

Mouvement à force centrale conservative

Sommaire

I Généralités	2
I/A Forces centrales conservatives et newtoniennes	2
I/B Conservation du moment cinétique et conséquences	3
I/C Étude des trajectoires	4
II Mécanique céleste	7
II/A Lois de KEPLER	7
II/B Cas particulier du mouvement circulaire et généralisation	7
II/C Satellite en orbite terrestre	8

Capacités exigibles

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> ☐ Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion. ☐ Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. ☐ Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique. ☐ Satellites géostationnaire, de localisation et de navigation, météorologique. ☐ Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique et les conséquences de cette conservation : mouvement plan, loi des aires. | <ul style="list-style-type: none"> ☐ Établir quand le mouvement est uniforme et déterminer sa période. ☐ Établir la troisième loi de KEPLER dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique. ☐ Exprimer l'énergie mécanique pour les mouvements circulaire et elliptique (en fonction du demi-grand axe). ☐ Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions ; déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial. |
|--|--|

L'essentiel

Définitions

- | | |
|---|----|
| ☐ M7.1 : Force centrale, conservative, newtonienne | 2 |
| ☐ M7.2 : Ellipse | 7 |
| ☐ M7.3 : 1 ^{re} vitesse cosmique | 8 |
| ☐ M7.4 : 2 ^{de} vitesse cosmique | 9 |
| ☐ M7.5 : Satellite géostationnaire | 9 |
| ☐ M7.6 : Autres satellites | 10 |

Propriétés

- | | |
|--|----|
| ☐ M7.1 : $\mathcal{E}_p$ force centrale conservative et newtonienne | 2 |
| ☐ M7.2 : Conservation du moment cinétique | 3 |
| ☐ M7.3 : Conséquence : mouvement plan | 3 |
| ☐ M7.4 : Conséquence : constante et loi des aires | 4 |
| ☐ M7.5 : Énergie potentielle effective, cas newtonien | 4 |
| ☐ M7.6 : $\mathcal{E}_{p,eff}$ newtonienne et cas attractif | 5 |
| ☐ M7.7 : Vitesse en orbite circulaire | 7 |
| ☐ M7.8 : Période circulaire | 8 |
| ☐ M7.9 : $\mathcal{E}_m$ circulaire | 8 |
| ☐ M7.10 : 1 ^{re} vitesse cosmique | 8 |
| ☐ M7.11 : 2 ^{de} vitesse cosmique | 9 |
| ☐ M7.12 : Satellite géostationnaire | 10 |

Démonstrations

- | | |
|--|----|
| ☐ M7.1 : $\mathcal{E}_p$ force centrale conservative et newtonienne | 2 |
| ☐ M7.2 : Conservation du moment cinétique | 3 |
| ☐ M7.3 : Mouvement plan | 3 |
| ☐ M7.4 : Loi des aires | 4 |
| ☐ M7.5 : Énergie potentielle effective | 5 |
| ☐ M7.6 : $\mathcal{E}_{p,eff}$ attractive | 5 |
| ☐ M7.7 : Vitesse en orbite circulaire | 8 |
| ☐ M7.8 : Période circulaire | 8 |
| ☐ M7.9 : $\mathcal{E}_m$ circulaire | 8 |
| ☐ M7.10 : Première vitesse cosmique | 9 |
| ☐ M7.11 : Seconde vitesse cosmique | 9 |
| ☐ M7.12 : Satellite géostationnaire | 10 |

Lois

- | | |
|---|---|
| ☐ M7.1 : de KEPLER | 7 |
|---|---|

Points importants

- | | |
|--|---|
| ☐ M7.1 : Trajectoires cas attractif | 5 |
| ☐ M7.2 : Trajectoires cas répulsif | 6 |

Erreurs communes

- | | |
|---|----|
| ☐ M7.1 : Vitesse des orbites elliptiques | 8 |
| ☐ M7.2 : Jours solaire et sidéral | 10 |

I Généralités

I/A Forces centrales conservatives et newtoniennes

Définition M7.1 : Force centrale, conservative, newtonienne

Une force $\vec{F}$ est dite **centrale** s'il existe un point O fixe (dans $\mathcal{R}$) tel que $\vec{F}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ pour tout point M; O est alors appelé **centre de force**. Autrement dit,

Elle est **conservative** si elle **dérive d'une énergie potentielle**.

