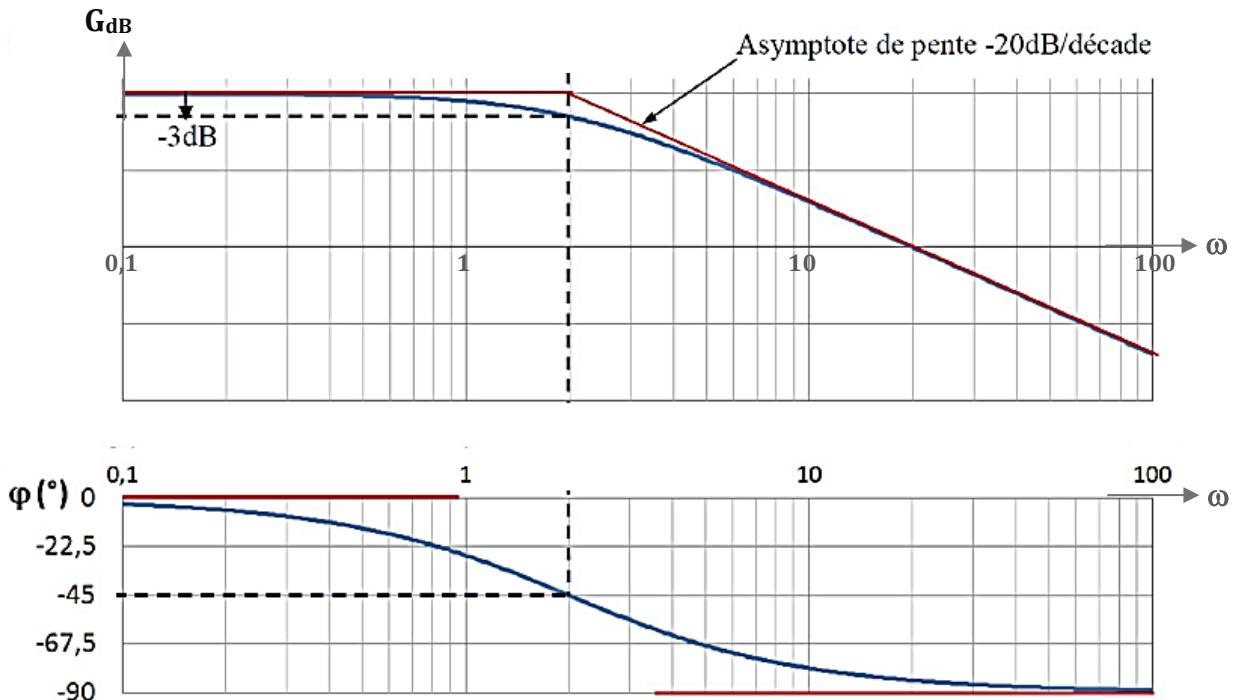
$$\varphi = -\arctan(\tau \omega)$$

- Basses fréquences,  $\omega \rightarrow 0$  :  $\varphi \rightarrow 0^\circ \Rightarrow$  asymptote horizontale  $\varphi = 0^\circ$ , pour  $\omega \rightarrow 0$ .
- Hautes fréquences,  $\omega \rightarrow \infty$  :  $\varphi \rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctan(\tau \omega) = -90^\circ$   
 $\Rightarrow$  asymptote horizontale,  $\varphi = -90^\circ$ , pour  $\omega \rightarrow \infty$



- Valeur remarquable : à  $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$ , on a  $\varphi = -45^\circ$ , et il y a un point d'inflexion.

### 5.3.3. Diagrammes de Bode gain et phase



### 5.3.4. Conséquences, remarques

- Un système du premier ordre est dit passe bas : il transmet les basses fréquences, et atténue, voire coupe, les hautes fréquences. Cela est visible sur le diagramme de gain.
- La pulsation de cassure (rencontre des deux asymptotes) est identique à la pulsation de coupure à -3dB. Cela est propre aux systèmes du premier ordre et n'est pas toujours vrai pour les ordres supérieurs.
- La pulsation de coupure à -3 dB est la pulsation avant laquelle le rapport  $\frac{|H(j\omega)|}{|H(j\omega)|_{\omega=0}}$  reste supérieur à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . La valeur -3dB correspond à une diminution de moitié de la puissance du signal, ou une division par  $\sqrt{2}$  de la grandeur de sortie, conformément à ce qui a été dit au paragraphe ci-dessus « *Eclairage sur l'échelle décibel* ».

$$10 \cdot \log \left( \frac{P}{P_0} \right) = 10 \cdot \log \left( \frac{1}{2} \right) = -3dB \quad (-3,0103 \text{ plus exactement})$$

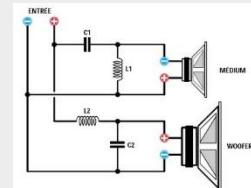
$$20 \cdot \log \left( \frac{S}{S_0} \right) = 20 \cdot \log \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -3dB$$

- Pour un système passe bas (cas d'un système du premier ordre), la **Bandé Passante** à -3dB, est la plage de fréquences (ou de pulsations) pour laquelle le gain ne subit pas une atténuation de plus de 3dB.

➤ **Je me teste et je me rassure**

Un filtre de haut-parleur type boomer (basses) d'enceinte acoustique, a la fonction de transfert suivante :  $H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{0,8}{1+0,004 \cdot p}$ .  $V_s(p)$  et  $V_e(p)$  sont les tensions d'entrée et de sortie du filtre.

- Donner les caractéristiques de ce premier ordre.
- Calculer le gain en basse fréquence  $G_{dB\_BF}$  (asymptote horizontale)
- Calculer la pulsation de cassure  $\omega_c$ .
- Tracer les asymptotes du Bode gain et phase.
- Tracez les courbes de gain et de phase.
- Donnez la bande passante en fréquence à -3dB de ce filtre.



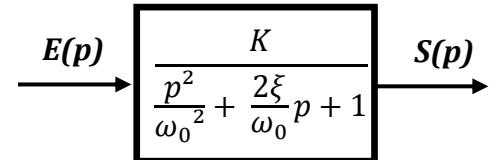
## 5.4. Réponse harmonique d'un système du deuxième ordre (de classe 0)

### 5.4.1. Transmittance en régime harmonique

$$\text{Transmittance : } H(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1}$$

$$\text{Transmittance en régime harmonique après calcul : } H(j\omega) = \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \cdot 2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Un système du second ordre présente régimes de fonctionnement possibles. cas différents sont donc à étudier.



