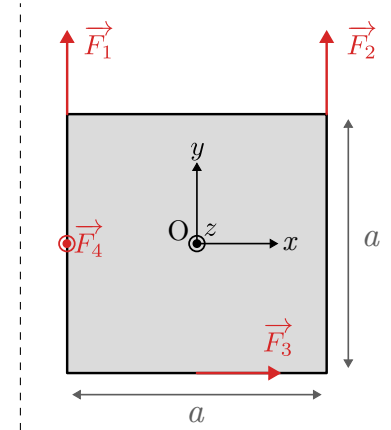


Correction du TD d'application



I Calcul de moments

Une plaque carrée de côté a dans le plan (Oxy) et centrée en O subit des forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ et $\vec{F}_4$ toutes de même norme F , telles que représentées ci-contre.



- 1 Calculer les moments de chacune de ces forces par rapport au point O .

Réponse

◇ On remarque que la force $\vec{F}_1$ s'applique au point M_1 tel que

$$\vec{OM}_1 = \frac{a}{2}(-\vec{e}_x + \vec{e}_y) \quad \text{donc} \quad \vec{M}_O(\vec{F}_1) = \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_1 = -\frac{1}{2}aF\vec{e}_z$$

◇ De même, $\vec{OM}_2 = \frac{a}{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y) \quad \text{donc} \quad \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_2 = \frac{1}{2}aF\vec{e}_z$

◇ Pour $\vec{F}_3$, on remarque que le bras de levier vaut $\frac{a}{2}$; la règle de la main droite nous donne alors

$$\vec{M}_O(\vec{F}_3) = \frac{1}{2}aF\vec{e}_z$$

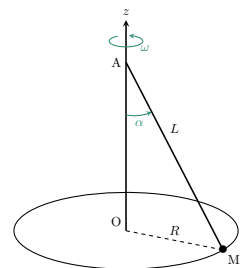
◇ De même, on trouve $\vec{M}_O(\vec{F}_4) = \frac{1}{2}aF\vec{e}_y$



II Pendule conique

Dans un champ uniforme de pesanteur $\vec{g}$ vertical et vers le bas, un point matériel M de masse m tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz) , dirigé vers le haut, et décrit ainsi un cercle de centre O et de rayon R . M est suspendue à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, fixé en un point A de (Oz) . L'angle α de (Oz) avec AM est constant.

On travaille dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On utilisera le repère de la base cylindrique tel que $\vec{OM} = R\vec{u}_r$.



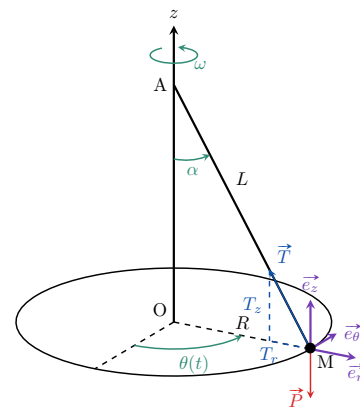
- 1 Exprimer le moment cinétique de M par rapport à A en fonction de m , L , ω et α .

Réponse

◇ **Système et référentiel** : masse, repérée par $M(m)$ dans $\mathcal{R}$ terrestre supposé galiléen.

◇ **Repère et repérage** : cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ (voir schéma),

$$\begin{aligned}\vec{OM}(t) &= R\vec{u}_r = L \sin(\alpha) \vec{u}_r \\ \vec{v}(t) &= R\dot{\theta} \vec{u}_\theta = L\omega \sin(\alpha) \vec{u}_\theta \\ \vec{a}(t) &= R\ddot{\theta} \vec{u}_r = -L\omega^2 \sin(\alpha) \vec{u}_r \\ \vec{\mathcal{L}}_A(M, t) &= \vec{AM} \wedge \vec{p}_M(t) = (\vec{AO} + \vec{OM}) \wedge m \vec{v}(t) \\ \Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_A(M, t) &= (-L \cos(\alpha) \vec{u}_z + L \sin(\alpha) \vec{u}_r) \wedge (mL\omega \sin(\alpha) \vec{u}_\theta) \\ \Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_A(M, t) &= -mL^2\omega \sin(\alpha) \cos(\alpha) (-\vec{u}_r) + mL^2\omega \sin^2(\alpha) \vec{u}_z \\ \Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{L}}_A(M, t) &= mL^2\omega (\sin^2(\alpha) \vec{u}_z + \sin(\alpha) \cos(\alpha) \vec{u}_r)}\end{aligned}$$



- 2 Calculer les moments vectoriels des forces par rapport à A, puis appliquer le TMC vectoriel pour déduire $\cos(\alpha)$ en fonction de g , L et ω .

