

Moment cinétique pour un point matériel

Sommaire

I Moment d'une force	2
I/A Par rapport à un point	2
I/B Par rapport à un axe <u>orienté</u>	3
I/C Bras de levier d'une force	3
II Moment cinétique	5
II/A Moment cinétique par rapport à un point	5
II/B Moment cinétique par rapport à un axe <u>orienté</u>	6
III Théorème du moment cinétique	6
III/A Par rapport à un point <i>fixe</i>	6
III/B Par rapport à un axe <u>orienté</u> <i>fixe</i>	6
III/C Application du pendule simple	7

Capacités exigibles

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ☐ Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté. ☐ Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté. ☐ Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté. ☐ Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen. | <ul style="list-style-type: none"> ☐ Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement. ☐ Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire. ☐ Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier. ☐ Identifier les cas de conservation du moment cinétique. |
|--|---|

L'essentiel

Définitions

- | | |
|--|---|
| ☐ M6.1 : Moment d'une force $\vec{M}_O(\vec{F})$ | 2 |
| ☐ M6.2 : Moment axial $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ | 3 |
| ☐ M6.3 : Droite d'action et bras de levier | 3 |
| ☐ M6.4 : Moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O(M,t)$ | 5 |
| ☐ M6.5 : Moment cinétique axial $\mathcal{L}_\Delta(M,t)$ | 6 |

Propriétés

- | | |
|--|---|
| ☐ M6.1 : Moment et bras de levier | 4 |
| ☐ M6.2 : $\mathcal{L}_\Delta$ indépendant point O | 6 |

Démonstrations

- | | |
|--|---|
| ☐ M6.1 : Moment et bras de levier | 4 |
| ☐ M6.2 : $\mathcal{L}_\Delta$ indépendant point O | 6 |

Théorèmes

- | | |
|---|---|
| ☐ M6.1 : TMC vectoriel | 6 |
| ☐ M6.2 : TMC scalaire | 6 |

Preuves

- | | |
|---|---|
| ☐ M6.1 : TMC vectoriel | 6 |
| ☐ M6.2 : TMC scalaire | 7 |

Interprétations

- | | |
|---|---|
| ☐ M6.1 : Sens d'un moment | 2 |
| ☐ M6.2 : Signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ | 3 |
| ☐ M6.3 : Moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O(M,t)$ | 5 |
| ☐ M6.4 : Signe de $\mathcal{L}_\Delta(M,t)$ | 6 |

Applications

- | | |
|--|---|
| ☐ M6.1 : Moment du poids | 2 |
| ☐ M6.2 : Moments par 2 méthodes | 4 |
| ☐ M6.3 : Trois forces pour un mouvement | 5 |
| ☐ M6.4 : Pendule simple par TMC | 7 |

Outils

- | | |
|---|---|
| ☐ M6.1 : Méthode du bras de levier | 4 |
|---|---|

Points importants

- | | |
|--|---|
| ☐ M6.1 : Bonnes pratiques | 3 |
|--|---|

Erreurs communes

- | | |
|--|---|
| ☐ M6.1 : Moment axial $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ | 3 |
| ☐ M6.2 : Moment vecteur et moment scalaire | 6 |

I Moment d'une force

I/A Par rapport à un point

Observation M6.1 : Rotation d'une planche

Lorsqu'une masse m est placée à distance d'un point « pivot », cette masse **génère une rotation**.

- ◇ On peut compenser cette rotation en mettant une **même masse** à la **même distance** de l'autre côté.
- ◇ On peut compenser cette rotation en mettant une **masse plus grande** à une **distance faible plus loin** du pivot.
- ◇ Ainsi l'effet est **proportionnel à la distance au pivot**.