Une force **newtonienne** est une **force centrale conservative** de la forme

$$\text{avec } \begin{cases} k > 0 \Rightarrow \\ k < 0 \Rightarrow \end{cases}$$

Force gravitationnelle

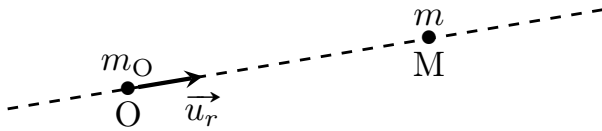


FIGURE M7.1 – $\vec{F}_g$

Force coulombienne

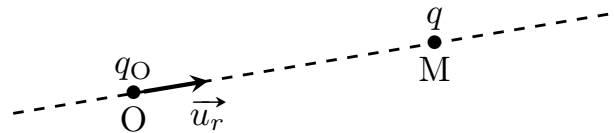


FIGURE M7.2 – $\vec{F}_e$

♥ Propriété M7.1 : $\mathcal{E}_p$ force centrale conservative et newtonienne

L'énergie potentielle d'une force centrale conservative ne **dépend que du rayon** :

et pour une force newtonienne,

En fixant par convention $\mathcal{E}_p(+\infty) = 0 \Leftrightarrow K = 0$, on obtient :

Interaction gravitationnelle

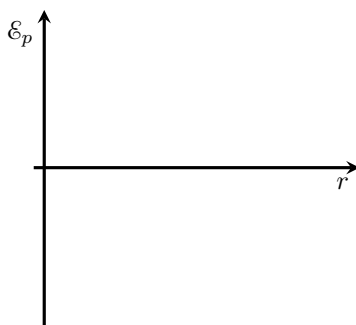


FIGURE M7.3 – $\mathcal{E}_{p,g}(r)$

Interaction électrostatique

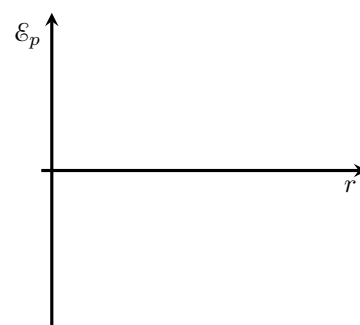


FIGURE M7.4 – $\mathcal{E}_{p,e}(r)$

♥ Démonstration M7.1 : $\mathcal{E}_p$ force centrale conservative et newtonienne

Plaçons-nous dans le plan contenant $\overrightarrow{OM}$ dans un repère cylindrique centré en O, avec $\vec{F} = F(M,t) \vec{u}_r$. On a alors deux méthodes :

Utilisation du travail

Utilisation du gradient

Ainsi, $\mathcal{E}_p$ ne dépend ni de θ ni de z , donc dépend uniquement des variables r et t . ■

Appliqué aux cas newtoniens, on obtient :

Interaction gravitationnelle

Interaction électrostatique

Rappel M7.1 : Constantes dans les $\mathcal{E}_p$

Les énergies potentielles sont toujours définies à une constante près, qu'il convient de déterminer !

I/B

Conservation du moment cinétique et conséquences

♥ Propriété M7.2 : Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique d'un système soumis uniquement à $\vec{F}$ centrale est un vecteur constant :

♥ Démonstration M7.2 : Conservation du moment cinétique

ainsi ■

♥ Propriété M7.3 : Conséquence : mouvement plan

La conservation du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point O fixe dans $\mathcal{R}$ implique que le mouvement se fait dans le plan défini par $\vec{OM}(0)$ et $\vec{v}(0)$.

