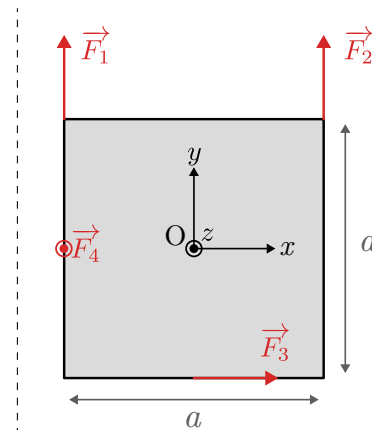


TD application : moment cinétique



I Calcul de moments

Une plaque carrée de côté a dans le plan (Oxy) et centrée en O subit des forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ et $\vec{F}_4$ toutes de même norme F , telles que représentées ci-contre.



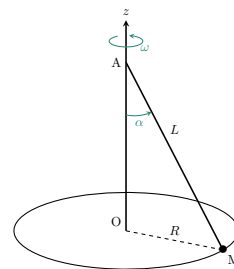
- 1 Calculer les moments de chacune de ces forces par rapport au point O .



II Pendule conique

Dans un champ uniforme de pesanteur $\vec{g}$ vertical et vers le bas, un point matériel M de masse m tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz) , dirigé vers le haut, et décrit ainsi un cercle de centre O et de rayon R . M est suspendue à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, fixé en un point A de (Oz) . L'angle α de (Oz) avec AM est constant.

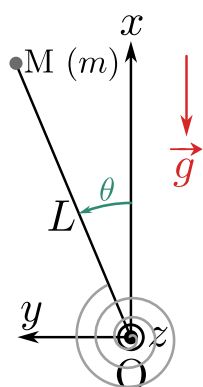
On travaille dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On utilisera le repère de la base cylindrique tel que $\vec{OM} = R\vec{u}_r$.



- 1 Exprimer le moment cinétique de M par rapport à A en fonction de m , L , ω et α .
- 2 Calculer les moments vectoriels des forces par rapport à A , puis appliquer le TMC vectoriel pour déduire $\cos(\alpha)$ en fonction de g , L et ω .
- 3 Pourquoi ne peut-on pas appliquer le TMC scalaire dans ce cas ?
- 4 Retrouver le résultat à partir du PFD.



III Gravimètre de HOLWECK-LEJAY



Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité M d'une tige de masse négligeable et de longueur $L = OM$, articulée en O et mobile dans un plan vertical. Un ressort « spirale » (en gris sur la figure) exerce sur M , via la tige, un couple de rappel (notion abordée au chapitre 8) équivalent à un moment de force $\vec{M}_O(\vec{F}_r) = -C\theta(t)\vec{u}_z$, avec $C > 0$.

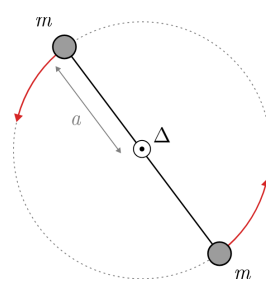
- 1 Déterminer, par l'application du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) , l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
- 2 À partir de cette équation différentielle, établir une intégrale première du mouvement (rappel : multiplier par $\dot{\theta}(t)$) et donner sa signification physique. Montrer alors que la force de rappel du ressort spiral dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,el}$ dont on donnera l'expression.
- 3 En exprimant la condition d'équilibre de ce système, montrer que $\theta_{eq} = 0$ est une position d'équilibre. En exprimant la condition de stabilité de cette position d'équilibre, montrer que celle-ci est stable si et seulement si $C > mgL$.
- 4 Retrouver cette condition de stabilité à partir de l'équation différentielle du mouvement linéarisée pour les petites oscillations autour de $\theta_{eq} = 0$. On introduira pour cela la pulsation propre ω_0 de ces petites oscillations.
- 5 Exprimer alors la période propre T_0 des petites oscillations autour de $\theta_{eq} = 0$ en fonction de m , L , C et g . En posant $g_0 = \frac{C}{mL}$, en déduire une méthode de mesure de g .



IV Bolas

On lance des bolas en rotation autour d'un axe orienté Δ à la vitesse angulaire ω_0 . On note $2a$ la longueur de la corde reliant les masses m , et on suppose que cette dernière est tendue au moment du lancer. Le coefficient de frottements visqueux de l'air est noté α .

On suppose que l'axe Δ est fixe dans un référentiel galiléen et que les bolas tournent suffisamment rapidement pour négliger la gravité.

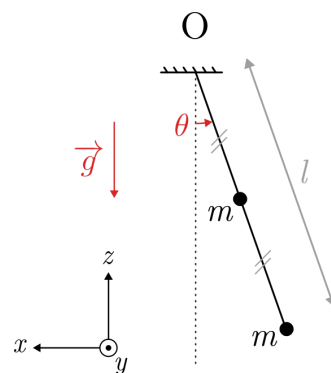


- 1 Par application du TMC, établir l'équation d'évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$. La résoudre.
- 2 La corde va-t-elle se détendre à un moment ? Proposer une explication à ce résultat.
- 3 Quelles grandeurs doit-on comparer pour effectivement pouvoir négliger la gravité ?



V Pendule lesté

On reprend le problème du pendule simple, attaché par une tige fixe de masse négligeable, mais on suppose que l'on ajoute une deuxième masse identique à la première à la distance $\ell/2$ de O



- 1 Montrer que l'équation du mouvement est

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{6}{5} \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) = 0$$

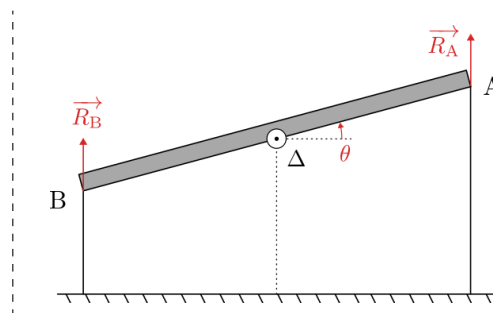
TD entraînement : moment cinétique



I Transport d'une poutre

- 1 Alice et Bob transportent une poutre de masse M de longueur ℓ . Ils se placent chacun à une extrémité de celle-ci. Justifier leur choix de placement *a priori*.

