

Correction du TD d'application



I Mouvements simples de particules chargées

On considère une particule ponctuelle, de charge q et de masse m , de vitesse initiale \vec{v}_0 à l'entrée d'une zone où règnent un champ électrique \vec{E} ou un champ magnétique \vec{B} . On suppose ces champs uniformes et indépendants du temps, et on néglige toute autre force que celles provoquées par ces champs.

On suppose dans un premier temps que la particule décrit une droite et possède une accélération constante a .

- 1** Déterminer la direction et la norme du ou des champs qui provoquent cette trajectoire.

Réponse

On étudie la particule M de masse m et de charge q assimilée à un point matériel dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Cette particule est soumise à la force de LORENTZ

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

La trajectoire est rectiligne et uniformément accélérée, soit

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \text{cte} \Rightarrow \vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0$$

La norme de \vec{v} varie, donc l'énergie cinétique aussi. Or, **seule la force électrique travaille**¹, le champ est un donc champ électrique. De plus, pour que la trajectoire soit rectiligne, il faut, d'après l'expression de $\vec{v}(t)$, que \vec{a} soit colinéaire à \vec{v}_0 . Or,

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

donc \vec{E} est colinéaire à \vec{v}_0 . ◊

- 2** Déterminer la position $\overrightarrow{\text{OM}}$ du point en fonction du temps. On notera $\overrightarrow{\text{OM}}_0$ la position initiale.

Réponse

On note O l'origine du repère. On intègre l'expression de la vitesse pour avoir la position $\overrightarrow{\text{OM}}$ de la particule :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{OM}} = \frac{q}{2m} t^2 \vec{E} + t \vec{v}_0 + \overrightarrow{\text{OM}}_0}$$



La particule décrit maintenant une trajectoire circulaire de rayon R_0 , dans un plan xOy .

- 3** Déterminer la direction du ou des champs qui provoquent cette trajectoire.

Réponse

La trajectoire circulaire est celle d'une charge dans un champ magnétique perpendiculaire à la vitesse initiale. On en déduit que \vec{B} est suivant Oz et que \vec{v}_0 est dans le plan xOy . ◊

- 4** Déterminer l'équation de la trajectoire et la relation entre la norme du champ, v_0 et R_0 . On suggère d'utiliser les coordonnées polaires.

Réponse

La trajectoire étant circulaire, la vitesse en coordonnées polaires a pour expression $\vec{v} = R_0\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta$ et l'accélération se réduit à

$$\vec{a} = -R_0\dot{\theta}(t)^2 \vec{u}_r + R_0\ddot{\theta}(t) \vec{u}_\theta$$

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la charge q dans le référentiel d'étude que l'on supposera galiléen, s'écrit :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Or, $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Par conséquent,

$$q\vec{v} \wedge \vec{B} = qR_0\dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_z$$

1. La force de LORENTZ magnétique $q(\vec{v} \wedge \vec{B})$ est perpendiculaire à \vec{v} donc à la trajectoire

$$= qBR_0\dot{\theta}(t) \underbrace{(\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z)}_{=\vec{u}_r}$$

$$\Leftrightarrow q\vec{v} \wedge \vec{B} = qBR_0\dot{\theta}(t)\vec{u}_r$$

En projetant le PFD sur la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, il vient :

$$\begin{cases} -mR_0\dot{\theta}(t)^2 = qR_0\dot{\theta}(t)B \\ R_0\ddot{\theta}(t) = 0 \end{cases}$$

On obtient alors

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{qB}{m} = \text{cte} \Rightarrow \theta(t) = -\frac{qB}{m}t + \theta_0$$

Si la charge est positive, elle tourne dans le sens anti-trigonométrique (horaire) par rapport à Oz. Puisque $\dot{\theta}(t)$ est constante, le mouvement est circulaire uniforme et $v_0 = R_0|\dot{\theta}(t)|$ (c'est une norme donc nécessairement positive !) d'où

$$R_0 = \frac{mv_0}{qB}$$



II Filtre de vitesse

Un ion de masse m et de charge q pénètre dans un filtre par la fente F_1 avec un vecteur vitesse $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$. Il y règne un champ électrique $\vec{E} = E\vec{u}_y$ et un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$, uniformes et stationnaires.

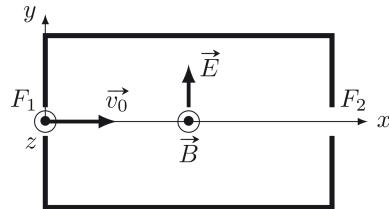


FIGURE M5.1 – Schéma du filtre de vitesse.

- 1 Écrire la force de LORENTZ alors ressentie par l'ion.

