

Mouvement à force centrale conservative

Sommaire

I Généralités	2
I/A Forces centrales conservatives et newtoniennes	2
I/B Conservation du moment cinétique et conséquences	3
I/C Étude des trajectoires	4
II Mécanique céleste	7
II/A Lois de KEPLER	7
II/B Cas particulier du mouvement circulaire et généralisation	7
II/C Satellite en orbite terrestre	8

Capacités exigibles

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> ☐ Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion. ☐ Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. ☐ Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique. ☐ Satellites géostationnaire, de localisation et de navigation, météorologique. ☐ Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique et les conséquences de cette conservation : mouvement plan, loi des aires. | <ul style="list-style-type: none"> ☐ Établir quand le mouvement est uniforme et déterminer sa période. ☐ Établir la troisième loi de KEPLER dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique. ☐ Exprimer l'énergie mécanique pour les mouvements circulaire et elliptique (en fonction du demi-grand axe). ☐ Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions ; déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial. |
|--|--|

L'essentiel

Définitions

- | | |
|---|----|
| ☐ M7.1 : Force centrale, conservative, newtonienne | 2 |
| ☐ M7.2 : Ellipse | 7 |
| ☐ M7.3 : 1 ^{re} vitesse cosmique | 8 |
| ☐ M7.4 : 2 ^{de} vitesse cosmique | 9 |
| ☐ M7.5 : Satellite géostationnaire | 9 |
| ☐ M7.6 : Autres satellites | 10 |

Propriétés

- | | |
|--|----|
| ☐ M7.1 : $\mathcal{E}_p$ force centrale conservative et newtonienne | 2 |
| ☐ M7.2 : Conservation du moment cinétique | 3 |
| ☐ M7.3 : Conséquence : mouvement plan | 3 |
| ☐ M7.4 : Conséquence : constante et loi des aires | 4 |
| ☐ M7.5 : Énergie potentielle effective, cas newtonien | 4 |
| ☐ M7.6 : $\mathcal{E}_{p,eff}$ cas attractif | 5 |
| ☐ M7.7 : Vitesse en orbite circulaire | 7 |
| ☐ M7.8 : Période circulaire | 8 |
| ☐ M7.9 : $\mathcal{E}_m$ circulaire | 8 |
| ☐ M7.10 : 1 ^{re} vitesse cosmique | 8 |
| ☐ M7.11 : 2 ^{de} vitesse cosmique | 9 |
| ☐ M7.12 : Satellite géostationnaire | 10 |

Démonstrations

- | | |
|--|----|
| ☐ M7.1 : $\mathcal{E}_p$ force centrale conservative et newtonienne | 2 |
| ☐ M7.2 : Conservation du moment cinétique | 3 |
| ☐ M7.3 : Mouvement plan | 3 |
| ☐ M7.4 : Loi des aires | 4 |
| ☐ M7.5 : Énergie potentielle effective | 5 |
| ☐ M7.6 : $\mathcal{E}_{p,eff}$ cas attractif | 5 |
| ☐ M7.7 : Vitesse en orbite circulaire | 8 |
| ☐ M7.8 : Période circulaire | 8 |
| ☐ M7.9 : $\mathcal{E}_m$ circulaire | 8 |
| ☐ M7.10 : Première vitesse cosmique | 9 |
| ☐ M7.11 : Seconde vitesse cosmique | 9 |
| ☐ M7.12 : Satellite géostationnaire | 10 |

Lois

- | | |
|---|---|
| ☐ M7.1 : de KEPLER | 7 |
|---|---|

Points importants

- | | |
|--|---|
| ☐ M7.1 : Trajectoires cas attractif | 5 |
| ☐ M7.2 : Trajectoires cas répulsif | 6 |

Erreurs communes

- | | |
|---|----|
| ☐ M7.1 : Vitesse des orbites elliptiques | 8 |
| ☐ M7.2 : Jours solaire et sidéral | 10 |

I Généralités

I/A Forces centrales conservatives et newtoniennes

Définition M7.1 : Force centrale, conservative, newtonienne

Une force $\vec{F}$ est dite **centrale** s'il existe un point O fixe (dans $\mathcal{R}$) tel que $\vec{F}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ pour tout point M ; O est alors appelé **centre de force**. Autrement dit,

$$\vec{F} \text{ centrale} \Leftrightarrow \boxed{\vec{F} \parallel \overrightarrow{OM}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{F} = F(M,t)\vec{u}_r}$$

Elle est **conservative** si elle **dérive d'une énergie potentielle**.