Bob commence à se plaindre, invoquant le fait qu'il soit plus petit comme excuse : « je me prends plus de poids ! », dit-il. On schématise la situation selon la Figure ci-contre. On note $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$ les forces sur la poutre d'Alice et Bob respectivement.



- 2 Exprimer les moments de ces forces par rapport à l'axe orienté Δ en fonction de ℓ , θ et leurs normes R_A et R_B .
- 3 Écrire le théorème du moment cinétique et en déduire le « poids » (pour reprendre les mots de Bob) subit par chaque personne.
- 4 La raison invoquée par Bob est-elle valide ?
- 5 Que se passerait-il si Alice et Bob se rapprochaient autant du centre de la poutre ? Quels inconvénients ou avantages cela présenterait-il ?



II Curiosité de Sommerfeld

- 1 Prenez un crayon et posez horizontalement sur vos deux indexes, peu importe leurs emplacements. Ensuite essayez de rapprocher doucement vos doigts en les déplaçant horizontalement. Ils finissent toujours par se toucher au milieu (au centre de gravité de manière plus générale) du crayon, en alternant les mouvements de chaque doigt. Pourquoi ?

On rappelle que la norme de la composante tangentielle de la force de frottements solides T est liée à la composante normale N par la relation $T = \mu N$ quand il y a glissement, avec μ le coefficient de frottement solide.



III Drone quadrirotor

Les drones quadrirotor sont maintenus en l'air grâce à un jeu de 4 hélices.



FIGURE M7.1 – Photo d'un drone quadrirotor

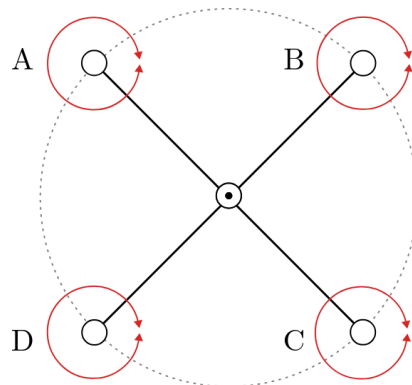


FIGURE M7.2 – Modélisation du drone quadrirotor

On nomme les hélices A, B, C et D. On sait qu'elles sont de même taille et tournent à la même vitesse.

- 1 Intégrer le théorème du moment cinétique entre le début du décollage et l'instant final où le drone est en équilibre en l'air. En déduire la valeur finale du moment cinétique $\mathcal{L}$ par rapport à l'axe de symétrie vertical.
- 2 Pour une hélice en rotation dans le sens horaire, quel est son effet sur la rotation du corps ?
- 3 En étudiant la force exercée par une hélice sur le centre de gravité du corps, expliquer comment choisir les sens de rotation de deux hélices opposées.
- 4 Comment choisir le sens de rotations des quatre hélices ?
- 5 Si l'une des hélices vient à perdre en régime, quelle opération doit être faite pour restabiliser l'appareil ? Quel inconvénient cela a-t-il ?



IV Hélicoptère

Un hélicoptère est constitué de son corps (cockpit + queue de longueur h) et de son rotor sur lequel sont fixées des hélices de rayon r_1 et de masse m_1 .

On considère que la phase de décollage consiste en l'accélération de pâles de $\omega = 0$ à $\omega = \omega_1$. On négligera tous les frottements et la gravité (puisque l'hélicoptère quitte tout juste le sol à la fin de cette phase).



On suppose que le moment cinétique d'une hélice de masse m et de rayon r en rotation à la vitesse angulaire ω vaut

$$\mathcal{L} = \frac{2}{3}mr^2\omega$$

et qu'elle crée une force de poussée

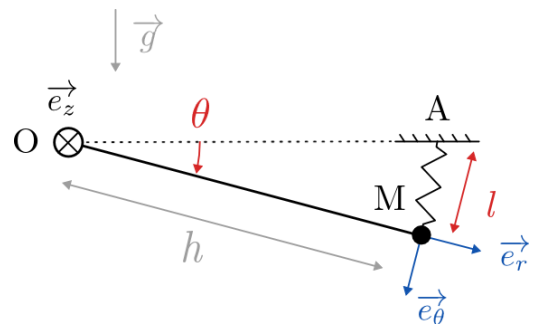
$$F = \alpha r^2 \omega \quad \text{avec} \quad \alpha > 0$$

- 1 En étudiant la phase de décollage, exprimer le moment cinétique $\mathcal{L}$ de l'hélicoptère par rapport à l'axe de rotation des hélices, une fois celui-ci en l'air. Quel problème cela engendre-t-il ?
- 2 Quelle solution a été apportée par les ingénieur-es pour résoudre ce problème ? Vous donnerez des résultats quantitatifs.



V Tige et ressort

Une masse est fixée au bout d'une tige rigide de longueur h et de masse négligeable, ainsi qu'au bout d'un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle. Le tout est dans un champ de pesanteur $\vec{g}$. Le ressort est fixé en un point A placé horizontalement à O, à une distance h .



- 1 Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans le repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. En déduire que la longueur ℓ du ressort est

$$\ell = h\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}$$

- 2 Calculer les moments des forces en jeu.
- 3 En déduire la forme mathématique de la position d'équilibre θ_{eq} .