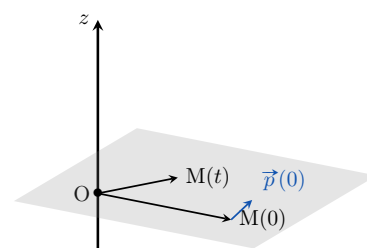


FIGURE M7.5 – Mouvement plan

♥ Démonstration M7.3 : Mouvement plan

Soit $\vec{u}_z$ la direction initiale du moment cinétique, c'est-à-dire $\vec{\mathcal{L}}_O(0) = \vec{OM}(0) \wedge m\vec{v}(0) = \mathcal{L}_0\vec{u}_z$: $\vec{u}_z$ définit donc une direction perpendiculaire à $\vec{OM}(0)$ et $\vec{v}(0)$. Or, comme $\vec{\mathcal{L}}_O$ se conserve, on a

donc $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ restent orthogonaux à $\vec{u}_z \forall t$, donc le mouvement reste dans le plan initial. En effet,

♥ Propriété M7.4 : Conséquence : constante et loi des aires

Constante des aires

On appelle C la **constante des aires**, telle que :

Loi des aires

L'aire balayée $d\mathcal{A}$ par $\overrightarrow{OM}$ en un temps dt est constante :

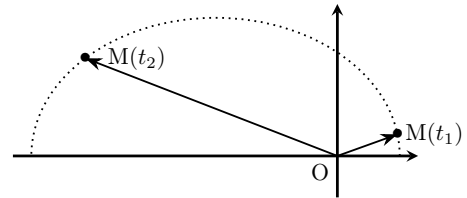


FIGURE M7.6 – Loi des aires.

♥ Démonstration M7.4 : Loi des aires

Constante des aires

Le mouvement étant plan, on peut se placer en coordonnées polaires et calculer $\vec{\mathcal{L}}_O$:

Or, $\vec{\mathcal{L}}_O = \vec{r} \times \vec{p}$, donc

Loi des aires

Or, l'aire balayée $d\mathcal{A}$ pendant un temps dt se calcule par produit vectoriel, qui se relie au moment cinétique :

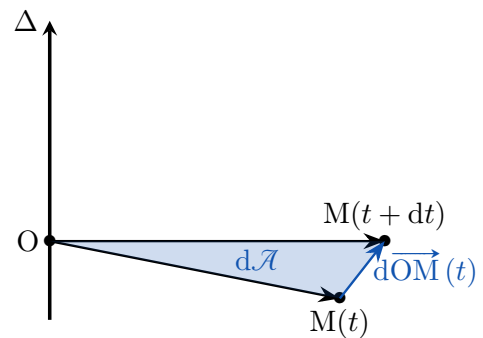


FIGURE M7.7 – Aire balayée.

et ce peu importe la position du corps au point O.

I/C Étude des trajectoires

♥ Propriété M7.5 : Énergie potentielle effective, cas newtonien

L'énergie mécanique d'un point matériel M soumis à une force centrale **conservative** est **constante**. Grâce à la constante des aires, on peut la mettre sous une forme n'utilisant que la variable r et sa dérivée :

avec

$$\text{Si } \vec{F} \text{ newtonienne, } \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \\ \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \end{cases}$$

♥ Démonstration M7.5 : Énergie potentielle effective

💡 Interprétation M7.1 : Énergie potentielle effective

L'énergie potentielle effective permet de se ramener à l'étude d'une seule dimension, ici r la distance au centre de force, plutôt que d'utiliser à la fois r et θ , en considérant $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ comme l'énergie potentielle du système et $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ son énergie cinétique.

♥ Propriété M7.6 : $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ newtonienne et cas attractif

Pour une force attractive ($k > 0$), $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ présente un minimum en $r_{\min}$ tel que :

et il existe donc des **états liés** pour lesquels $\mathcal{E}_m < 0$, et des **états de diffusion** pour lesquels $\mathcal{E}_m \geq 0$.