Une force **newtonienne** est une **force centrale conservative** de la forme

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{k}{r^2(t)}\vec{u}_r} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k > 0 \Rightarrow \text{force attractive} \\ k < 0 \Rightarrow \text{force répulsive} \end{cases}$$

Force gravitationnelle

$$\boxed{\vec{F}_g = -\mathcal{G} \frac{m_O m}{r^2(t)} \vec{u}_r} \Rightarrow k = \mathcal{G} m_O m$$

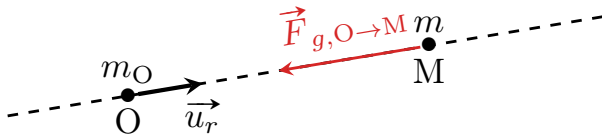


FIGURE M7.1 – $\vec{F}_g$

Force coulombienne

$$\boxed{\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_O}{r^2(t)} \vec{u}_r} \Rightarrow k = \frac{-q_O q}{4\pi\epsilon_0}$$

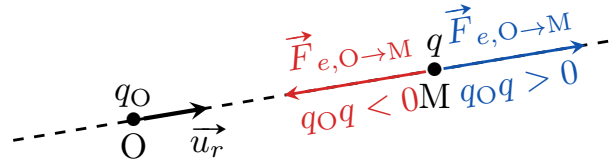


FIGURE M7.2 – $\vec{F}_e$

♥ Propriété M7.1 : $\mathcal{E}_p$ force centrale conservative et newtonienne

L'énergie potentielle d'une force centrale conservative ne **dépend que du rayon** :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{centrale}}(r, \theta, \chi)} \quad \text{et pour une force newtonienne,} \quad \boxed{\mathcal{E}_{p,\text{newt}}(r) = -\frac{k}{r(t)} + K}$$

En fixant par convention $\mathcal{E}_p(+\infty) = 0 \Leftrightarrow K = 0$, on obtient :

Interaction gravitationnelle

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,g}(r) = -\mathcal{G} \frac{m_O m}{r(t)}}$$

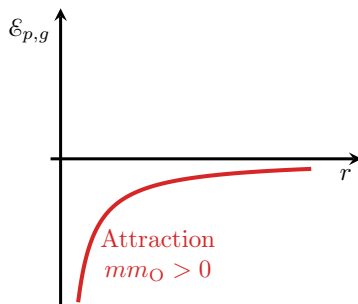


FIGURE M7.3 – $\mathcal{E}_{p,g}(r)$

Interaction électrostatique

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,e}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_O}{r(t)}}$$

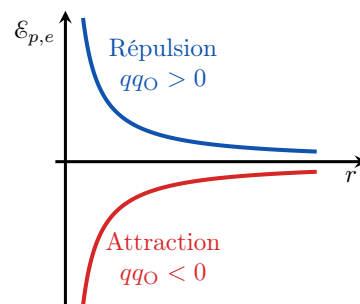


FIGURE M7.4 – $\mathcal{E}_{p,e}(r)$

♥ Démonstration M7.1 : $\mathcal{E}_p$ force centrale conservative et newtonienne

Plaçons-nous dans le plan contenant $\overrightarrow{OM}$ dans un repère cylindrique centré en O, avec $\vec{F} = F(M,t)\vec{u}_r$. On a alors deux méthodes :

Utilisation du travail

$$d\varepsilon_p \triangleq -\delta W(\vec{F}) \triangleq -\vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

$$\Leftrightarrow d\varepsilon_p = -F \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d\varepsilon_p}{dr} = -F(M,t)}$$

Utilisation du gradient

$$\vec{F} \triangleq -\text{grad } \varepsilon_p \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F(M,t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial z} = 0 = \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial r} = -F(M,t)$$

Ainsi, ε_p ne dépend ni de θ ni de z , donc dépend uniquement de la variable r . ■

Appliqué aux cas newtoniens, on obtient :