Réponse

◇ **BDF** :

$$\begin{cases} \vec{P} = -mg\vec{u}_z \\ \vec{T} = -T \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \vec{T} = T(\cos(\alpha)\vec{u}_z - \sin(\alpha)\vec{u}_r) \quad \text{mais inutile}$$

◇ **BDM** :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = \vec{AM} \wedge \vec{P} = L(\sin(\alpha)\vec{u}_r - \cos(\alpha)\vec{u}_z) \wedge (-mg\vec{u}_z) \Leftrightarrow \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = +mgL \sin(\alpha) \vec{u}_\theta \\ \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}) = \vec{AM} \wedge \vec{T} = \vec{0} \end{cases}$$

◇ **TMC** :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\mathcal{L}}_A(M)}{dt} &= \sum_i \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_i) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) \\ \Leftrightarrow mL^2\omega \left(\sin^2(\alpha) \underbrace{\frac{d\vec{u}_z}{dt}}_{=0} + \sin(\alpha) \cos(\alpha) \underbrace{\frac{d\vec{u}_r}{dt}}_{=\omega\vec{u}_\theta} \right) &= mgL \sin(\alpha) \vec{u}_\theta \\ \xRightarrow{\cdot \vec{u}_\theta} mL^2\omega^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) &= mgL \sin(\alpha) \\ \Leftrightarrow \boxed{\cos(\alpha) = \frac{g}{L\omega^2}}\end{aligned}$$

- 3 Pourquoi ne peut-on pas appliquer le TMC scalaire dans ce cas ?

Réponse

On ne peut pas appliquer le TMC scalaire car il faut pour cela avoir un axe orienté **fixe**. Or, ici $\mathcal{L}_z(M, t) = \text{cte}$ et les moments des forces sur z sont également nuls ; la seule information pertinente porte sur $\mathcal{L}_\theta$ mais $\vec{u}_\theta$ n'est **pas fixe**.

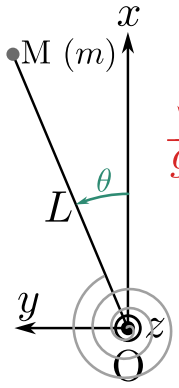
- 4 Retrouver le résultat à partir du PFD.

Réponse

PFD :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}}{dt} &= \sum_i \vec{F}_i \\ \Leftrightarrow -mL\omega^2 \sin(\alpha) \vec{u}_r &= -mg\vec{u}_z + T(\cos(\alpha)\vec{u}_z - \sin(\alpha)\vec{u}_r) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -mL\omega^2 \sin(\alpha) = -T \sin(\alpha) \\ 0 = -mg + T \cos(\alpha) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} T = mL\omega^2 \\ T = \frac{mg}{\cos(\alpha)} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \boxed{\cos(\alpha) = \frac{g}{L\omega^2}}\end{aligned}$$

III Gravimètre de HOLWECK-LEJAY



Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité M d'une tige de masse négligeable et de longueur $L = OM$, articulée en O et mobile dans un plan vertical. Un ressort « spirale » (en gris sur la figure) exerce sur M, *via* la tige, un couple de rappel (notion abordée au chapitre 8) équivalent à un moment de force $\vec{M}_O(\vec{F}_r) = -C\theta(t)\vec{u}_z$, avec $C > 0$.

- 1 Déterminer, par l'application du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz), l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

Réponse

◇ **Système et référentiel** : masse, repérée par M(m) dans $\mathcal{R}$ terrestre supposé galiléen.

◇ **Repère et repérage** : cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ (voir schéma),

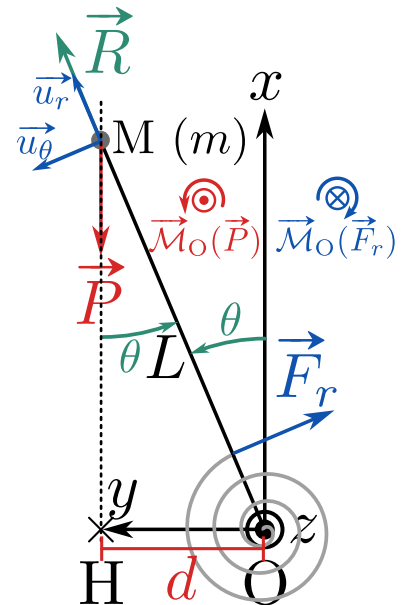
$$\begin{aligned}\vec{OM}(t) &= L\vec{u}_r \\ \vec{v}(t) &= L\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta \\ \vec{a}(t) &= L\ddot{\theta}(t)\vec{u}_r - L\dot{\theta}(t)^2\vec{u}_r \\ \vec{\mathcal{L}}_O(M, t) &= \vec{OM} \wedge m\vec{v}(t) = mL^2\dot{\theta}(t)\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = mL^2\dot{\theta}(t)\vec{u}_z\end{aligned}$$

◇ **BDF** :

$$\begin{cases} \vec{P} = -mg\vec{u}_x = mg(-\cos(\theta(t))\vec{u}_r + \sin(\theta(t))\vec{u}_\theta) \\ \vec{F}_r = -F_r\vec{u}_\theta \\ \vec{R} = R\vec{u}_r \end{cases}$$