♥ Démonstration M7.6 : $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ attractive

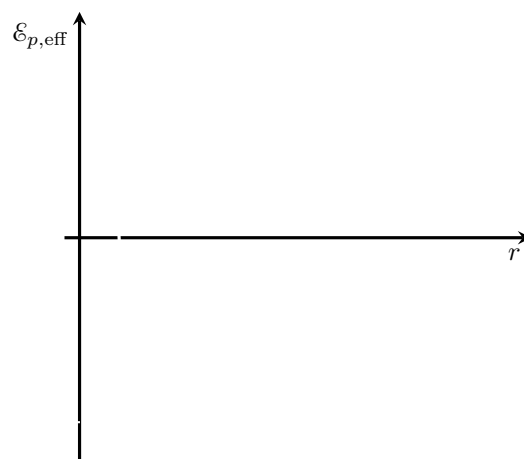


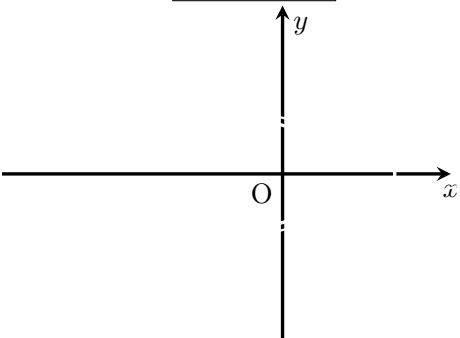
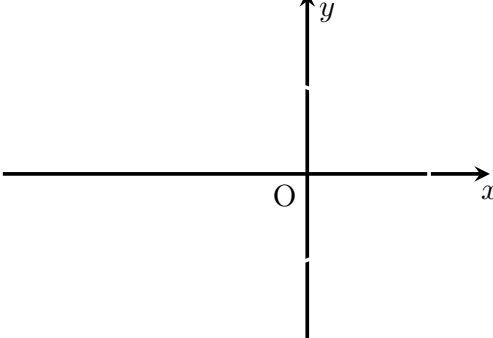
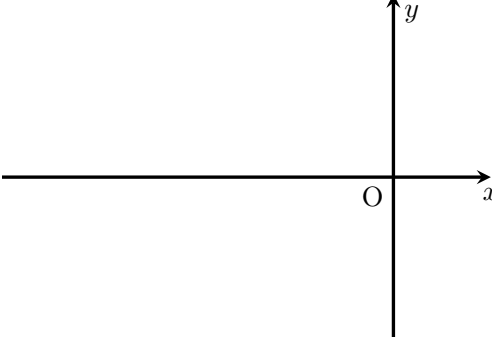
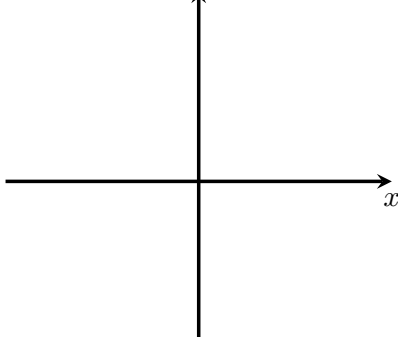
FIGURE M7.8 – $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ cas attractifs.

♥ Important M7.1 : Trajectoires cas attractif

Comme $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}$, on a forcément $\mathcal{E}_{p,\text{eff}} < \mathcal{E}_m$. Ainsi, selon la valeur de $\mathcal{E}_m$ par rapport à $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$, le système aura différentes trajectoires, toutes ayant O comme foyer ou centre :

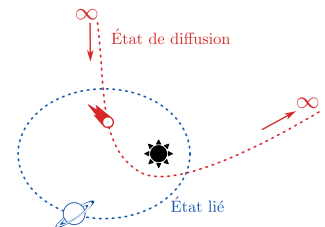
◇ $\mathcal{E}_m \geq 0$:

◇ $\mathcal{E}_m < 0$:

État	ε_m	Trajectoires
Diffusion	$\varepsilon_m \geq 0$	$0 < \varepsilon_m < \infty$  Hyperbolique
	$\varepsilon_m = 0$	 Parabolique
Lié	$\varepsilon_m < 0$	$-\varepsilon_0 < \varepsilon_m < 0$  Elliptique
	$\varepsilon_m = -\varepsilon_0$	 Circulaire

Exemple M7.1 : État lié, état de diffusion

- ◇ Les planètes du système solaire restent confinées près du Soleil, ce sont donc des états liés.
- ◇ Un état de diffusion correspond par exemple au cas d'un comète arrivant vers le Soleil, atteignant une distance minimale avant de retourner à l'infini.