Réponse

Dans le référentiel du laboratoire, le système {ion} repéré par son point matériel M de masse m et de charge q dans un repère cartésien $(F_1, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est soumis à la force de LORENTZ, telle que

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \\ &= qE\vec{u}_y + qBv_0 \underbrace{(\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z)}_{=-\vec{u}_y} \\ \Leftrightarrow \vec{F} &= q(E - Bv_0)\vec{u}_y \end{aligned}$$



- 2 À quelle condition l'ion peut-il avoir une trajectoire rectiligne l'amenant à passer à travers la fente F_2 ?

Réponse

Pour avoir une trajectoire rectiligne sur \vec{u}_x , il faut que la somme des forces s'appliquant sur l'ion soit nulle. Ainsi, en négligeant le poids devant la force de LORENTZ, il faut que la force de LORENTZ soit nulle.



- 3 Exprimer en fonction de E et B la vitesse v_0 lui permettant d'atteindre la fente F_2 . Justifier le nom du dispositif.

Réponse

La condition précédente avec l'équation de la première question amène à

$$E - v_0B = 0 \Leftrightarrow v_0 = \frac{E}{B}$$

Ainsi, si le vecteur vitesse de la particule n'est pas égal à $v_0\vec{u}_x$, alors elle sera déviée et ne passera pas par la fente F_2 : on filtre effectivement les vitesses.



III Déviation d'un électron

Un électron pénètre en A avec une vitesse initiale \vec{v}_0 dans la zone grisée où règne un champ magnétique \vec{B} uniforme et stationnaire. On suppose que la zone où règne le champ magnétique est très grand de telle sorte que la particule ne peut que ressortir par les côtés AC ou AD.

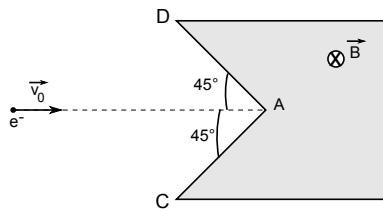


FIGURE M5.2 – Schéma de la situation.

- 1 Quelle est la trajectoire de la particule dans la zone grisée ? On précisera les caractéristiques de cette trajectoire.

Réponse

La particule arrive dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = \text{cté}$ avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ orthogonale à \vec{B} . La trajectoire est donc un cercle de rayon $R = mv_0/(qB_0)$, avec $B_0 = \|\vec{B}\|$. La force en A est dirigée vers le bas, on en déduit la position du centre C_1 de la trajectoire.

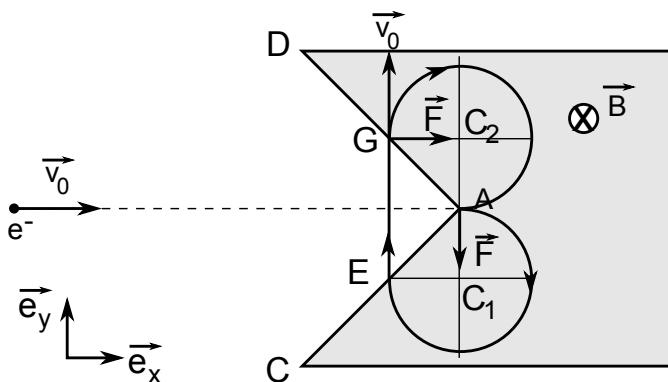


FIGURE M5.3 – Trajectoire dans la zone.

- 2 Par quelle face ressort la particule ? Quelle est la direction de la vitesse ?

Réponse

La particule ressort par la face AC en E, avec une vitesse selon \vec{e}_y car le triangle AC_1E est isocèle et rectangle en C_1 .

- 3 Que se passe-t-il ensuite ? Quel nom donneriez-vous à ce dispositif ?

Réponse

En dehors de la zone grisée, la particule est isolée, donc elle est animée d'un mouvement rectiligne uniforme ($\vec{v} = v_0 \vec{e}_y = \text{cté}$) dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

La particule entre à nouveau dans le zone où règne le champ magnétique par la face AD, avec une vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_y$. La trajectoire est alors circulaire de même rayon R (car la vitesse est la même en norme). On représente la force magnétique en G, et on en déduit le position C_2 du centre de la trajectoire. La particule arrive en A avec la vitesse $\vec{v} = -v_0 \vec{e}_x$ et sort de la zone grisée.

Au final, la particule a subi une déviation de π , comme si elle avait été réfléchie par un miroir. On pourrait donc appeler ce dispositif un **miroir magnétique**.



Vérifiez que l'effet miroir est maintenu si la particule incidente n'arrive plus en A. On constate en revanche que la particule n'emprunte plus le même chemin qu'à l'aller.