### 5.4.2. Calcul général du gain et de la phase commune aux trois régimes de fonctionnement

#### Calcul du gain

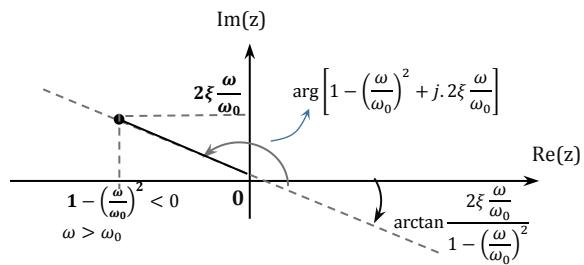
$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \cdot 2\xi \frac{\omega}{\omega_0}} \right| \\ &= 20 \log K - 20 \cdot \log \sqrt{\left[ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \end{aligned}$$

#### Calcul de la phase

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg[H(j\omega)] = \arg \left[ \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \cdot 2\xi \frac{\omega}{\omega_0}} \right] = \arg[K] - \arg \left[ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \cdot 2\xi \frac{\omega}{\omega_0} \right] \\ \varphi &= -\arg \left[ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \cdot 2\xi \frac{\omega}{\omega_0} \right]. \end{aligned}$$

Attention : l'argument d'un nombre complexe dont la partie réelle est positive et la partie imaginaire est négative, est supérieur à  $-\frac{\pi}{2}$ . Or, l'arctangente est par définition comprise entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ .

Il faut donc ajouter  $\pi$  à l'arctangente pour obtenir l'argument.



$$\triangleright \text{ Si } \omega < \omega_0 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 > 0, \quad \varphi = -\arctan \frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\triangleright \text{ Si } \omega > \omega_0 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 < 0, \quad \varphi = - \left[ \arctan \frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} + \pi \right]$$

#### 5.4.3. Caractéristiques communes aux trois régimes

##### Courbe de gain : asymptotes

- Basses fréquences,  $\omega \rightarrow 0$  :  $G_{dB} \rightarrow 20\log K \Rightarrow$  asymptote horizontale  $G=20.\log K$ , pour  $\omega \rightarrow 0$ .
- Hautes fréquences,  $\omega \rightarrow \infty$  :  $G_{dB} \rightarrow 20\log K + 40.\log\omega_0 - 40.\log\omega$   $\Rightarrow$  asymptote oblique de pente -40 dB/décade, qui coupe l'asymptote horizontale à la pulsation de cassure  $\omega_c=\omega_0$ .

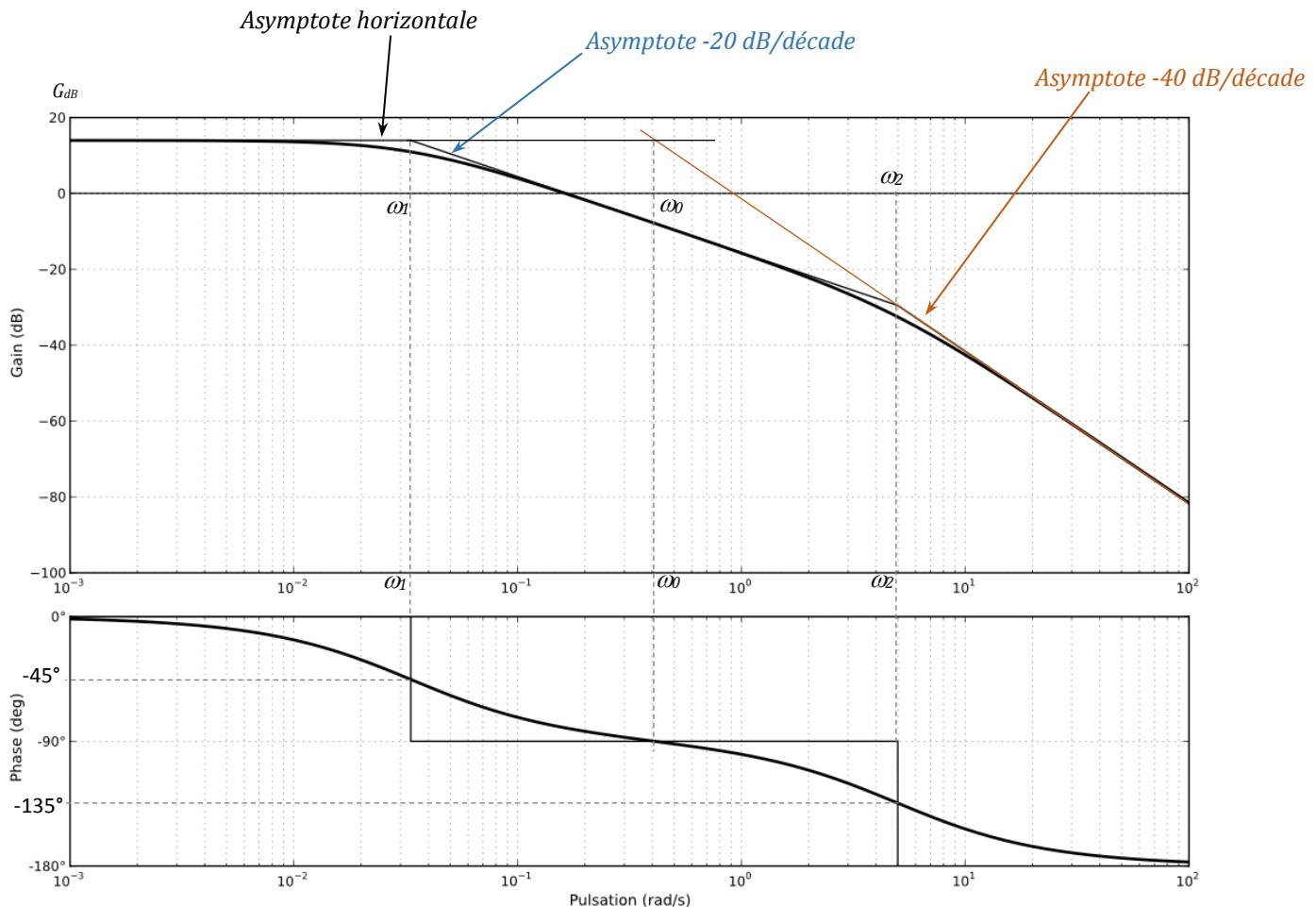
##### Courbe de phase : asymptotes et point remarquable

- Basses fréquences,  $\omega \rightarrow 0$  :  $\varphi \rightarrow 0^\circ \Rightarrow$  asymptote horizontale  $\varphi = 0^\circ$  en BF
- Hautes fréquences,  $\omega \rightarrow \infty$  :  $\varphi \rightarrow -180^\circ \Rightarrow$  asymptote horizontale  $\varphi = -180^\circ$  en HF
- Valeur remarquable : à  $\omega = \omega_c = \omega_0$  on a  $\varphi = -90^\circ$ , et il y a un point d'inflexion.