♥ Important M7.2 : Trajectoires cas répulsif

Dans le cas répulsif $\varepsilon_{p,\text{eff}}^{\text{rep}} > 0$ n'a pas de minimum : la trajectoire est toujours hyperbolique.

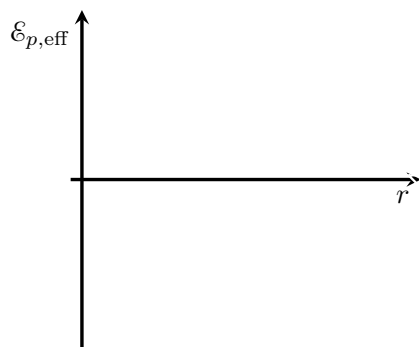


FIGURE M7.9 – $\varepsilon_{p,\text{eff}}$ cas répulsif.

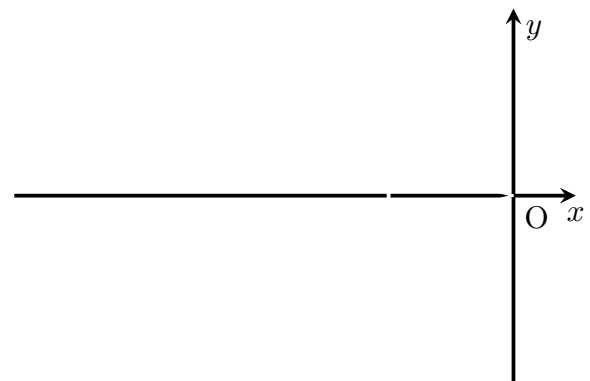


FIGURE M7.10 – Trajectoire cas répulsif.

II Mécanique céleste

II/A Lois de KEPLER

Les lois de KEPLER ont été établies par Johannes KEPLER au début du XVII^e siècle (publiées en 1609 et 1619) à partir de relevés expérimentaux effectués par Tycho BRAHE à la fin du XVI^e siècle. Voir [cette animation](#).

♥ Loi M7.1 : de KEPLER

- 1) Loi des orbites :
- 2) Loi des aires :
- 3) Loi des périodes :

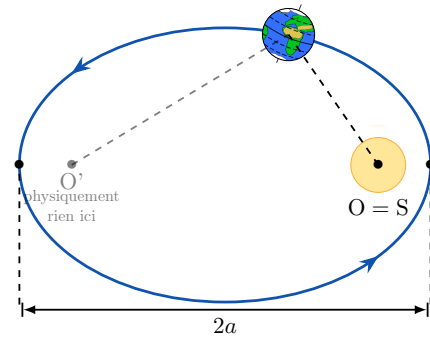


FIGURE M7.11 – 1^{re} loi de KEPLER

♥ Définition M7.2 : Ellipse

Une ellipse est l'ensemble des points M tels que

avec O et O' les **foyers** de l'ellipse, et son **a** **demi-grand axe**.

Le point le plus proche s'appelle le **péricentre** (péri-gée pour la Terre, périhélie pour le Soleil), noté P, et le plus éloigné s'appelle l'**apocentre** (apogée pour la Terre, aphélie pour le Soleil), noté A.

Par construction, on a donc

◇

◇

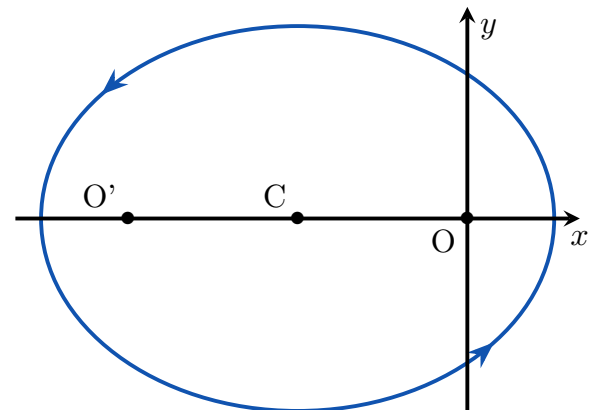


FIGURE M7.12 – Ellipse et paramètres

Application M7.1 : Troisième loi de KEPLER

Calculer la période de révolution de Mars autour du Soleil. On donne $a_{\text{Terre}} = 150 \times 10^6$ km et $a_{\text{Mars}} = 228 \times 10^6$ km.