◇ **BDM** :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_z(\vec{P}) = +dmg = mgL\sin(\theta(t)) \\ \mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = -C\theta(t) \\ \mathcal{M}_z(\vec{R}) = 0 \quad \text{car } \vec{R} \parallel \vec{OM} \end{cases}$$



◇ **TMC** :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}_z(M)}{dt} &= \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{F}_r) + \mathcal{M}_z(\vec{R}) \\ \Leftrightarrow mL^2\ddot{\theta}(t) &= mgL\sin(\theta(t)) - C\theta(t)\end{aligned}\tag{M6.1}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta}(t) + \frac{C}{mL^2}\theta(t) - \frac{g}{L}\sin(\theta(t)) = 0$$



- 2 À partir de cette équation différentielle, établir une intégrale première du mouvement (rappel : multiplier par $\dot{\theta}(t)$) et donner sa signification physique. Montrer alors que la force de rappel du ressort spiral dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,el}$ dont on donnera l'expression.

Réponse

(M6.1) $\cdot \dot{\theta}(t) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}mL^2\ddot{\theta}(t)\dot{\theta}(t) + C\theta(t)\dot{\theta}(t) - mgL\sin(\theta(t))\dot{\theta}(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}(t)^2 + \frac{1}{2}C\theta(t)^2 + mgL\cos(\theta(t)) \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}(t)^2}_{=\mathcal{E}_c} + \underbrace{\frac{1}{2}C\theta(t)^2}_{=\mathcal{E}_{p,el}} + \underbrace{mgL\cos(\theta(t))}_{=\mathcal{E}_{p,p}} &= \text{cte}\end{aligned}$$

On retrouve la **conservation de l'énergie mécanique** du système. On en déduit alors l'expression de $\mathcal{E}_{p,el}$ ci-dessus, d'une forme similaire à celle d'un ressort linéaire ($\mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}kx^2$) mais avec une variable angulaire θ et une constante de raideur C .



- 3 En exprimant la condition d'équilibre de ce système, montrer que $\theta_{\text{eq}} = 0$ est une position d'équilibre. En exprimant la condition de stabilité de cette position d'équilibre, montrer que celle-ci est stable si et seulement si $C > mgL$.

Réponse

Équilibre : $\left. \frac{d\mathcal{E}_{p,\text{tot}}}{d\theta} \right|_{\theta_{\text{eq}}} = 0$

$$\Leftrightarrow -mgL \sin(\theta_{\text{eq}}) + C\theta_{\text{eq}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta_{\text{eq}} = 0} \quad (\text{solution évidente})$$

Stabilité : $\left. \frac{d^2\mathcal{E}_{p,\text{tot}}}{d\theta^2} \right|_{\theta_{\text{eq}}} > 0$

$$\Leftrightarrow -mgL \underbrace{\cos(\theta_{\text{eq}})}_{=1} + C > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C > mgl}$$

■

- 4 Retrouver cette condition de stabilité à partir de l'équation différentielle du mouvement linéarisée pour les petites oscillations autour de $\theta_{\text{eq}} = 0$. On introduira pour cela la pulsation propre ω_0 de ces petites oscillations.

Réponse

Autour de $\theta_{\text{eq}} = 0$, $\sin(\theta) \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \theta$. Ainsi,

$$\ddot{\theta}(t) + \left(\frac{C}{mL^2} - \frac{g}{L} \right) \theta(t) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \theta(t) = 0}$$

Équation caractéristique :

$$r^2 + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -\omega_0^2$$

$\boxed{\text{Stable} \Leftrightarrow r \in \mathbb{C}} \Rightarrow$

$$\omega_0^2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{C > mgL}$$

Cette équation du second ordre a des solutions **stable** si et seulement si les **racines** de l'équation caractéristique sont **complexes**. En effet, avec $\theta(t) = Ae^{rt}$, des **racines réelles donnent des solutions divergentes** ; seules les racines complexes donnent des solutions oscillantes en cosinus et sinus.

- 5 Exprimer alors la période propre T_0 des petites oscillations autour de $\theta_{\text{eq}} = 0$ en fonction de m , L , C et g . En posant $g_0 = \frac{C}{mL}$, en déduire une méthode de mesure de g .

Réponse

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C - mgL}{mL^2}} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T_0} \Leftrightarrow \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{C - mgL}}}$$

Il est logique de poser $g_0 = C/mL$, par analyse dimensionnelle de ω_0^2 . En remplaçant dans T_0 :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{mL(g_0 - g)}} \Leftrightarrow \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_0 - g}}}$$

On retrouve une expression proche de celle du pendule simple ($T_0 = \sqrt{\ell/g}$).

Ainsi, en réglant $g_0 = C/mL$ à une valeur connue, si $g_0 > g$ on obtient des oscillations dont la période est directement liée à $g_0 - g$. On pourrait penser à mesurer g en réglant g_0 pour n'avoir aucune oscillation, mais la mesure de période est plus simple.