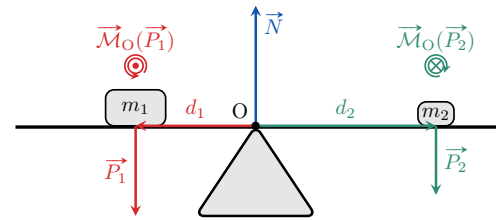


FIGURE M6.1

♥ Définition M6.1 : Moment d'une force $\vec{M}_O(\vec{F})$

Le moment d'une force $\vec{F}$ sur M par rapport à un point O est le **vecteur** :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

Unité

$$J = N \cdot m$$

♥ Interprétation M6.1 : Sens d'un moment

Le **sens** de $\vec{M}_O(\vec{F})$ indique la manière dont la force $\vec{F}$ a tendance à faire tourner M autour de O, et est donné par la **règle de la main droite version tire-bouchon**. Avec $\vec{u}_z$ ascendant,

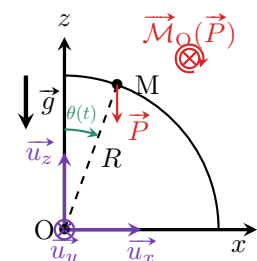
- ◇ Si $\vec{M}_O(\vec{F}) \parallel +\vec{u}_z$, $\vec{F}$ fait tourner M dans le **sens direct** autour de $\vec{u}_z$
- ◇ Si $\vec{M}_O(\vec{F}) \parallel -\vec{u}_z$, $\vec{F}$ fait tourner M dans le **sens horaire** autour de $\vec{u}_z$
- ◇ Si $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$, $\vec{F}$ ne fait pas tourner M par rapport à O.

	Direct	Horaire	Nul
3D			
2D			

Application M6.1 : Moment du poids

Un véhicule M de masse m se déplace sur un quart de cercle de rayon R . On note θ l'angle que fait OM avec la verticale. Calculer le moment de son poids.

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_O(\vec{P}) &= \vec{OM}(t) \wedge \vec{P} \\
 \Leftrightarrow \vec{M}_O(\vec{P}) &= R(\cos(\theta)\vec{u}_z + \sin(\theta)\vec{u}_x) \wedge (-mg\vec{u}_z) \\
 \Leftrightarrow \vec{M}_O(\vec{P}) &= +mgR\sin(\theta(t))\vec{u}_y
 \end{aligned}$$



Important M6.1 : Bonnes pratiques

- ◇ Il est **nécessaire** de décomposer les vecteurs **dans la même base**.
- ◇ On vérifie **systématiquement** la direction du moment calculé et le sens de rotation de la main droite.

I/B Par rapport à un axe orienté**Définition M6.2 : Moment axial $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$**

Le moment d'une force par rapport à un axe orienté Δ est le **scalaire** défini par :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

avec O un point de l'axe Δ . $\mathcal{M}_\Delta$ est donc le **projeté** du moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ sur l'axe Δ .

Attention M6.1 : Moment axial $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$

- 1) $\mathcal{M}_\Delta$ est un **scalaire** puisqu'il est issu d'un **produit scalaire**.
- 2) $\mathcal{M}_\Delta$ ne dépend pas du point O considéré.

Interprétation M6.2 : Signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$

Cette fois-ci c'est le **signe** de $\mathcal{M}_\Delta$ qui indique le **sens de rotation** par rapport à l'axe orienté :

- ◇ Si $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) > 0$, $\vec{F}$ fait tourner M dans le **sens direct** par rapport à l'orientation de Δ
- ◇ Si $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) < 0$, $\vec{F}$ fait tourner M dans le **sens horaire** par rapport à l'orientation de Δ
- ◇ Si $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$, $\vec{F}$ ne fait pas tourner M par rapport à Δ .

I/C Bras de levier d'une force**♥ Définition M6.3 : Droite d'action et bras de levier**

Pour calculer $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ (souvent, l'axe Δ est $(O, \vec{u}_\Delta)$), on décompose $\vec{F}$ en deux composantes :

- ◇ $\vec{F}_\Delta$ parallèle à Δ
- ◇ $\vec{F}_\square$ dans plan perp. à Δ
- ◇ telles que $\vec{F} = \vec{F}_\Delta + \vec{F}_\square$

Droite d'action

C'est la droite qui a **même direction** que la force et qui **passse par son point d'application**.