IV Imprimante jet d'encre

Dans un dispositif d'impression industriel, les gouttelettes d'encre sont chargées puis déviées de manière contrôlée par un déflecteur électrostatique avant d'atteindre le support d'impression.

Un gouttelette de volume $V = 10 \text{ pL}$, de charge $q = 3,4 \times 10^{-14} \text{ C}$ et de vitesse $v_0 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ sur \vec{u}_x entre en O dans le déflecteur, constitué de deux électrodes planes portées aux potentiels électriques V_1 et V_2 et générant un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_y$ avec $E = 5,0 \times 10^5 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$.

La longueur du déflecteur est $L_1 = 5,0 \text{ cm}$. Le support d'impression se trouve à la distance $L_2 = 20 \text{ cm}$ de la sortie du déflecteur. L'encre est essentiellement constituée d'eau, de masse volumique $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

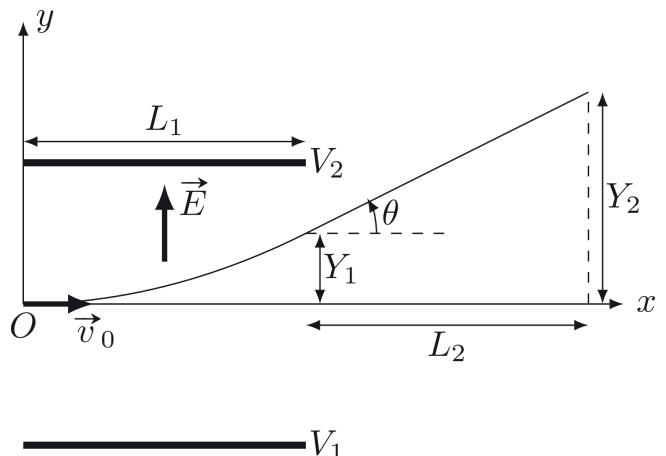


FIGURE M5.4 – Schéma du déflecteur.

- 1 Quel est le signe de la tension $V_1 - V_2$ pour que la gouttelette d'encre soit effectivement déviée dans le sens des y croissants ?

Réponse

La gouttelette est chargée positivement, et subit la force électrique $\vec{F}_e = q\vec{E}$. Pour aller dans le sens des y croissants, il faut que \vec{E} soit selon \vec{u}_y , comme indiqué dans l'énoncé. Or, $\vec{E} = -\text{grad } V$, donc \vec{E} va des **hauts potentiels** vers les **bas potentiels**; il faut donc $V_1 > V_2$, soit

$$V_1 - V_2 > 0$$

- 2 Calculer la masse m de la gouttelette et montrer que l'on peut négliger son poids devant la force électrique de LORENTZ.

Réponse

La gouttelette a un volume V et une masse volumique ρ . On en déduit

$$m = \rho V \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \\ V = 10 \text{ pL} = 10 \times 10^{-12} (\text{dm})^3 \\ = 1,0 \times 10^{-11} (10^{-1} \text{ m})^3 \\ = 1,0 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \end{cases}$$

A.N. : $m = 1,0 \times 10^{-11} \text{ kg}$

Soit $\|\vec{F}_e\| = qE \approx 1,7 \times 10^{-8} \text{ N}$ et $\|\vec{P}\| = mg \approx 1,0 \times 10^{-10} \text{ N}$ soit $\|\vec{F}_e\| \approx 200 \times \|\vec{P}\|$

On peut donc négliger le poids devant la force de LORENTZ.

- 3 Appliquer la deuxième loi de NEWTON à la gouttelette entre les électrodes et déterminer l'équation de sa trajectoire. En déduire le déplacement Y_1 en sortie du déflecteur.

Réponse

On applique le PFD à la gouttelette dans le référentiel de la salle d'impression, supposé galiléen, avec un repère cartésien tel qu'indiqué sur le schéma :

$$m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = \frac{qE}{m}t \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{qE}{2m}t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

en intégrant une première fois avec $\dot{x}(0) = v_0$ et $\dot{y}(0) = 0$, en ignorant le mouvement en z , puis en intégrant une seconde fois, avec $x(0) = 0 = y(0)$. On trouve alors l'équation de la trajectoire :

$$y(x) = \frac{qE}{2mv_0^2}x^2$$

qui est l'équation d'une parabole. Ainsi, on trouve $Y_1 = y(L_1)$:

$$Y_1 = 5,3 \times 10^{-3} \text{ m} = 5,3 \text{ mm}$$

- 4 Caractériser la trajectoire de la gouttelette après sa sortie du déflecteur, en négligeant son poids.