#### 5.4.4. Cas du régime apériodique (sur amorti) : $\xi > 1$

La fonction de transfert peut se mettre sous la forme :  $H(p) = \frac{K'}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)}$ .

Les courbes de gain et de phase sont donc la somme des courbes de gain et de phase de deux fonctions de transfert du 1<sup>er</sup> ordre :  $H(p) = \frac{K'}{1+\tau_1.p} \times \frac{1}{1+\tau_2.p}$



Remarque sur les pulsations de cassure :

- $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$
- $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$
- $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$  , donc :  $\log \omega_0 = \log \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} = \frac{1}{2}(\log \omega_1 + \log \omega_2)$ . Conclusion graphique :  $\omega_0$  est rigoureusement située au milieu de  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sur les abscisses graduées en log.

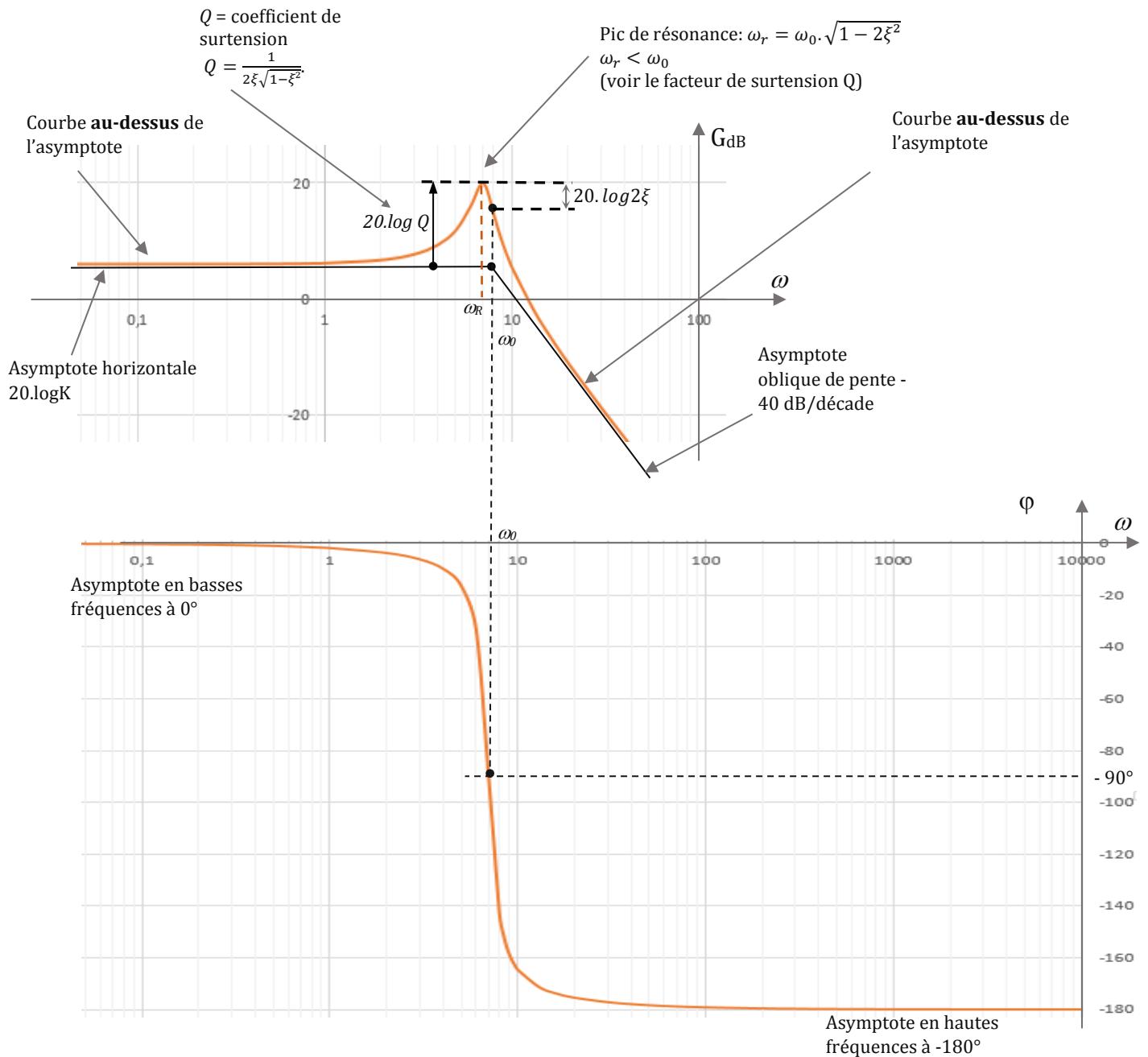
#### 5.4.5. Cas du régime pseudo périodique (sous amorti) : $\xi < 1$

Deux cas sont à étudier

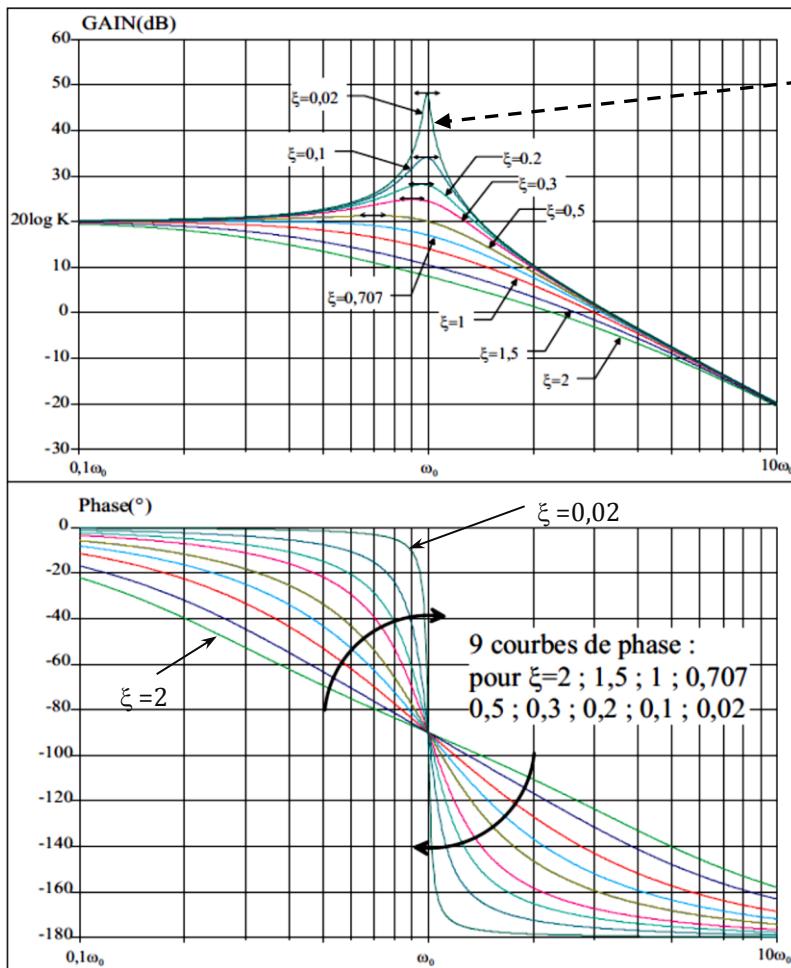
$\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1$  : pas de résonance, courbe de gain au dessous des deux asymptotes

$0 < \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$  : présence d'un pic de résonance à la pulsation de résonance  $\omega_r$  ( $\neq \omega_0$ ). Courbe de gain au-dessus des deux asymptotes.