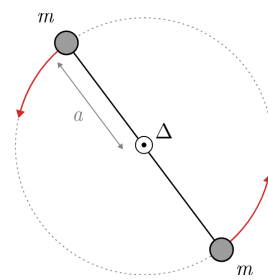
On remarque cependant que quand $g > g_0$, d'après la question 3 on n'aura pas de solution stable mais des solutions en exponentielles divergentes, ce qui est une limite de cet outil.



IV Bolas

On lance des bolas en rotation autour d'un axe orienté Δ à la vitesse angulaire ω_0 . On note $2a$ la longueur de la corde reliant les masses m , et on suppose que cette dernière est tendue au moment du lancer. Le coefficient de frottements visqueux de l'air est noté α .

On suppose que l'axe Δ est fixe dans un référentiel galiléen et que les bolas tournent suffisamment rapidement pour négliger la gravité.



- 1 Par application du TMC, établir l'équation d'évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$. La résoudre.

Réponse

On note $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire directeur de l'axe Δ et O le centre de rotation des bolas. En coordonnées cylindriques, on a alors, pour **une des deux masses** m :

◇ Repérage : $\vec{OM}(t) = a\vec{e}_r$ et $\vec{v}(t) = a\omega(t)\vec{e}_\theta$ et $\vec{a}(t) = -a\omega^2(t)\vec{e}_r + a\dot{\omega}(t)\vec{e}_\theta$

D'où $\vec{\mathcal{L}}'_O(t) = \vec{OM}(t) \wedge m\vec{v}(t) = (a\vec{e}_r) \wedge m(a\omega(t)\vec{e}_\theta) \Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}'_O(t) = ma^2\omega(t)\vec{e}_z$ soit $\mathcal{L}'_\Delta(t) = ma^2\omega(t)$

◇ Pour les deux masses : $\mathcal{L}_{\Delta,\text{tot}}(t) = 2\mathcal{L}'_\Delta(t) = 2ma^2\omega(t)$

◇ Bilan des forces pour une masse : $\vec{F} = -\alpha\vec{v}(t) = -\alpha a\omega(t)\vec{e}_\theta$
 $\vec{T} = -T\vec{e}_r$

◇ Bilan des moments des forces : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -F \cdot d = -\alpha a^2\omega(t)$ avec $d = a$ le bras de levier
 $\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = 0$ car $\vec{T} \parallel \vec{OM}$

◇ Pour les deux masses : $\mathcal{M}_{\Delta,\text{tot}} = 2\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -\alpha a^2\omega(t)$

TMC : $\frac{d\mathcal{L}_{\Delta,\text{tot}}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta,\text{tot}} \Leftrightarrow 2ma^2\dot{\omega}(t) = -\alpha a^2\omega(t)$

$\Leftrightarrow \dot{\omega}(t) + \frac{\alpha}{m}\omega(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{\omega}(t) + \frac{1}{\tau}\omega(t) = 0$ avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$

Résolution : $\omega(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ or $\omega(0) = \omega_0 \Leftrightarrow A = \omega_0$

D'où $\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$



- 2 La corde va-t-elle se détendre à un moment ? Proposer une explication à ce résultat.

Réponse

On s'intéresse ici à la tension de la corde. Il faut alors utiliser le PFD appliqué à une masse m :

$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{F} \Rightarrow -ma\omega^2(t) = -T$$

$$\Leftrightarrow T = ma\omega^2(t) = ma\omega_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} > 0$$

La tension de s'annulerait donc théoriquement jamais, et la corde devrait alors rester toujours tendue. En réalité, lorsque la vitesse de rotation devient trop faible, la gravité n'est plus négligeable et c'est son action qui va faire détendre la corde.



- 3 Quelles grandeurs doit-on comparer pour effectivement pouvoir négliger la gravité ?

Réponse

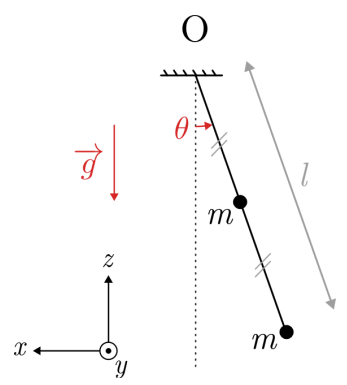
On remarque que la gravité est négligeable à cause de la vitesse du mouvement ; on doit donc essayer de créer une grandeur homogène à g qui fasse intervenir ce terme. On propose :

gravité négligeable $\Leftrightarrow a\omega^2(t) \gg g$



V Pendule lesté

On reprend le problème du pendule simple, attaché par une tige fixe de masse négligeable, mais on suppose que l'on ajoute une deuxième masse identique à la première à la distance $\ell/2$ de O



1 Montrer que l'équation du mouvement est

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{6}{5} \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) = 0$$

Réponse

Il faut ici faire attention au **système** (et on commence à entrer sur les notions du chapitre 8). Soit $\mathcal{S} = \{2 \text{ masses}\}$. On applique le TMC en **sommant** les moments cinétiques de chacune des masses, et en sommant les moments des forces de chacune des masses.