II/B Cas particulier du mouvement circulaire et généralisation

♥ Propriété M7.7 : Vitesse en orbite circulaire

Le mouvement circulaire d'un astre autour d'un autre est nécessairement uniforme, et on a

♥ Démonstration M7.7 : Vitesse en orbite circulaire

1 **Système et référentiel** : {planète} point matériel M de masse m , dans

2 **Repère et repérage** : cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ avec O centre du Soleil, R le rayon supposé constant ($\dot{R} = 0$),

3 **Bilan des forces** : donc

5 **PFD** :

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{(M7.1)} \\ \text{(M7.2)} \end{array} \right.$$

6 **Vitesse du mouvement circulaire** : l'équation (M7.2) donne $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte}$, et (M7.1) donne

$$\Leftrightarrow$$

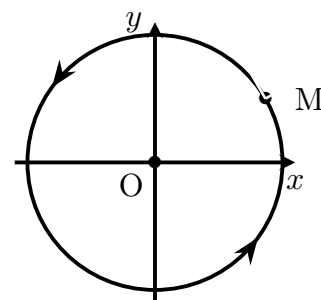


FIGURE M7.13 – 4

(M7.1)

(M7.2)

(M7.3)

♥ Attention M7.1 : Vitesse des orbites elliptiques

Le mouvement elliptique n'est pas uniforme !

♥ Propriété M7.8 : Période circulaire

La période de révolution du mouvement circulaire d'un astre autour d'un autre vérifie

Pour l'ellipse, on remplace R par a .

♥ Démonstration M7.8 : Période circulaire

En effet, avec (M7.3),

♥ Propriété M7.9 : ε_m circulaire

L'énergie mécanique du mouvement circulaire d'un astre autour d'un autre vérifie

Pour l'ellipse, on remplace R par a .

♥ Démonstration M7.9 : ε_m circulaire

Enfin, avec (M7.3) et l'énergie potentielle :

II/C Satellite en orbite terrestre

II/C) 1 Vitesses cosmiques

Définition M7.3 : 1^{re} vitesse cosmique

La première vitesse cosmique, ou *vitesse de satellisation minimale*, est la **vitesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir le placer en orbite **circulaire** à sa surface

Propriété M7.10 : 1^{re} vitesse cosmique

Sur Terre, on trouve

Démonstration M7.10 : Première vitesse cosmique

Pour satelliser un corps, il faut faire varier son **énergie mécanique** d'un état partant **du sol** jusqu'**en orbite**. La **plus petite** énergie mécanique pour cela est celle de la **trajectoire circulaire de rayon R_T** . Ainsi, à partir de l'énergie mécanique d'un objet lancé au niveau du sol, on a

et

Or $\mathcal{E}_m = \text{cte} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow$

On retrouve v_{cercle} avec $R = R_T$! Pour des altitudes plus élevées, il faut davantage de vitesse.

Définition M7.4 : 2^{de} vitesse cosmique

La seconde vitesse cosmique, ou *vitesse de libération* et notée v_{lib} , correspond à la **vitesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir **l'éloigner définitivement** de la Terre.

Propriété M7.11 : 2^{de} vitesse cosmique

Pour la Terre, on trouve

Démonstration M7.11 : Seconde vitesse cosmique

Pour éloigner définitivement un objet de la Terre, il faut un **état de diffusion**, donc que sa trajectoire soit au **minimum parabolique** :

et

Or $\mathcal{E}_m = \text{cte} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow$

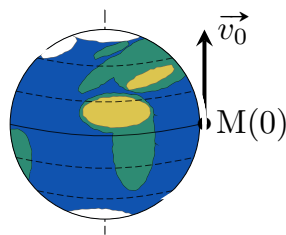
Exemple M7.2 : Trajectoires depuis la Terre

FIGURE M7.14 – Le code couleur correspond à celui de la Section I/C– Étude des trajectoires. La réalité est évidemment plus complexe que ça, étant donné les frottements, la non-galiléianité des référentiels, la prise en compte de la masse de carburant nécessaire, etc. . .