Réponse

Après être sortie du déflecteur, la gouttelette n'est soumise à aucune action sauf son poids, que l'on ignore sur la durée du trajet restant ($v_0 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$) : sa trajectoire est donc rectiligne et uniforme.



- 5 Exprimer puis calculer la déflexion angulaire θ . En déduire le déplacement Y_2 .

Réponse

On trouve l'angle de sortie en prenant

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(L_1)}{\dot{x}(L_1)} = \frac{qEL_1}{mv_0^2} = 2 \frac{Y_1}{L_1}$$

L'angle trouvé étant petit ($\theta \approx 0,21 \text{ rad}$), $\tan \theta \approx \theta \approx \sin \theta$. Or, on a

$$Y_2 = Y_1 + L_2 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_2 = Y_1 \left(1 + 2 \frac{L_2}{L_1} \right)}$$

avec $\begin{cases} Y_1 = 5,3 \times 10^{-1} \text{ cm} \\ L_1 = 5,0 \text{ cm} \\ L_2 = 20 \text{ cm} \end{cases}$

A.N. : $\boxed{Y_2 = 4,8 \text{ cm}}$



Correction du TD d'entraînement



I Séparation isotopique

Le spectromètre de DEMPSTER permet, entre autres, de séparer les différents isotopes chargés d'un élément dans un échantillon.

Considérons un faisceau de particules chargées, constitué des ions de deux isotopes de mercure : $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$, notés respectivement (1) et (2). Ce faisceau sort de la chambre d'ionisation avec une vitesse négligeable, puis accéléré par une tension $U_{PP'}$ appliquée entre les deux plaques P et P' . Les ions traversent ensuite une zone de déviation où règne un champ magnétique transversal uniforme, tel que $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

$b6 \times 10^{-19} \text{ C m}_{\text{nucléon}} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $m_{\text{électron}}$ négligeable devant $m_{\text{nucléon}}$, $|U_{PP'}| = 10 \text{ kV}$, $B = 0,10 \text{ T}$ et $e =$

- 1 Quel doit être le signe de $U_{PP'}$ pour que les ions soient effectivement accélérés entre P et P' ?

Réponse

Les ions étant positifs, ils subissent la force $\vec{F}_e = q\vec{E}$ dans le même sens que \vec{E} . Il faut donc que \vec{E} soit selon \vec{u}_y . Or, $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ indique que \vec{E} va des hauts potentiels aux bas potentiels ($\vec{\text{grad}}$ indique le sens des grandes variations, $-\vec{\text{grad}}$ indique l'inverse) : on veut donc que V_P soit plus grand que $V_{P'}$, soit

$$U_{PP'} = V_P - V_{P'} > 0$$



- 2 Exprimer les vitesses v_1 et v_2 des isotopes suite à l'accélération.

Réponse

L'ion, assimilable à un point matériel M_i , de masse m_i , est soumis dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen à la force électrique qui est conservative. Donc le système est conservatif : $\mathcal{E}_m(P) = \mathcal{E}_m(P')$. L'énergie potentielle électrique s'écrit $\mathcal{E}_p = qV$ (on prend la constante nulle), on part à vitesse nulle et on accélère jusqu'à P' , d'où

$$qV(P) = \frac{1}{2}m_i v_i^2 + qV(P') \Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{2qU_{PP'}}{m_i}}$$



- 3 Déterminer les trajectoires des ions dans la zone de déviation. Exprimer les rayons R_1 et R_2 des trajectoires.

Réponse

- 1 Système et référentiel : {particule} masse m charge q dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen.

- 2 Repère et repérage :

◊ Repère : $(M(t), \vec{u}_T, \vec{u}_N)$ avec $\vec{B} = B\vec{u}_z$ avec $\vec{B} \perp \vec{v}_0$

◊ Repérage :

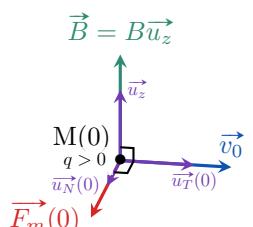


FIGURE M5.2 – 4

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{u}_T$$

$$\vec{a}(t) = \dot{v}(t)\vec{u}_T + \frac{v^2(t)}{R(t)}\vec{u}_N$$

$$\text{Or, } \vec{F}_m = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_c(t) = \text{cte}$$

$$\text{Donc } \vec{v}(t) = v_0\vec{u}_T \text{ et } \vec{a}(t) = \frac{v_0^2}{R(t)}\vec{u}_N$$

- 3 BDF :

$$\vec{F}_m = q(\vec{v}(t) \wedge \vec{B}) = qBv_0(\vec{u}_T \wedge \vec{u}_z)$$

- 5 PFD :