En notant M_1 le point au bout de la tige, et M_2 le point à mi-distance, on a alors :

◇ Repère :

$$(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_y)$$

◇ Repérage pour 1 :

$$\vec{OM}_1(t) = \ell \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{v}_1(t) = \ell \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta$$

Ainsi

$$\vec{\mathcal{L}}_{O,1}(t) = \vec{OM}_1(t) \wedge m \vec{v}_1(t) = m \ell^2 \dot{\theta}(t) \vec{e}_y$$

◇ Repérage pour 2 :

$$\vec{OM}_2(t) = \frac{\ell}{2} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{v}_2(t) = \frac{\ell}{2} \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta$$

Ainsi

$$\vec{\mathcal{L}}_{O,2}(t) = \vec{OM}_2(t) \wedge m \vec{v}_2(t) = m \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}(t) \vec{e}_y$$

◇ Pour les deux masses :

$$\vec{\mathcal{L}}_O(t) = \vec{\mathcal{L}}_{O,1}(t) + \vec{\mathcal{L}}_{O,2}(t) = \frac{5}{4} m \ell^2 \dot{\theta}(t) \vec{e}_y$$

◇ Bilan des forces pour 1 :

$$\vec{P}_1 = -mg \vec{e}_z = mg(\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$$

$$\text{de bras de levier} \quad d_{P,1} = \ell \sin(\theta(t))$$

$$\vec{T}_1 = -T_1 \vec{e}_r \quad \text{de bras de levier} \quad d_{T,1} = 0$$

◇ Bilan des forces pour 2 :

$$\vec{P}_2 = -mg \vec{e}_z = mg(\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$$

$$\text{de bras de levier} \quad d_{P,2} = \frac{\ell}{2} \sin(\theta(t))$$

$$\vec{T}_{2h} = -T_2 \vec{e}_r = T(-\cos(\theta) \vec{e}_z + \sin(\theta) \vec{e}_x) \quad \text{de bras de levier} \quad d_{T,2h} = 0$$

$$\vec{T}_{2b} = T_2 \vec{e}_r = -T(-\cos(\theta) \vec{e}_z + \sin(\theta) \vec{e}_x) \quad \text{de bras de levier} \quad d_{T,2b} = 0$$

◇ Bilan des moments : $\mathcal{M}_y(\vec{P}_1) = -mg\ell \sin(\theta(t))$ et $\mathcal{M}_y(\vec{P}_2) = -mg\frac{\ell}{2} \sin(\theta(t))$

◇ TMC total : $\frac{d\mathcal{L}_y}{dt} = \mathcal{M}_y(\vec{P}_1) + \mathcal{M}_y(\vec{P}_2) \Leftrightarrow \frac{5}{4} m \ell^2 \ddot{\theta}(t) = -\frac{3}{2} mg\ell \sin(\theta(t))$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta}(t) + \frac{6}{5} \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) = 0}$$

■



Correction du TD d'entraînement



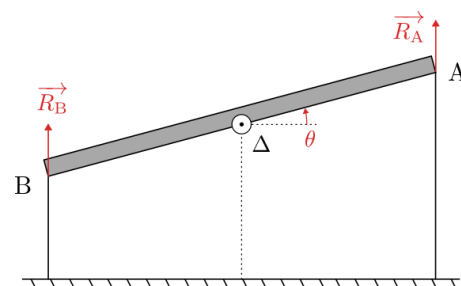
I Transport d'une poutre

- 1 Alice et Bob transportent une poutre de masse M de longueur ℓ . Iels se placent chacun à une extrémité de celle-ci. Justifier leur choix de placement *a priori*.

Réponse

Pour mieux doser l'équilibre de la poutre, il faut la contrôler en se plaçant au plus loin du centre, sinon une moindre petite perturbation se répercuterait en un gros déplacement.

Bob commence à se plaindre, invoquant le fait qu'il soit plus petit comme excuse : « je me prends plus de poids ! », dit-il. On schématise la situation selon la figure ci-contre. On note $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$ les forces sur la poutre d'Alice et Bob respectivement.



- 2 Exprimer les moments de ces forces par rapport à l'axe orienté Δ en fonction de ℓ , θ et leurs normes R_A et R_B .

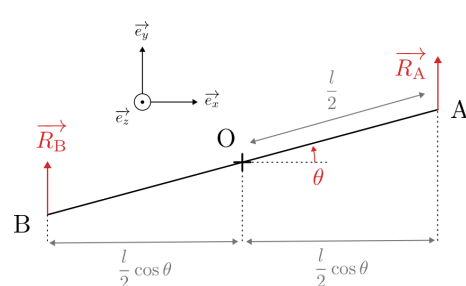
Réponse

Dans les deux cas, le bras de levier est $d = \frac{\ell}{2} \cos(\theta)$. Ainsi,

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}_A) = R_A \cdot \frac{\ell}{2} \cos(\theta)$$

et

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}_B) = -R_B \cdot \frac{\ell}{2} \cos(\theta)$$



- 3 Écrire le théorème du moment cinétique et en déduire le « poids » (pour reprendre les mots de Bob) subi par chaque personne.