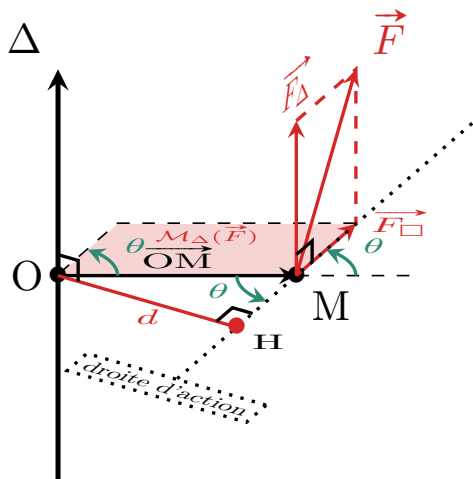


FIGURE M6.2 – Vue 3D

Bras de levier

C'est la **distance** $d = OH$ entre l'axe Δ et **H** le **projeté orthogonal** de O sur la **droite d'action** de $\vec{F}_\square$

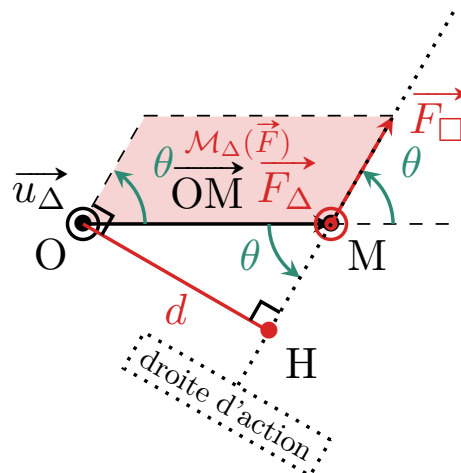


FIGURE M6.3 – Vue 2D

♥ Propriété M6.1 : Moment et bras de levier

Soit M un point matériel, Δ un axe orienté et $\vec{F}$ quelconque, telle que $\vec{F} = \vec{F}_\Delta + \vec{F}_\square$.

1) La force $\vec{F}_\Delta$ ne fait pas tourner M autour de Δ : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_\Delta) = 0$

2) La force $\vec{F}_\square$ fait tourner M proportionnellement à son bras de levier : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_\square) = \pm d \|\vec{F}_\square\|$

On détermine le signe $\pm$ avec la **règle de la main droite** (dans quel sens $\vec{F}_\square$ fait tourner M).

Démonstration M6.1 : Moment et bras de levier

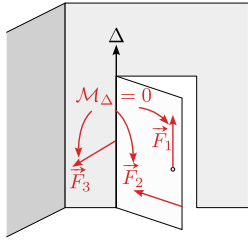
On commence par déterminer le moment de la force par rapport au point O de l'axe, puis on projette par produit scalaire avec $\vec{u}_\Delta$. On a donc :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) &= \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{OM} \wedge (\vec{F}_\Delta + \vec{F}_\square) \\ \Leftrightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) &= \underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{F}_\Delta}_{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_\Delta)} + \underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{F}_\square}_{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_\square)}\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) &= \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_\Delta) \cdot \vec{u}_\Delta}_{=0} + (\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_\square) \cdot \vec{u}_\Delta) \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) &= (\text{OM} \|\vec{F}_\square\| \sin(\theta) \vec{u}_\Delta) \cdot \vec{u}_\Delta \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) &= \underbrace{\text{OM} \sin(\theta)}_{\pm d} \|\vec{F}_\square\|\end{aligned}$$