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}_m \Leftrightarrow \frac{mv_0^2}{R(t)}\vec{u}_N = qB(\vec{u}_T \wedge \vec{u}_z) \Leftrightarrow \frac{mv_0}{R(t)}\vec{u}_N = qB(\vec{u}_T \wedge \vec{u}_z)$$

Planéité

$$\vec{u}_N = \vec{u}_T \wedge \vec{u}_z \quad \text{soit} \quad \vec{u}_N \wedge \vec{u}_z \quad \forall t$$

Or, $\vec{u}_T \perp \vec{u}_N$ donc $\vec{u}_T \perp \vec{u}_z \quad \forall t$ ■

Autrement dit, $(\vec{u}_T(0), \vec{u}_N(0))$ donne le plan de la trajectoire $\forall t$: **la trajectoire de $M(t)$ s'effectue dans le plan constant perpendiculaire à \vec{B} !**

Circularité

En reprenant le PFD en norme, on a

$$\frac{mv_0}{R(t)} = |q|B \Leftrightarrow R(t) = R_c = \frac{mv_0}{|q|B}$$

La trajectoire est donc un **cercle** de rayon constant R_c .

- 4 On recueille les particules sur une plaque photographique sous P' après leur demi-tour. Exprimer puis calculer la distance d entre les deux traces observées.

Réponse

Graphiquement, $d = 2(R_2 - R_1)$, soit

$$d = \frac{2\sqrt{2}}{B} \sqrt{\frac{U}{q}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$$

II Cyclotron

Inspiré CCP PC 2014, oral banque PT

Un cyclotron est formé de deux enceintes demi-cylindriques D_1 et D_2 , appelées *dees* en anglais, séparées d'une zone étroite d'épaisseur a . Les *dees* sont situés dans l'entrefer d'un électroaimant qui fournit un champ magnétique uniforme $\vec{B} = Be_z$, de norme $B = 1,5$ T. Une tension sinusoïdale d'amplitude $U_m = 200$ kV est appliquée entre les deux extrémités de la bande intermédiaire, si bien qu'il y règne en champ électrique orienté selon e_x .

On injecte des protons de masse $m = 1,7 \times 10^{-27}$ kg au sein de la zone intermédiaire avec une vitesse initiale négligeable.

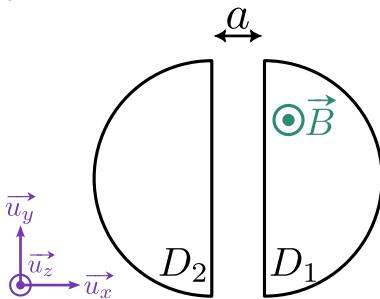


FIGURE M5.3 – Schéma de principe.



FIGURE M5.4 – Photon du cyclotron de l'université de RUTGERS, mesurant ≈ 30 cm en diamètre.

- 1 Montrer qu'à l'intérieur d'un *dee*, la norme de la vitesse des protons est constante.

Réponse

- ◊ **Système** : proton, assimilé à un point matériel de masse m et de charge q .
- ◊ **Référentiel** : lié au cyclotron, donc référentiel du laboratoire supposé galiléen.
- ◊ **BDF** :

Poids

négligeable devant \vec{F}

Force de LORENTZ

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

À l'intérieur des *dees*, seule la force magnétique $\vec{F}_m = e\vec{v} \wedge \vec{B}$ existe. Ainsi, d'après le TPC,

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = e \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v}}_{\perp \vec{v} = 0} = 0 \quad \text{soit} \quad mv \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dv}{dt} = 0$$

- 2 En déduire le rayon de courbure R de la trajectoire des protons ayant une vitesse v ainsi que le temps que passe un proton dans un *dee*.

Réponse

La trajectoire d'un proton dans un champ magnétique est un arc de cercle, parcouru à vitesse constante. Utilisons un repérage **polaire**, centré sur le centre de l'arc de cercle :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}(t) &= R\vec{u}_r \\ \vec{v}(t) &= R\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = -v\vec{u}_\theta \\ \vec{a}(t) &= -R\dot{\theta}(t)^2 = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r\end{aligned}$$

En effet, $\dot{\theta} < 0$ car le proton tourne dans le **sens horaire** avec \vec{B} vers le haut (à retrouver par la cohérence des signes en appliquant le PFD ou par dessin de la force sur le schéma). De plus, d'après la deuxième loi de NEWTON,