Réponse

Pour la poutre :

$$\frac{d\mathcal{L}_{\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}_A) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}_B)$$

Or, poutre statique :

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\ell}{2} R_A \cos(\theta) - \frac{\ell}{2} R_B \cos(\theta)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\ell}{2} \cos(\theta) (R_A - R_B)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_A = R_B}$$

Par principe des actions réciproques, le « poids » subi par chacun est la force opposée exercée par nos protagonistes sur la poutre. En norme, ce sont simplement R_A et R_B , qui sont égaux ! Pour trouver leur valeur, on applique le PFD à l'équilibre :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = 0 \Leftrightarrow R_A = \frac{1}{2} Mg = R_B$$

- 4 La raison invoquée par Bob est-elle valide ?

Réponse

Bob se trompe donc, sa taille n'a rien à voir là-dedans : il porte exactement autant qu'Alice, tant qu'ils restent à la même distance du centre de la poutre.

- 5] Que se passerait-il si Alice et Bob se rapprochaient autant du centre de la poutre ? Quels inconvénients ou avantages cela présenterait-il ?

Réponse

Le bras de levier diminuerait, mais la situation en terme de forces ne changerait pas : ils porteraient toujours la moitié de la poutre chacun. En revanche, la situation serait plus instable, et une moindre perturbation pourrait faire basculer la poutre.

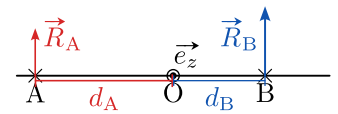
II Curiosité de Sommerfeld

- 1] Prenez un crayon et posez horizontalement sur vos deux index, peu importe leurs emplacements. Ensuite essayez de rapprocher doucement vos doigts en les déplaçant horizontalement. Ils finissent toujours par se toucher au milieu (au centre de gravité de manière plus générale) du crayon, en alternant les mouvements de chaque doigt. Pourquoi ?

On rappelle que la norme de la composante tangentielle de la force de frottements solides T est liée à la composante normale N par la relation $T = \mu N$ quand il y a glissement, avec μ le coefficient de frottement solide.

Réponse

On prend comme système le crayon, et $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire portant la direction de rotation du crayon. On note A et B les positions des doigts et on utilise les notations données dans le schéma ci-contre. Pour un crayon statique, on trouve



$$\mathcal{M}_z(\vec{R}_A) = -R_A d_A \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_z(\vec{R}_B) = +R_B d_B$$

$$\text{Or,} \quad \mathcal{L}_z = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{L}_z}{dt} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{M}_z(\vec{R}_A) + \mathcal{M}_z(\vec{R}_B) = 0$$

Ainsi

$$R_A d_A = R_B d_B$$

Ainsi, le **doigt le plus loin applique une réaction plus faible**. Quand on essaye de les déplacer, sa **réaction tangentielle sera également plus faible** : il pourra plus facilement glisser que l'autre doigt, et ainsi se rapprocher du centre de gravité du crayon, jusqu'à ce que les rôles s'échangent et ainsi de suite, jusqu'à ce que les doigts se rejoignent au centre de gravité.

III Drone quadrirotor

Les drones quadrirotor sont maintenus en l'air grâce à un jeu de 4 hélices.



FIGURE M7.1 – Photo d'un drone quadrirotor

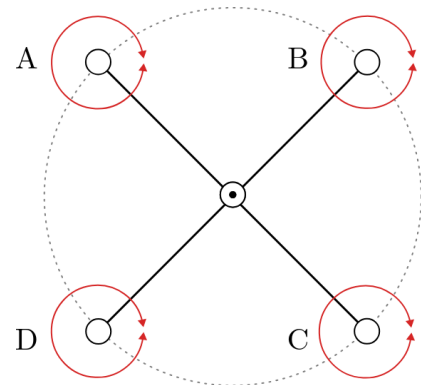


FIGURE M7.2 – Modélisation du drone quadrirotor

On nomme les hélices A, B, C et D. On sait qu'elles sont de même taille et tournent à la même vitesse.

- 1] Intégrer le théorème du moment cinétique entre le début du décollage et l'instant final où le drone est en équilibre en l'air. En déduire la valeur finale du moment cinétique $\mathcal{L}$ par rapport à l'axe de symétrie vertical.