Implication M6.1 : Cas de nullité



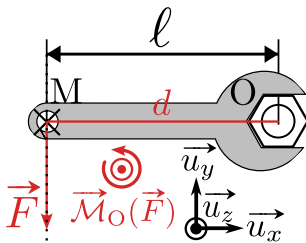
- ◇ On ne tire pas verticalement sur une porte : $\vec{F}_1 \parallel \vec{u}_\Delta \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta = 0$
- ◇ On ne tire pas parallèlement sur une porte : $\vec{F}_2 \parallel \vec{OM} \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta = 0$
- ◇ On ne tire pas sur une porte depuis ses gonds : $d_3 = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta = 0$

♥ Outils M6.1 : Méthode du bras de levier

- 1) **Identifier** l'axe de rotation Δ et le point O dans le plan perpendiculaire à $\vec{u}_\Delta$ passant par M ;
- 1') (Optionnel) **Projeter** $\vec{F}$ dans ce plan perpendiculaire pour avoir $\vec{F}_\square$ si nécessaire ;
- 2) **Tracer** la droite d'action de $\vec{F}_\square$, passant par M et dirigée par $\vec{F}_\square$;
- 3) **Placer** le point H et calculer géométriquement d ;
- 4) **Identifier** le sens de rotation avec la règle de la main droite.

Application M6.2 : Moments par 2 méthodes

Déterminer le moment sur z des forces sur les systèmes suivants par les deux méthodes présentées.



Bras de levier

$$d = l \quad \text{et} \quad \text{rotation sens direct selon } \vec{u}_z \Rightarrow \mathcal{M}_z(\vec{F}) = +\ell F$$

Calcul direct

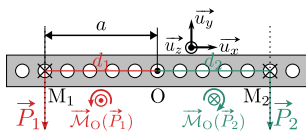
$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = (-\ell \vec{u}_x) \wedge (-F \vec{u}_y) = \ell F \vec{u}_z \Rightarrow \mathcal{M}_z(\vec{F}) = \ell F$$

Bras de levier

$$d_1 = d_2 = a ; \text{ direct pour 1, horaire pour 2} \Rightarrow \mathcal{M}_z(\vec{P}_1) = mga \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_z(\vec{P}_2) = -mga$$

Calcul direct

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_1) &= \vec{OM} \wedge \vec{P}_1 = (-a) \times (-mg) \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y \\ \Rightarrow \mathcal{M}_z(\vec{P}_1) &= mga \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_z(\vec{P}_2) = -mga\end{aligned}$$



Application M6.3 : Trois forces pour un mouvement

On considère trois forces, de normes égales à F , exercées sur une porte pour l'ouvrir. Laquelle est la plus efficace ? Justifier à l'aide du bras de levier.

- 1) La première force crée un moment $\mathcal{M}_z(\vec{F}_1) = +d_1 F$
- 2) La deuxième force crée un moment $\mathcal{M}_z(\vec{F}_2) = +d_2 F > d_1 F$
- 3) La troisième force crée un moment

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_3) = +d_3 F = d_2 \sin(\theta) F < d_2 F$$

C'est donc $\vec{F}_2$ la plus efficace.

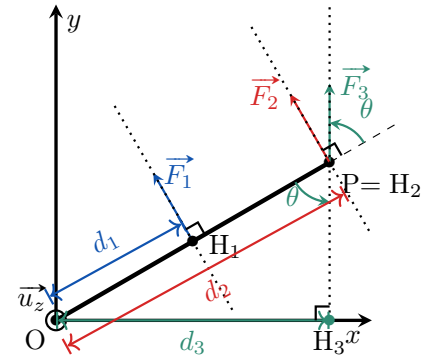


FIGURE M6.4 – Schéma

II Moment cinétique**II/A Moment cinétique par rapport à un point****♥ Définition M6.4 : Moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O(M,t)$**

Le moment cinétique d'un point M par rapport à un point O dans $\mathcal{R}$ est le **vecteur** :

$$\vec{\mathcal{L}}_{O/\mathcal{R}}(M,t) = \overrightarrow{OM}(t) \wedge \vec{p}_{M/\mathcal{R}}(t) = \overrightarrow{OM}(t) \wedge m \vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t)$$

Unité

$$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} = \text{J} \cdot \text{s}$$

Il traduit la « **quantité de rotation** » d'un point matériel.