Représentation ci-dessous dans le cas de la résonance  $0 < \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



Comment évoluent les courbes de Bode quand l'amortissement  $\xi$  varie ?



Evolution du diagramme de Bode en fonction de l'amortissement.

Le pic de résonance visible la courbe de gain correspond à un maximum de gain, obtenu pour la pulsation  $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$ .

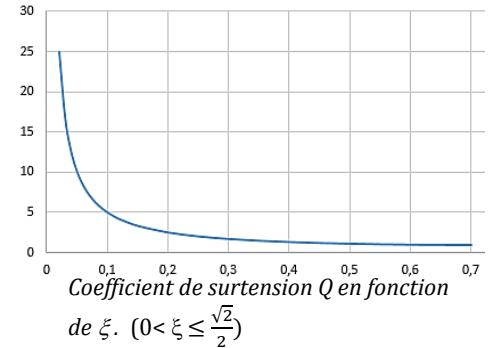
On quantifie la résonance avec le **facteur de surtension Q** :

$$Q = \frac{|H(j\omega)|_{\omega=\omega_r}}{|H(j\omega)|_{\omega=0}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Ainsi, à la résonance :

$$G_{dB}(\omega_R) = 20\log K + 20\log Q(\omega_R)$$

La courbe ci-dessous, montre que la résonance est faible pour  $\xi > 0,2$ . Elle croît brusquement quand  $\xi < 0,1$ .



#### 5.4.6. Bande passante d'un système du deuxième ordre

La pulsation de coupure à -3dB,  $\omega_{-3dB}$ , est définie comme cela :

$$\frac{|H(j\omega_{-3dB})|}{|H(j\omega)|_{\omega=0}} = \frac{|H(j\omega_{-3dB})|}{K} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'équation à résoudre est donc :

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_{-3dB}}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega_{-3dB}}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left(1 - \left(\frac{\omega_{-3dB}}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega_{-3dB}}{\omega_0}\right)^2 = 2 \quad , \text{ etc.}$$

Il faut donc résoudre une équation polynomiale bicarrée, dont la solution se trouve sans peine.

Voici la solution qu'il est interdit de connaître par cœur et qu'il faut savoir trouver :

$$\omega_{-3dB} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi + \sqrt{1 + (1 - \xi)^2}}$$

	1 <sup>er</sup> O.	2 <sup>nd</sup> O.		
		0 < ξ < 1	ξ = 1	ξ > 1
$\omega_{-3dB}$	$\omega_{-3dB} = 1/\tau$	$\omega_{-3dB} > \omega_0$	$\omega_{-3dB} = \omega_0$	$\omega_{-3dB} < \omega_0$

## 5.5. Synthèse des différentes pulsations

$\omega ?$	<i>Appellation</i>	<i>Remarque</i>
$\omega_0$	Pulsion propre du système non amorti	
$\omega_k$	Pulsion de cassure	Intersection de deux asymptotes consécutives
$\omega_r$	Pulsion de résonnance	$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$ ; $\omega_r < \omega_0$
$\omega_n$	Pulsion propre (ou pseudo pulsation)	$\omega_n = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$
$\omega_{-3dB}$	Pulsion de coupure à -3dB	Défini la bande passante
$\omega_c$	Pulsion de coupure à 0dB ( $\omega_{0dB}$ )	Intersection courbe de gain avec les abscisses

### ✉ Je me teste : ce n'est pas très difficile

Un amortisseur de voiture usé a pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{300p^2 + 400p + 15000}$$

Ou  $X(p)$  est l'enfoncement de l'amortisseur en m.  $F(p)$  est la force appliquée en N.

- Mettre  $H(p)$  sous forme canonique. Quel est le type de régime ?
- Déterminer l'asymptote en basse fréquence (diagramme de Bode gain)
- Tracez les autres asymptotes (deux diagrammes de Bode)
- Etudier éventuellement la résonnance.
- Tracez les courbes de gain et de phase.
- Quelle est la bande passante en fréquence à -3dB ?
- Que se passe-t-il si les roues de la voiture sont excitées à une période située autour d'une seconde ? (Succession de petites bosses)

## 6. GENERALISATION : REPONSE HARMONIQUE D'UN SYSTEME QUELCONQUE

Pour tracer les diagrammes de Bode d'une transmittance quelconque on se ramène aux quatre transmittances de bases étudiées précédemment : il suffit d'ajouter leurs diagrammes de gain et de phase.

**Attention** : avant de commencer toute étude, il est obligatoire de factoriser au maximum dans  $\mathfrak{R}$  le numérateur et le dénominateur de la transmittance, et de les mettre sous forme canonique !

### Préliminaire de calcul important

Il s'agit, pour le tracé des diagrammes de Bode d'être pragmatique et efficace.

Nous utilisons les équivalents mathématiques suivants.

	Cassure	$\omega < \omega_K$	$\omega > \omega_K$
Binôme du 1 <sup>er</sup> degré : $1 + \tau p$	$\omega_K = \frac{1}{\tau}$	$1 + \tau p \underset{\omega < \omega_K}{\sim}$	$1 + \tau p \underset{\omega > \omega_K}{\sim}$
Trinôme du 2 <sup>ème</sup> degré <u>non factorisable</u> * dans $\mathfrak{R}$ : $1 + ap + \frac{p^2}{\omega_0^2}$	$\omega_K = \omega_0$		
Monôme, puissance de p : $Kp^n$	Pas de cassure		
<p>* Il est nécessaire que le trinôme du 2<sup>ème</sup> degré ne soit pas factorisable dans <math>\mathfrak{R}</math>, sinon il faut le factoriser en produit de deux binômes du 1<sup>er</sup> degré. Et il y a deux cassures.</p>			

Soit à tracer les diagrammes de Bode de la transmittance :

$$H(p) = \frac{5}{p} \cdot \frac{(1+p)(100+p)}{p^2 + 8p + 400}$$

a. Dénominateur et numérateur sont-ils factorisés dans  $\mathbb{R}$  ?