Réponse

Le drone subit son poids et les forces de portée exercées par chaque hélice, mais elles sont toutes parallèles à l'axe vertical. Il n'y a donc aucun moment extérieur, et le théorème du moment cinétique nous dit que

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \Delta\mathcal{L} = 0$$

Or, $\mathcal{L}_0 = 0 \Rightarrow \mathcal{L} = 0 \quad \forall t$

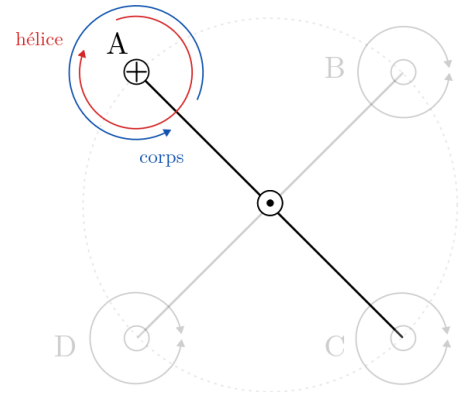
- 2 Pour une hélice en rotation dans le sens horaire, quel est son effet sur la rotation du corps ?

Réponse

Chaque hélice a un moment cinétique non nul. En décomposant le système comme étant {corps + 4 hélices}, on a

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{corps}} + \sum_{i=A}^D \mathcal{L}_i \Leftrightarrow \mathcal{L}_{\text{corps}} = - \sum_{i=A}^D \mathcal{L}_i$$

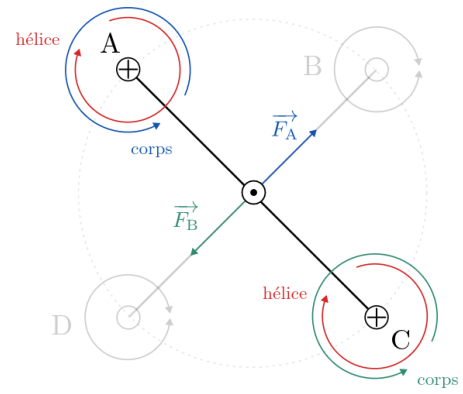
Ainsi, **chaque hélice a tendance à créer un moment opposé sur le corps** (c'est le principe de l'action-réaction mais pour une rotation). En particulier, une hélice tournant dans le sens horaire a un moment cinétique orienté vers le bas, mais fait ainsi tourner le corps dans le sens direct, et inversement.



- 3 En étudiant la force exercée par une hélice sur le centre de gravité du corps, expliquer comment choisir les sens de rotation de deux hélices opposées.

Réponse

La rotation créée par une hélice se fait autour de son axe, donc cela tend à déplacer le centre de gravité du corps, ce qui se traduit par une force. On remarque que pour que cette force se compense avec celle de l'hélice opposé, il faut qu'elles **tournent dans le même sens**.



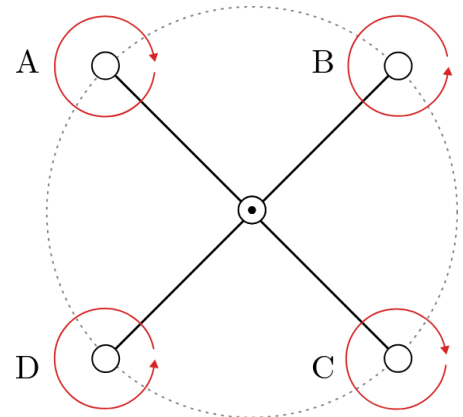
- 4 Comment choisir le sens de rotations des quatre hélices ?

Réponse

On doit donc avoir $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_C$ et $\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_D$, et pour maintenir le drone en équilibre, il faut que la somme des 4 moments s'annule ; il faut donc également choisir

$$\mathcal{L}_A = -\mathcal{L}_B$$

Autrement dit, les hélices vont par paire : même sens que celle en face, mais sens opposé à ses voisines.



- 5 Si l'une des hélices vient à perdre en régime, quelle opération doit être faite pour restabiliser l'appareil ? Quel inconvénient cela a-t-il ?

Réponse

Cet équilibre nécessite bien que toutes les hélices aillent à la même vitesse, dont si l'une perd en régime, il faut volontairement diminuer la vitesse de toutes les autres, sinon le drone va avoir un mouvement parasite.

Évidemment l'inconvénient est qu'on risque de perdre la capacité à se maintenir en l'air.



IV Hélicoptère

Un hélicoptère est constitué de son corps (cockpit + queue de longueur h) et de son rotor sur lequel sont fixées des hélices de rayon r_1 et de masse m_1 .

On considère que la phase de décollage consiste en l'accélération de pâles de $\omega = 0$ à $\omega = \omega_1$. On négligera tous les frottements et la gravité (puisque l'hélicoptère quitte tout juste le sol à la fin de cette phase).



On suppose que le moment cinétique d'une hélice de masse m et de rayon r en rotation à la vitesse angulaire ω vaut

$$\mathcal{L}(t) = \frac{2}{3}mr^2\omega(t)$$

et qu'elle crée une force de poussée $F = \alpha r^2\omega(t)$ avec $\alpha > 0$

- 1 En étudiant la phase de décollage, exprimer le moment cinétique $\mathcal{L}$ de l'hélicoptère par rapport à l'axe de rotation des hélices, une fois celui-ci en l'air. Quel problème cela engendre-t-il ?