II/C) 2 Satellites artificiels**Définition M7.5 : Satellite géostationnaire**

Un satellite géostationnaire est un satellite qui **reste constamment au-dessus d'un même point** de la surface terrestre ; il apparaît donc immobile pour un observateur terrestre.

Mission typique : obtenir des images fixes de la Terre avec une vue éloignée (à des fins météorologiques par exemple).

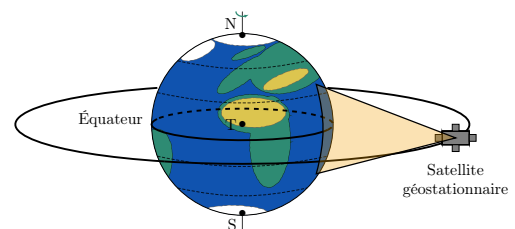


FIGURE M7.15 – Satellite géostationnaire.

♥ Propriété M7.12 : Satellite géostationnaire

- 1) Le plan de son orbite est le **plan de l'équateur** ;
- 2) Sa **vitesse angulaire est constante**, et vaut
- 3) Son **rayon est constant**, et on trouve soit

♥ Attention M7.2 : Jours solaire et sidéral

Il existe deux durées qui peuvent s'appeler « jour » :

- ◇ le **jour sidéral**, que l'on croit à tort être celui qu'on emploie au quotidien, et qui correspond à la durée nécessaire pour que la Terre effectue une **rotation complète sur elle-même** :
- ◇ le **jour solaire** est l'intervalle de temps séparant deux **passages du Soleil au zénith** d'un point donné de la Terre, i.e. le temps qui sépare deux « midis » sur Terre ; on a

Ces deux notions diffèrent légèrement à cause de la révolution de la Terre autour du Soleil.

FIGURE M7.16

♥ Démonstration M7.12 : Satellite géostationnaire

- 1) En effet, la force étant centrale et conservative, le mouvement est un **plan passant par T le centre de la Terre**. Or, la Terre étant en rotation autour de l'axe de ses pôles, le seul plan contenant le centre de la Terre et permettant de rester **immobile par rapport à sa surface** est celui **contenant l'équateur**.
- 2) Pour la même raison, il doit avoir la **même vitesse angulaire que la Terre** :
- 3) De plus,

Définition M7.6 : Autres satellites

Satellites de positionnement.

Les satellites de positionnement fonctionnent par flotte de 20 à 30. Ils sont répartis dans quelques plans orbitaux (3 ou 6), de sorte qu'un point de la surface terrestre puisse toujours en voir au moins 3 dans le ciel.

- ◇ **Orbites** : $h \approx 20\,000$ km
- ◇ **Mission** : GPS

Satellites circumpolaires.

Ces satellites oscillent entre les pôles Nord et Sud, et ont une période d'environ 1h à 2h afin de balayer de nombreuses zones de la surface terrestre en un jour.

- ◇ **Orbites** : perpendiculaires au plan équatorial, ces orbites sont basses (environ 700 km de haut).
- ◇ **Mission** : cartographier la surface terrestre de plus proche que ne pourrait le faire un satellite géostationnaire.

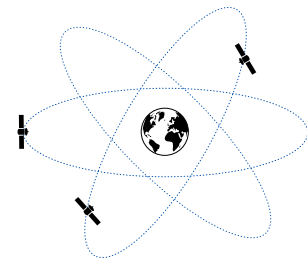


FIGURE M7.17 – positionnement.

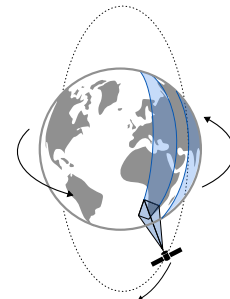


FIGURE M7.18 – Satellites circumpolaires

Remarque M7.1 : Sites internet

<https://www.ssec.wisc.edu/data/geo/> (géostationnaires), <https://earthnow.usgs.gov/observer/> et <https://worldview.earthdata.nasa.gov> (circumpolaires), et <https://stellarium-web.org/> (planétarium).