Numérateur : oui, évident

Dénominateur : calculons  $\Delta =$

=> ok, il est factorisé dans  $\mathbb{R}$ .

b.  $H(p)$  est-elle sous forme canonique ?

Non elle ne l'est pas. Rendons  $H(p)$  canonique.

c. Quelles fonctions de transfert étudier ?

Il y a quatre FT à étudier :

$$H_1(p) =$$

$$H_2(p) =$$

$$H_3(p) =$$

$$H_4(p) =$$

d. Calcul des pulsations de cassure

$$H_2(p) = 1 + p \Rightarrow \omega_{k2} =$$

$$H_3(p) = 1 + 0,01p \Rightarrow \omega_{k3} =$$

$$H_4(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{20^2} + 0,02p + 1} \Rightarrow \omega_{k4} = \omega_0 =$$

Il y a donc trois cassures : 1, 20, 100 rad/s

e. Equivalents de  $H(p)$  / Asymptotes gain / Asymptotes phase

$\omega$ (rad/s) $\rightarrow$					
$\frac{20}{p}$	/				
$1 + p$	$\omega_K = 1$				
$\frac{1}{1 + 0,02p + \frac{p^2}{20^2}}$	$\omega_k = 20$				
$1 + 0,01p$	$\omega_k = 100$				
$H(p)$					
Courbe de gain : asymptotes					
Courbe de phase : asymptotes					

## f. Particularités

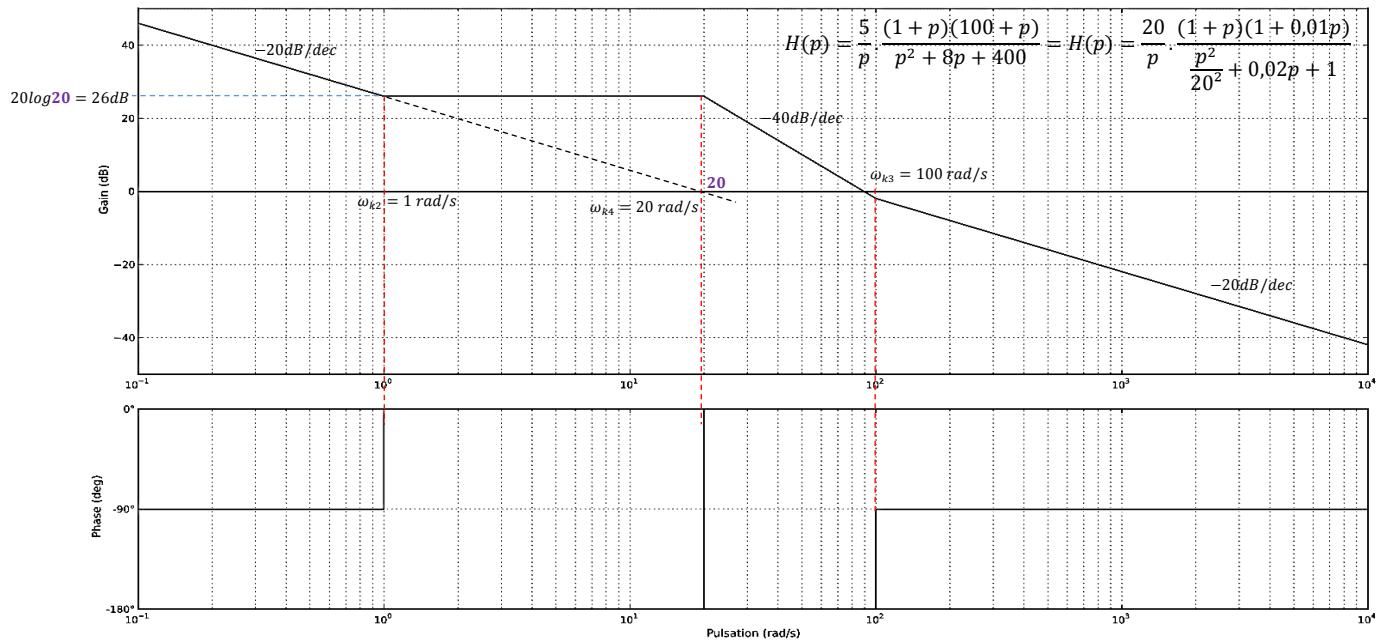
Gain en basse fréquence :  $\infty$  car présence de l'intégration  $H_1(p)$ .

Positionnement de l'intégration  $H_1(p) = \frac{20}{p}$  : coupe l'axe des abscisses à 20 rad/s et coupe la droite verticale  $\omega=1$  rad/s à  $20 \log 20 = 26$  dB.

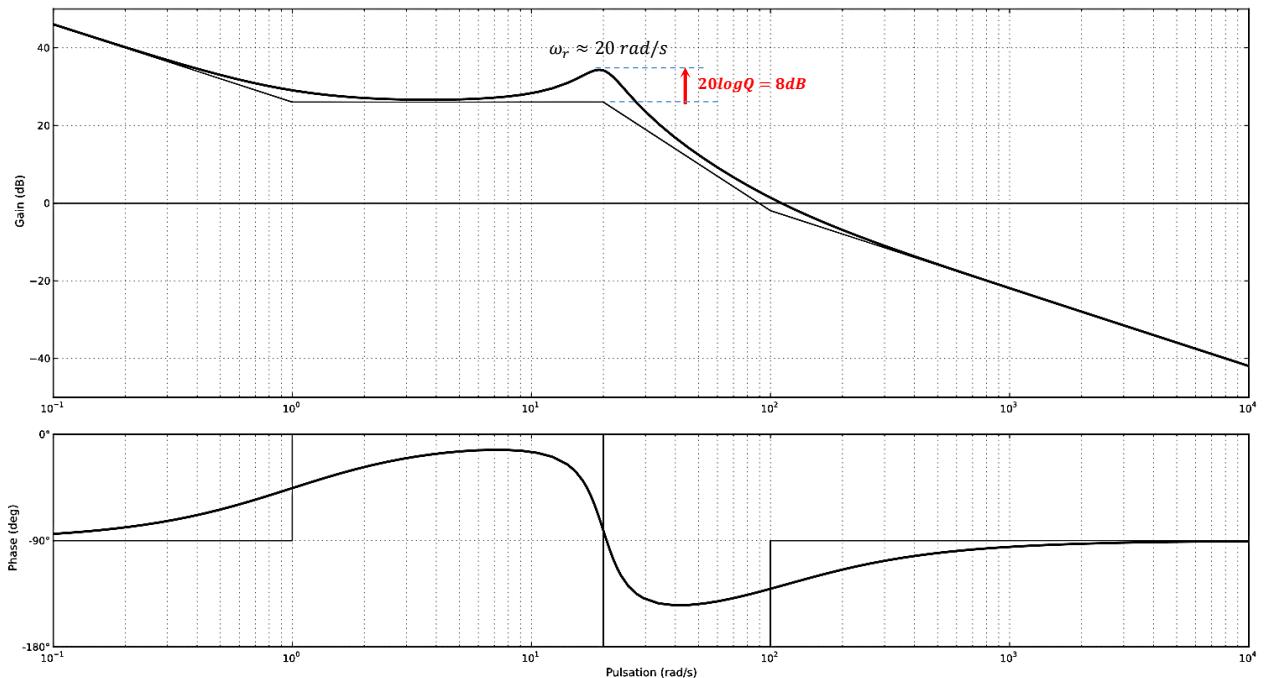
2ème ordre : résonnant à  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} = 20 \sqrt{1 - 0,2^2} \approx 20$  rad/s