Réponse

Durant la phase de décollage, l'hélicoptère subit une force de poussée verticale et son poids mais qu'on suppose équilibrés. Il n'y a donc aucun moment, et le TMC indique alors que

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\mathcal{L}}_O(t) = \text{cte} \text{ or } \vec{\mathcal{L}}_O(0) = \vec{0} \text{ donc } \vec{\mathcal{L}}_O(t) = \vec{0}$$

De plus, $\vec{\mathcal{L}}_O = \vec{\mathcal{L}}_{O, \text{rotor}} + \vec{\mathcal{L}}_{O, \text{cockpit}} = \vec{0}$

Ainsi, puisque les hélices tournent, alors le cockpit doit se mettre à tourner dans l'autre sens.



- 2 Quelle solution a été apportée par les ingénieurs pour résoudre ce problème ? Vous donnerez des résultats quantitatifs.

Réponse

L'idée est donc de placer un deuxième jeu d'hélices au bout de la queue de l'engin, afin de créer une poussée $\vec{F}$ orthogonale qui s'oppose à ce mouvement, et donc un moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = Fh\vec{e}_z$ contrebalançant cet effet. Le TMC sur le même système que précédemment (sans les hélices de la queue) donne alors

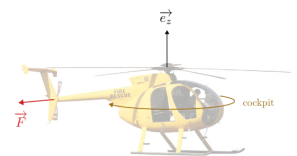
$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{O, \text{cockpit}}}{dt} + \frac{d\vec{\mathcal{L}}_{O, \text{rotor}}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

On veut $\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{O, \text{cockpit}}}{dt} = \vec{0}$ pour que le cockpit ne tourne pas. Ceci donne, en projection suivant $\vec{e}_z$ et en notant r_2 et ω_2 le rayon et la vitesse de rotation des hélices de la queue :

$$\frac{d\mathcal{L}_{z, \text{rotor}}}{dt} = Fh \Leftrightarrow \frac{2}{3}m_1r_1^2\dot{\omega}(t) = \alpha r_2^2\omega_2 h$$

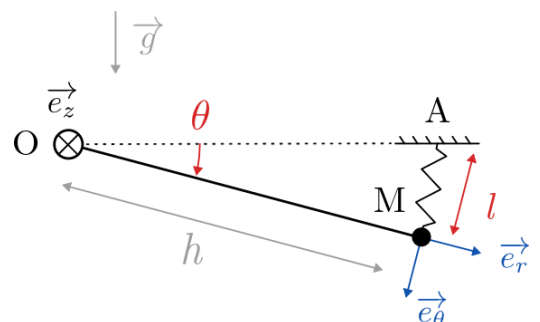
Donc on choisit r_2 et ω_2 tels que

$$r_2^2\omega_2 = \frac{2}{3} \frac{m_1r_1^2}{\alpha h} \dot{\omega}(t)$$



V Tige et ressort

Une masse est fixée au bout d'une tige rigide de longueur h et de masse négligeable, ainsi qu'au bout d'un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle. Le tout est dans un champ de pesanteur $\vec{g}$. Le ressort est fixé en un point A placé horizontalement à O, à une distance h .



- 1 Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans le repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. En déduire que la longueur ℓ du ressort est

$$\ell = h\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}$$

Réponse

On a $\overrightarrow{OM} = h\vec{e}_r$ et $\overrightarrow{OA} = h(\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta)$ ■

Ainsi $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = h((1 - \cos(\theta))\vec{e}_r + \sin(\theta)\vec{e}_\theta)$

D'où $\ell^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2$

$$\Leftrightarrow \ell^2 = h^2((1 - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta))$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 = h^2(1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 = h^2(2(1 - \cos(\theta)))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ell = h\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}}$$
 ■



- 2 Calculer les moments des forces en jeu.

Réponse

◇ **Ressort :** $\vec{F} = -k\overrightarrow{AM} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = (h\vec{e}_r) \wedge (-kh((1 - \cos(\theta))\vec{e}_r + \sin(\theta)\vec{e}_\theta))$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = -kh^2 \sin(\theta)\vec{e}_z}$$

◇ **Poids :** $\vec{P} = mg(\sin(\theta)\vec{e}_r + \cos(\theta)\vec{e}_\theta) \Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = mgh \cos(\theta)\vec{e}_z}$

◇ **Tension de la tige :** $\vec{T} = T\vec{e}_r \Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}}$



- 3 En déduire la forme mathématique de la position d'équilibre θ_{eq} .

Réponse

On a l'équilibre quand la somme des moments est nulle, soit avec le TMC :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{0} \cdot \vec{e}_z \Rightarrow -kh^2 \sin(\theta_{eq}) + mgh \cos(\theta_{eq}) = 0 \Leftrightarrow \tan(\theta_{eq}) = \frac{mg}{kh}$$

Ainsi, $\theta_{eq} = \arctan\left(\frac{mg}{kh}\right)$

Il n'y a qu'une seule position d'équilibre ici (sinon on peut avoir une solution en $+\pi$).