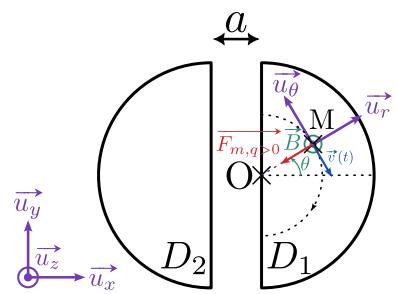
$$m\vec{a} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

soit

$$m\left(-\frac{v^2}{R}\vec{u}_r\right) = evB\underbrace{(-\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z)}_{=\vec{u}_r} = -evB\vec{e}_r$$

Finalement,

$$\frac{mv^2}{R} = evB \quad \text{d'où} \quad \boxed{R = \frac{mv}{eB}}$$



La trajectoire dans un des *dees* est ainsi un demi-cercle, de longueur πR et, **puisque la vitesse est constante**, parcourue en un temps

$$\Delta t_d = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{eB} = 22 \text{ ns}$$

On remarque ainsi que Δt_d ne dépend pas de la vitesse du proton, mais seulement du champ appliqué dans le *dee* (en plus des variables intrinsèques au proton, e et m). \diamond

- 3] Quelle doit être la fréquence f de la tension pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les *dees*? Pour simplifier on pourra supposer $a \ll R$. Justifier le choix d'une tension harmonique au lieu, par exemple, d'une tension crêteau.

Réponse

Pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les *dees*, il faut que la force électrique qu'il subit soit alternativement orientée selon $+\vec{u}_x$ lorsqu'il passe de D_2 à D_1 , et selon $-\vec{u}_x$ en passant de D_1 à D_2 . En négligeant le temps de passage dans l'espace entre les *dees* ($a \ll \pi R$), il faut donc qu'une demi-période de la tension appliquée soit égale à Δt_d , soit pour une période entière :

$$T = 2\Delta t_d = \frac{2\pi m}{eB} \quad \text{et} \quad \boxed{f = \frac{eB}{2\pi m} = 23 \text{ MHz}}$$

Utiliser une tension harmonique plutôt qu'une tension crêteau a l'intérêt de regrouper tous les protons pour que leur passage dans les *dees* soit en phase avec la tension. Regrouper les protons permet aux impulsions du faisceau d'être plus puissantes. De plus, en pratique, une tension crêteau requiert beaucoup d'harmoniques qu'il peut ne pas être simple d'imposer à de telles fréquences. \diamond

- 4] Exprimer en fonction de n la vitesse v_n puis le rayon R_n de la trajectoire d'un proton après n passages dans la zone d'accélération. Le demi-cercle $n = 1$ est celui qui suit la première phase d'accélération.

Réponse

Jusqu'à présent, nous avons relié le rayon à la vitesse du proton. Il faut donc maintenant relier la vitesse du proton au nombre de passage dans les *dees*, ou plutôt au nombre de passage dans la zone accélératrice. Comme on ne s'intéresse qu'à la norme, le théorème de l'énergie cinétique est le plus adapté. Appliquons ce théorème sur une trajectoire entre la sortie d'un *dee* et l'entrée de l'autre, en supposant que le passage du proton se fait au moment où la tension atteint son maximum (justifié par la question précédente), et en supposant aussi que la durée de passage dans la zone accélératrice est négligeable devant la période de la tension, ce qui permet de supposer que la tension est presque constante égale à U_m . Sous ces hypothèses, on trouve :

$$\frac{1}{2}mv_{n+1}^2 - \frac{1}{2}mv_n^2 = \mathcal{W}(\vec{F}_e) = e\frac{U_m}{a}a$$

En raisonnant par récurrence, on obtient

$$\frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \approx \frac{1}{2}mv_n^2 = neU_m \quad \text{soit} \quad v_n = \sqrt{\frac{2neU_m}{m}}$$

et en utilisant le résultat d'une question précédente,

$$R_n = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{2neU_m}{m}} \quad \text{soit} \quad R_n = \sqrt{\frac{2nmU_m}{B^2 e}}$$



- 5] Calculer numériquement le rayon de la trajectoire après un tour (donc un passage dans chaque *dee*), puis après dix tours.

Réponse

Remarquons bien que n compte le nombre de passages dans la zone accélératrice, faire un tour complet revient donc à passer de n à $n + 2$. Après un seul tour, $n = 2$, et

$$v_2 = \sqrt{\frac{4eU_m}{m}} \quad \text{et} \quad R_2 = 2\sqrt{\frac{mU_m}{eB^2}} = 6,1 \text{ cm}$$

Après dix tours, $n = 20$ et

$$R_{20} = \sqrt{10}R_2 = 19 \text{ cm}$$



Le rayon de la dernière trajectoire décrite par les protons accélérés avant de bombarder une cible est $R_N = 35 \text{ cm}$.