♥ Interprétation M6.3 : Moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O(M,t)$

◇ Considérons un repère cylindrique autour de l'axe (Oz). On a alors

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}_r \\ \vec{v}(t) = \dot{r}(t) \vec{u}_r + r(t) \omega(t) \vec{u}_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{\mathcal{L}}_{O/\mathcal{R}}(M,t) &= (r(t) \vec{u}_r) \wedge m(\dot{r}(t) \vec{u}_r + r(t) \omega(t) \vec{u}_\theta) \\ &= m r^2(t) \omega(t) \vec{u}_z \end{aligned}$$

Ainsi, le **moment cinétique ne conserve une information que sur la rotation du système**. Si celui-ci est nul tout le temps, soit il n'y a pas de mouvement, soit le vecteur vitesse et le vecteur position sont colinéaires et le mouvement est rectiligne.

◇ Le **sens** de $\vec{\mathcal{L}}_O$ indique la manière dont M tourne autour de O. Pour $\vec{u}_z$ ascendant,

- ▷ Si $\vec{\mathcal{L}}_O(M,t) \parallel +\vec{u}_z$, M tourne dans le **sens direct** autour de $\vec{u}_z$
- ▷ Si $\vec{\mathcal{L}}_O(M,t) \parallel -\vec{u}_z$, M tourne dans le **sens horaire** autour de $\vec{u}_z$
- ▷ Si $\vec{\mathcal{L}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$, M ne tourne pas M par rapport à O.

	Direct	Horaire	Nul
3D			
2D			

II/B Moment cinétique par rapport à un axe orienté

Définition M6.5 : Moment cinétique axial $\mathcal{L}_\Delta(M, t)$

Le moment cinétique d'un point M par rapport à un axe orienté Δ dans $\mathcal{R}$ est le **scalaire** :

$$\mathcal{L}_\Delta(M, t) = \vec{\mathcal{L}}_{O/\mathcal{R}}(M, t) \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{OM}(t) \wedge \vec{p}_{M/\mathcal{R}}(t)) \cdot \vec{u}_\Delta$$

avec O un point de l'axe. $\mathcal{L}_\Delta$ est le projeté du moment $\vec{\mathcal{L}}_{O/\mathcal{R}}$ sur Δ .

Interprétation M6.4 : Signe de $\mathcal{L}_\Delta(M, t)$

Cette fois-ci aussi, c'est le **signe** de $\mathcal{L}_\Delta$ qui indique le sens de rotation de M autour de l'axe.

♥ Attention M6.2 : Moment vecteur et moment scalaire

$\mathcal{L}_\Delta$ est un scalaire, alors que $\vec{\mathcal{L}}_O$ est un vecteur !

♥ Propriété M6.2 : $\mathcal{L}_\Delta$ indépendant point O

$\mathcal{L}_\Delta$ est indépendant du point O de l'axe Δ .

Démonstration M6.2 : $\mathcal{L}_\Delta$ indépendant point O

$$\vec{\mathcal{L}}_{O'/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_\Delta = [(\vec{O'O} + \vec{OM}) \wedge \vec{p}_{M/\mathcal{R}}] \cdot \vec{u}_\Delta = \overbrace{(\vec{O'O} \wedge \vec{p}_{M/\mathcal{R}}) \cdot \vec{u}_\Delta}^{=0} + \vec{\mathcal{L}}_{O/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{\mathcal{L}}_{O/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_\Delta$$

III Théorème du moment cinétique

III/A Par rapport à un point *fixe*

♥ Théorème M6.1 : du moment cinétique par rapport à un point *fixe*

Pour un point matériel M de masse m soumis à des forces extérieures $\vec{F}_i$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen et O un point **fixe** dans $\mathcal{R}$, on a

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{O/\mathcal{R}}(M, t)}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i)$$