Pic de résonnance :  $Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{2 \cdot 0,2 \sqrt{1-0,2^2}} = 2,5 \Rightarrow 20 \log Q = 20 \log(2,5) = 8$  dB

## g. Tracé des asymptotes



### h. Tracé de l'allure des courbes



### ✉ Je me teste (en allant lentement)

Tracer les diagrammes de Bode de la transmittance :

$$H(p) = \frac{1,4}{p} \cdot \frac{5 + p}{400p^2 + 4p + 1}$$

## 7. RETOUR SUR LES PERFORMANCES DES SLCI : POINT DE VUE FREQUENTIEL

### 7.1. Stabilité d'un système bouclé : marges de stabilité

Nous avons vu lors de l'étude temporelle des SLCI, (partie 2 du cours), que la notion de stabilité était binaire : stable ou instable. Nous avons pu déterminer le caractère stable ou instable par l'étude des pôles de la FTBF.

Nous allons voir dans ce chapitre que la stabilité peut être quantifiée par l'étude sa boucle ouverte.

#### 7.1.1. Critère du Revers

Attention : le critère du Revers ne peut pas s'appliquer si  $FTBO(p)$  a des pôles à partie réelle strictement positive. Autrement dit le critère du Revers ne peut s'appliquer que si les pôles sont à partie réelle négative ou nulle.

Exemple : le critère du Revers ne peut pas s'appliquer à  $FTBO(p) = \frac{1}{p-5}$  mais il peut s'appliquer à  $FTBO(p) = \frac{1}{p(p+5)}$ .

#### Enoncé du critère du Revers, théorème

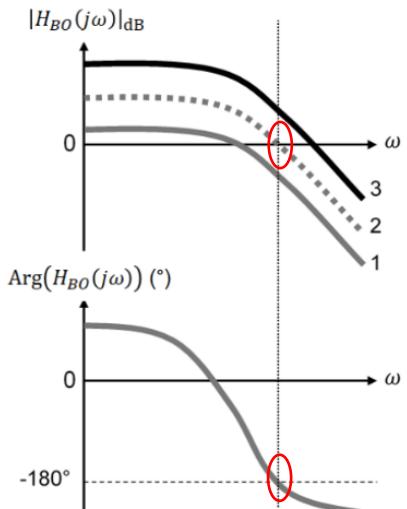
Le système sera stable en boucle fermée si pour la pulsation  $\omega_{-\pi}$  pour laquelle  $\arg[H_{BO}(j\omega_{-\pi})] = -180^\circ$ , la courbe de gain de la FTBO passe du niveau 0dB. Cela revient à dire  $|H_{BO}(j\omega_{-\pi})| < 1$ .

#### Illustration du critère du Revers

La courbe de phase est la même pour les trois systèmes mais :

- Courbe (1) : stable en BF
- Courbe (2) : oscillant en BF
- Courbe (3) : instable en BF

Point entouré sur Bode = point critique (0dB,  $-180^\circ$ ).



#### Explication, éclaircissement : notion de point critique

La fonction de transfert d'une boucle est :

$$FTBF(p) = \frac{FTCD(p)}{1+FTBO(p)}.$$

$FTBF(p)$  n'est pas définie pour  $1 + FTBO(p) = 0 \Leftrightarrow FTBO(p) = -1$ .

Le nombre complexe  $FTBO(j\omega)$  est égal à  $-1$  quand son module vaut 1 et sa phase  $-\pi$ .

Le point complexe  $(0\text{dB}, -180^\circ)$ , ( $(|FTBO(j\omega)| = 1 ; \arg[FTBO(j\omega)] = -180^\circ)$ ), est appelé point critique.

Sur le diagramme de Bode le point critique est atteint quand la phase vaut  $-180^\circ$  et le gain 0dB, soit, la courbe limite (2) ci-dessus tracée en pointillés.

Quand la phase vaut  $-180^\circ$  cela signifie que la sortie a un signe opposé à l'écart. Donc le soustracteur ajoute la sortie à l'entrée ( $\sin(\omega t - \pi) = -\sin(\omega t)$ ), au lieu de la retrancher. Pour ne pas que la sortie diverge il faut alors atténuer le signal et surtout pas l'amplifier sinon le système devient instable. Il faut donc un gain négatif.

Les marges de stabilités représentent donc la distance du système par rapport au point critique (0dB,  $-180^\circ$ ).

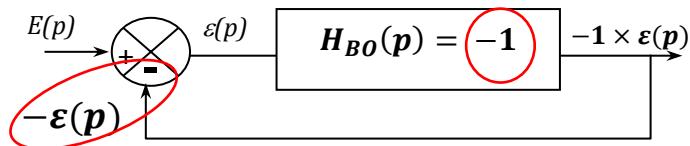


Illustration : situation d'une boucle au point critique

### 7.1.2. Marges de stabilité

Si un système est à la limite de la stabilité, la moindre dérive de l'un des paramètres, (due à la température en particulier), peut entraîner l'instabilité. Il est donc nécessaire de prévoir des "marges" vis-à-vis du problème d'instabilité. Elles se traduisent par une "distance de sécurité" entre le lieu de la transmittance en boucle ouverte et le point critique mis évidence précédemment. On définit ainsi la marge de phase et la marge de gain.

#### Marge de phase

Dans le diagramme de Bode phase, c'est la distance entre la ligne  $-180^\circ$  et la courbe de phase en  $\omega_c$  :

Où  $\omega_c$  est la pulsation de coupure à 0dB. C'est-à-dire la pulsation pour laquelle la courbe de gain coupe l'axe des abscisses.

#### Marge de gain

Dans le diagramme de Bode gain, c'est la distance entre l'axe des abscisses et la courbe en  $\omega_{-180^\circ}$  :

Où  $\omega_{-180^\circ}$  est la pulsation pour laquelle la phase vaut  $-180^\circ$ .