- 6] Déterminer l'énergie cinétique du proton avant le choc contre la cible proche du cyclotron, puis le nombre de tours parcourus par le proton.

Réponse

Avec $R_N = 35 \text{ cm}$, la vitesse finale vaut

$$v_{\text{fin}} = \frac{eBR_N}{m} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E}_{c,\text{fin}} = \frac{e^2 B^2 R_N^2}{2m} = 2,1 \times 10^{-12} \text{ J} = 14 \text{ MeV}$$

puis

$$\mathcal{E}_{c,\text{fin}} = NeU_m \quad \text{d'où} \quad N = \frac{\mathcal{E}_{c,\text{fin}}}{eU_m} = 33$$

ce qui correspond à 16 tours et demi au sein du cyclotron.



III Chambre à bulles

La chambre à bulles est un dispositif mis au point en 1952 par Donald Arthur GLASER (prix NOBEL 1960), et destiné à visualiser des trajectoires de particules subatomiques. Il s'agit d'une enceinte remplie d'un liquide (généralement du dihydrogène) à une température légèrement supérieure à celle de vaporisation : le passage d'une particule chargée déclenche la vaporisation et les petites bulles formées ainsi matérialisent la trajectoire de la particule.

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, qui courbe les trajectoires et permet ainsi d'identifier les particules (à partir de leur masse et de leur charge).

On étudie ici une particule P de masse m , de charge q (positive ou négative), introduite à $t = 0$ dans la chambre à bulles où règne le champ $\vec{B} = B\vec{e}_z$ (avec $B > 0$). Sa position initiale est l'origine O du repère, et sa vitesse initiale est $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_y$ (avec $v_0 > 0$). Le poids de la particule est négligé dans tout le problème. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.

Dans un premier temps, on suppose que les frottements du liquide sur la particule P sont négligeables.

- 1] Établir les équations différentielles du mouvement de P. On posera $\omega = qB/m$.

Réponse

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la particule P n'est soumise qu'à la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, en négligeant le poids devant cette force. Avec le principe fondamental de la dynamique, on trouve

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}(t)B \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}(t)B \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{qB}{m}\dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\frac{qB}{m}\dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = +\omega \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\omega \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{M5.1})$$

$$(\text{M5.2})$$

$$(\text{M5.3})$$



- 2 En déduire les équations horaires de P et indiquer précisément la nature de sa trajectoire. Représenter sur un même schéma les trajectoires d'un proton (charge $q = +e$ et masse m_p) et d'un électron ($q = -e$ et $m_e \ll m_p$).

Réponse

L'équation M5.3 donne successivement $\dot{z} = \text{cte} = 0$ puis $[z = \text{cte} = 0]$: le mouvement a donc lieu dans le plan (Oxy) .

Pour les équations horaires, on intègre une fois les deux premières équations M5.1 et M5.2 :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \omega \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\omega \dot{x}(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \omega y(t) + K \\ \dot{y}(t) = -\omega x(t) + K' \end{cases}$$

Conditions initiales : $\dot{x}(0) = 0$ or $\dot{x}(0) = \omega \underbrace{y(0)}_{=0} + K = K$ donc $K = 0$

et $\dot{y}(0) = v_0$ or $\dot{y}(0) = -\omega \underbrace{x(0)}_{=0} + K' = K'$ donc $K' = v_0$

Soit $\begin{cases} \dot{x}(t) = \omega y(t) \\ \dot{y}(t) = -\omega x(t) + v_0 \end{cases}$

On inject \dot{y} dans M5.1 et inversement : $\begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \omega v_0 \\ \ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \end{cases}$

D'où les solutions

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t))} \quad \text{et} \quad \boxed{y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)}$$

Donnant l'équation cartésienne : $\left(x - \frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$

correspondant à l'équation d'un cercle de centre $\Omega\left(\frac{v_0}{\omega}, 0, 0\right)$ et de rayon $R = \frac{v_0}{|\omega|} = \frac{mv_0}{|q|B}$.

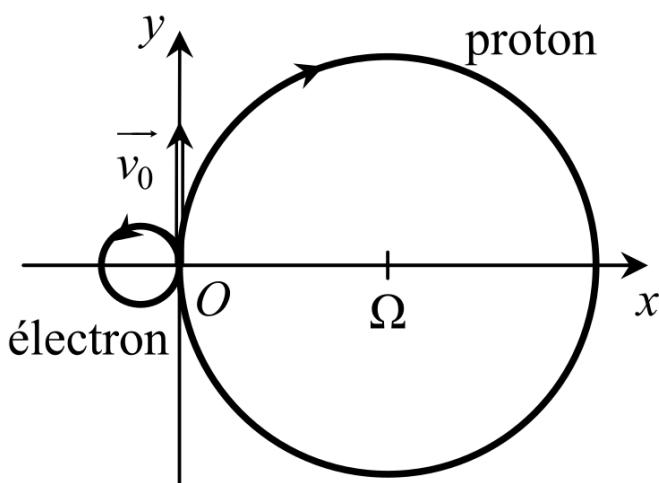


FIGURE M5.5 – Trajectoires pour un proton et un électron. Pour un proton, $\frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{qB} > 0$, donc la trajectoire est à droite, et le mouvement se fait dans le sens horaire.