Preuve M6.1 : TMC vectoriel

Il suffit ici d'appliquer $\vec{OM} \wedge$ ou de partir du résultat.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\mathcal{L}}_{O/\mathcal{R}}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge \vec{p}) \\ \Leftrightarrow \frac{d\vec{\mathcal{L}}_{O/\mathcal{R}}}{dt} &= \underbrace{\frac{d\vec{OM}}{dt}}_{=\vec{0}} \wedge \vec{p} + \vec{OM} \wedge \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{=\sum_i \vec{F}_i} \\ &\Leftrightarrow \frac{d\vec{\mathcal{L}}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \sum_i \vec{OM} \wedge \vec{F}_i \\ &\Leftrightarrow \frac{d\vec{\mathcal{L}}_{O/\mathcal{R}}}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

III/B Par rapport à un axe orienté *fixe*

♥ Théorème M6.2 : du moment cinétique par rapport à un axe orienté *fixe*

Pour un point matériel M de masse m soumis à des forces extérieures $\vec{F}_i$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen et Δ un axe orienté **fixe** dans $\mathcal{R}$, on a

$$\frac{d\mathcal{L}_\Delta(M, t)}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$$

Preuve M6.2 : TMC scalaire

On projette simplement le TMC version vectorielle sur $\vec{u}_\Delta$:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} &= \frac{d\vec{\mathcal{L}}_{O/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_\Delta}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} &= \frac{d\vec{\mathcal{L}}_{O/\mathcal{R}}}{dt} \cdot \vec{u}_\Delta + 0 = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) \cdot \vec{u}_\Delta \\ \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} &= \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)\end{aligned}$$

III/C Application du pendule simple**♥ Application M6.4 : Pendule simple par TMC**

1 **Système et réf.** : {masse M} dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen

2 **Repère et repérage** :

◇ **Repère** : $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

◇ **Repérage** : $\vec{OM}(t) = \underset{=\text{cte}}{\ell} \vec{u}_r$

$$\vec{v}(t) = \ell \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = -\ell \dot{\theta}^2(t) \vec{u}_r + \ell \ddot{\theta}(t) \vec{u}_\theta$$

Nouveauté : $\vec{\mathcal{L}}_O(M) = (\ell \vec{u}_r) \wedge (m \ell \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = m \ell^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z$

◇ **Conditions initiales** : $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$

3 **Bilan des forces.**

Poids $\vec{P} = m \vec{g} = mg(\cos(\theta(t)) \vec{u}_r - \sin(\theta(t)) \vec{u}_\theta)$

Tension $\vec{T} = -T \vec{u}_r$

3 **Bilan des moments des forces.**

◇ **Bras de levier**
$$\begin{cases} \mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mgd = -mg\ell \sin(\theta(t)) \\ \mathcal{M}_z(\vec{T}) = 0 \quad \text{car} \quad \vec{T} \parallel \vec{OM} \end{cases}$$

◇ **Calcul direct**
$$\begin{cases} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = (\ell \vec{u}_r) \wedge mg(\cos(\theta) \vec{u}_r - \sin(\theta) \vec{u}_\theta) = -mg\ell \sin(\theta(t)) \vec{u}_z \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = (\ell \vec{u}_r) \wedge (-T \vec{u}_r) = \vec{0} \end{cases}$$

4 **TMC** :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} &= \sum_i \mathcal{M}_i \\ \Leftrightarrow m \ell^2 \ddot{\theta}(t) &= -mg\ell \sin(\theta(t)) + 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) &= 0\end{aligned}$$

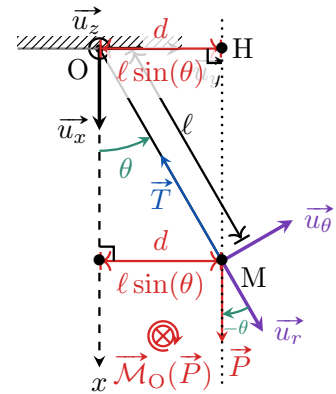


FIGURE M6.5 – 4