Illustration

Notez que les marges sont indiquées grâce à des vecteurs (orientés).

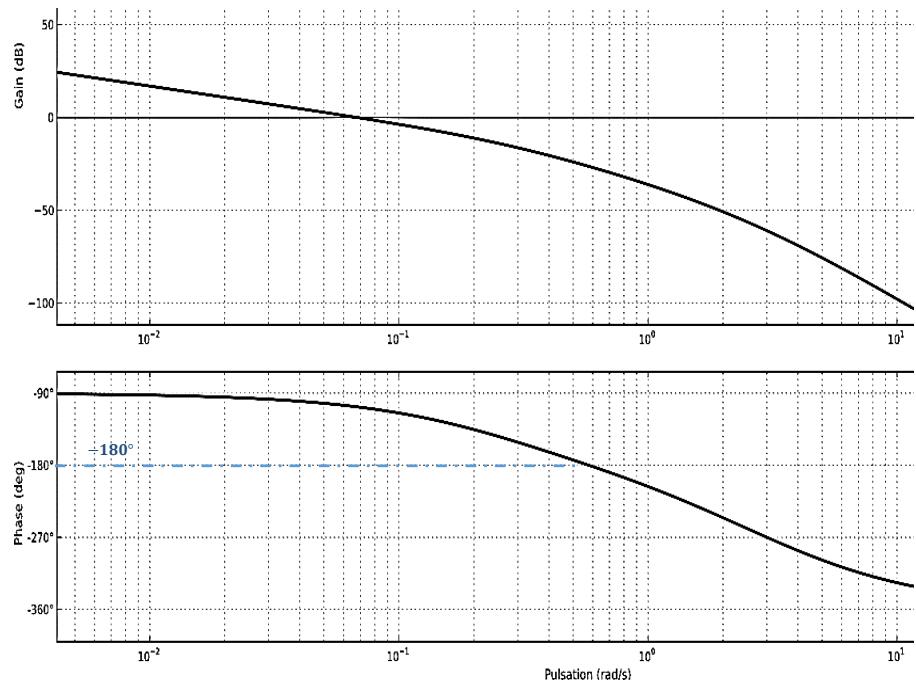
⚠️ Attention, danger :

L'extrémité du vecteur Marge de phase est sur la courbe de gain, alors que c'est l'origine du vecteur marge de gain qui est sur la courbe.

Dans l'exemple ci-contre :

$MG =$

$M\varphi =$



Remarque : les systèmes du premier et du deuxième ordre de classe 0 à coefficients positifs sont intrinsèquement stable. La marge de gain est infinie (phase jamais égale à  $-180^\circ$ , asymptotique en l'infini) et la marge de phase est strictement positive.

Valeurs usuelles des marges

Pour avoir un système stable en BF, les marges de stabilités doivent être strictement positives.

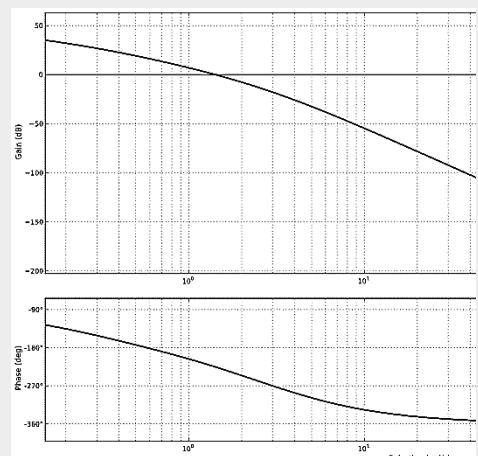
Toutefois, les valeurs de  $M\varphi = 45^\circ$  et  $MG = 10$  dB sont considérées comme satisfaisantes pour la plupart des systèmes asservis. Ces valeurs conduisent à des oscillations dont le dépassement relatif est généralement compris en 10% et 20%.

Ces réglages de marge conduisent ainsi à une réponse indicielle légèrement oscillatoire, aussi est-il parfois nécessaire de les ajuster pour chaque cas particulier.

**Je me teste.**

On donne ci-contre les diagrammes de Bode de la FTBO d'un système linéaire.

- Tracez les marges
- Evaluer leur valeur
- Conclure
- Quelles sont les valeurs de  $\omega_c$  et  $\omega_{-\pi}$  ?



## 7.2. Rapidité : bande passante

Propriété : un système est d'autant plus rapide que sa bande passante est élevée.

### Explication

Nous avons vu lors de l'étude temporelle des SLCI, (partie 2 du cours), que la rapidité d'un système peut être quantifiée grâce au temps de réponse à 5%. Sa rapidité est d'autant plus élevée que  $T_{r5\%}$  est faible.

Or, plus la bande passante d'un système est élevée plus il restitue les hautes fréquences sans atténuation de l'amplitude. Et plus un système est apte à restituer les hautes fréquences plus il est rapide.

La rapidité peut donc être caractérisée par la bande passante.

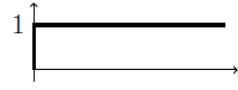
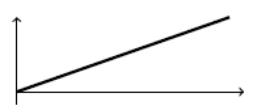
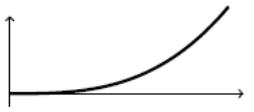
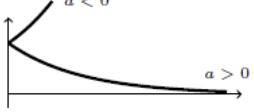
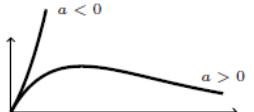
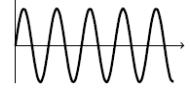
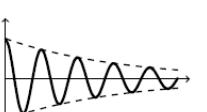
Si on prend l'exemple classique des systèmes du 1<sup>er</sup> ordre et 2<sup>ème</sup> ordre :

	Temps de réponse	Bandé passante
	$T_{r5\%}$	$\omega_{-3dB}$
1 <sup>er</sup> ordre	$3\tau$	$1/\tau$
2 <sup>ème</sup> ordre oscillant ( $\xi=0,7$ )	$3/\omega_0$	$1,16\omega_0$
2 <sup>ème</sup> ordre critique ( $\xi=1$ )	$5/\omega_0$	$\omega_0$
2 <sup>ème</sup> ordre sur amorti ( $\xi=2$ )	$12/\omega_0$	$0,64\omega_0$

Ces quatre exemples établissent le fait que bande passante et temps de réponse sont inversement proportionnels. Plus la bande passante est élevée plus le temps de réponse est faible, donc plus le système est rapide.