À l'inverse, pour l'électron la trajectoire est à gauche et se fait dans le sens direct, mais avec un rayon beaucoup plus petit puisque proportionnel à m .



Les frottements du liquide sont maintenant modélisés par la force $\vec{F} = -\lambda \vec{v}_P$ avec λ une constante positive. On pose $\alpha = \lambda/m$.

- 3 Établir les nouvelles équations différentielles du mouvement (avec les paramètres ω et α). Montrer que le mouvement reste plan.

Réponse

On réemploie le PFD :

$$m \vec{a} = q \vec{v} \wedge \vec{B} - \lambda \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = +qB \dot{y} - \lambda \dot{x} \\ m \ddot{y} = -qB \dot{x} - \lambda \dot{y} \\ m \ddot{z} = -\lambda \dot{z} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \ddot{x} = +\omega\dot{y} - \alpha\dot{x} \\ \ddot{y} = -\omega\dot{x} - \alpha\dot{y} \\ \ddot{z} = -\alpha\dot{z} \end{cases} \quad (\text{M5.4})$$

$$(\text{M5.5})$$

$$(\text{M5.6})$$

Le mouvement reste plan, puisque la solution de l'équation M5.6 est $\dot{z}(t) = D \exp(-\alpha t)$, mais que $\dot{z}(0) = 0 \Rightarrow D = 0$, soit $[z = \text{cte} = 0]$.

- 4 Déterminer complètement les équations horaires de P. On pourra poser la variable complexe $\underline{u} = x + jy$, et déterminer tout d'abord $\dot{\underline{u}}$.

Réponse

En posant, comme suggéré, $\underline{u} = x + jy$, on combine (M5.4) + j(M5.5) pour avoir

$$\ddot{\underline{u}} + (\alpha + j\omega)\dot{\underline{u}} = 0$$

qui est une **équation différentielle d'ordre 2 sans ordre 0**, donc d'ordre 1 en $\dot{\underline{u}}$: on trouve donc les solutions avec une simple exponentielle :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{u}}(t) &= A \exp(-(\alpha + j\omega)t) \\ \text{avec } \dot{\underline{u}}(0) = 0 + jv_0 &= A \quad \text{soit } \dot{\underline{u}}(t) = jv_0 \exp(-(\alpha + j\omega)t) \\ \text{ainsi } \underline{u}(t) &= \frac{jv_0}{-(\alpha + j\omega)} \exp(-(\alpha + j\omega)t) + B \quad \text{or } \underline{u}(0) = 0 \Leftrightarrow B = \frac{jv_0}{\alpha + j\omega} \\ \text{finalement } \underline{u}(t) &= \frac{jv_0}{\alpha + j\omega} (1 - \exp(-(\alpha + j\omega)t)) \end{aligned}$$

En mettant la fraction avec un dénominateur réel et en séparant les exponentielles :

$$\underline{u}(t) = \frac{jv_0\alpha + v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} (1 - \exp(-\alpha t) \exp(-j\omega t))$$

puis en prenant la partie réelle pour obtenir $x(t)$ et la partie imaginaire pour obtenir $y(t)$ (**attention à bien distribuer la fraction**),

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} (1 - \exp(-\alpha t) \cos(\omega t)) - \frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \exp(-\alpha t) \sin(\omega t) \\ y(t) = \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \exp(-\alpha t) \sin(\omega t) + \frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} (1 - \exp(-\alpha t) \cos(\omega t)) \end{cases}$$

- 5 Déterminer les coordonnées du point asymptotique $P_{+\infty} = P(t \rightarrow \infty)$. Représenter sur un schéma la trajectoire d'un proton.

Réponse

Pour $t \rightarrow \infty$, le point d'asymptote est

$$P_{\infty} = \begin{pmatrix} \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \\ \frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La particule tourne toujours à cause des facteurs sinusoïdaux, mais le rayon de courbure diminue exponentiellement : la trajectoire est une spirale, tournant toujours vers la droite pour un proton, et s'enroulant autour du point P_{∞} .