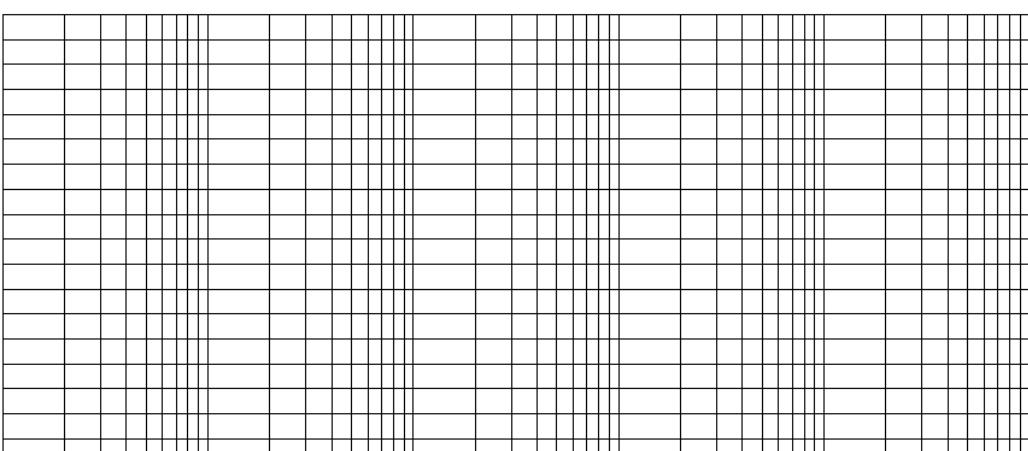
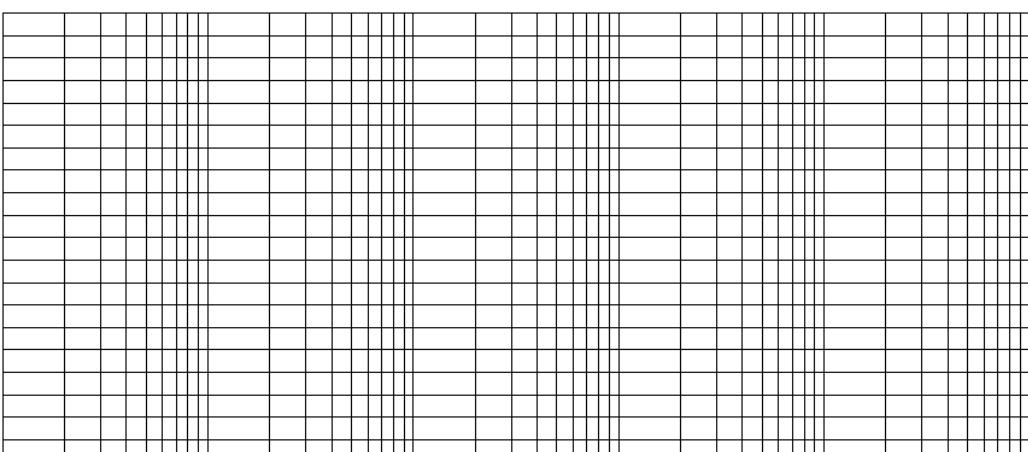
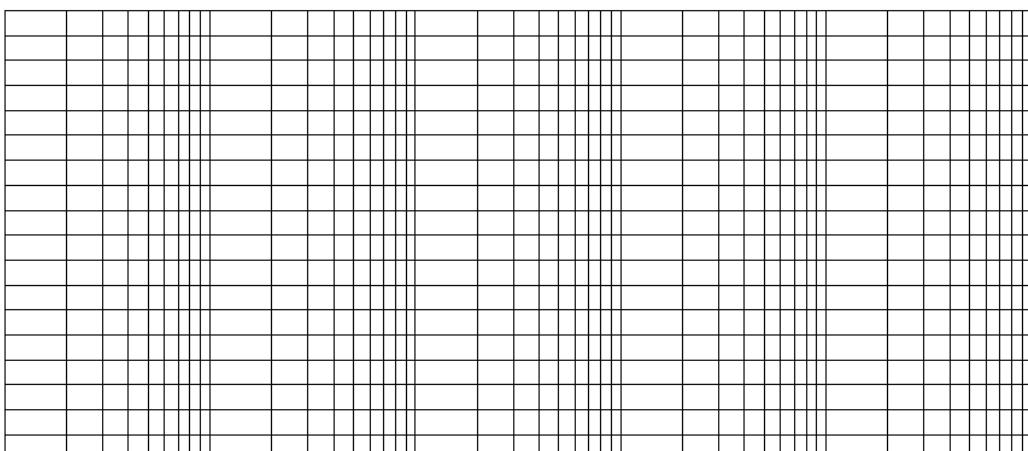
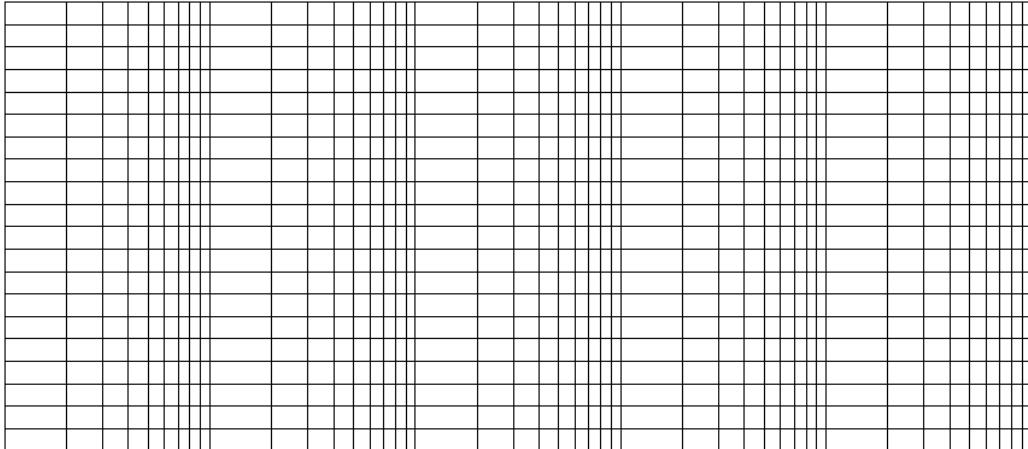
## FIN DU COURS

## ANNEXE 1 : TRANSFORMÉES DE LAPLACE USUELLES

FONCTION	ALLURE	$f(t)$	$F(p)$
Impulsion		$\delta(t)$	1
Echelon		$u(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe		$a \cdot t \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
Puissance		$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Exponentielle		$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p + a}$
Exponentielle		$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$	$\frac{1}{1 + \tau \cdot p}$
		$t \cdot e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(p + a)^2}$
Sinus		$\sin \omega t \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
Cosinus		$\cos \omega t \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
Sinus amorti		$\sin \omega t \cdot e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$
Cosinus amorti		$\cos \omega t \cdot e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{p}{(p + a)^2 + \omega^2}$

*L.Pothie*

*SII*



*D.Jolive*

*1/02/26*