Interaction gravitationnelle

$$\frac{d\varepsilon_{p,g}}{dr} = \mathcal{G} \frac{m_O m}{r^2(t)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{p,g}(r) = -\mathcal{G} \frac{m_O m}{r(t)} + K$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_{p,g}(r) = -\mathcal{G} \frac{m_O m}{r(t)}}$$
 ■

Interaction électrostatique

$$\frac{d\varepsilon_{p,e}}{dr} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_O}{r^2(t)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{p,e}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_O}{r(t)} + K$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_{p,e}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_O}{r(t)}}$$
 ■

Rappel M7.1 : Constantes dans les ε_p

Les énergies potentielles sont toujours définies à une constante près, qu'il convient de déterminer !

I/B

Conservation du moment cinétique et conséquences

♥ Propriété M7.2 : Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique d'un système soumis uniquement à $\vec{F}$ centrale est un vecteur constant :

$$\vec{\mathcal{L}}_O(M,t) = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{0}$$

♥ Démonstration M7.2 : Conservation du moment cinétique

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \underbrace{\vec{OM}(t) \wedge \vec{F}}_{=\vec{0}} = \vec{0} \quad \text{ainsi} \quad \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} \stackrel{\text{TMC}}{=} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$$
 ■

♥ Propriété M7.3 : Conséquence : mouvement plan

La conservation du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point O fixe dans $\mathcal{R}$ implique que le mouvement se fait dans le plan défini par $\vec{OM}(0)$ et $\vec{v}(0)$.

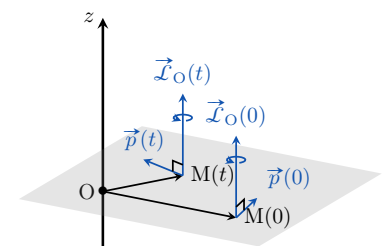


FIGURE M7.5 – Mouvement plan

♥ Démonstration M7.3 : Mouvement plan

Soit $\vec{u}_z$ la direction initiale du moment cinétique, c'est-à-dire $\vec{\mathcal{L}}_O(0) = \vec{OM}(0) \wedge m\vec{v}(0) = \mathcal{L}_0 \vec{u}_z$: $\vec{u}_z$ définit donc une direction perpendiculaire à $\vec{OM}(0)$ et $\vec{v}(0)$. Or, comme $\vec{\mathcal{L}}_O$ se conserve, on a

$$\boxed{\forall t}, \quad \vec{\mathcal{L}}_O(t) = \vec{\mathcal{L}}_O(0) \Leftrightarrow \vec{OM}(t) \wedge m\vec{v}(t) = \mathcal{L}_0 \vec{u}_z$$

donc $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ restent orthogonaux à $\vec{u}_z \forall t$, donc le mouvement reste dans le plan initial. En effet,

$$\overrightarrow{OM}(t) \cdot \vec{\mathcal{L}}_O(t) = \overrightarrow{OM}(t) \cdot \mathcal{L}_0 \vec{u}_z = 0 \quad \forall t, \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{OM}(t) \perp \vec{u}_z \quad \forall t \quad \blacksquare$$

♥ Propriété M7.4 : Conséquence : constante et loi des aires

Constante des aires

On appelle C la **constante des aires**, telle que :

$$C = r^2(t) |\dot{\theta}(t)| = \frac{\|\vec{\mathcal{L}}_O\|}{m}$$

Loi des aires

L'aire balayée $d\mathcal{A}$ par $\overrightarrow{OM}$ en un temps dt est constante :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}$$

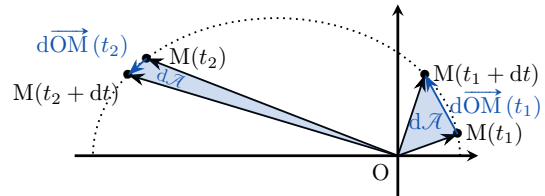


FIGURE M7.6 – Loi des aires.

♥ Démonstration M7.4 : Loi des aires

Constante des aires

Le mouvement étant plan, on peut se placer en coordonnées cylindriques et calculer $\vec{\mathcal{L}}_O$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}_r \\ \vec{v}(t) = \dot{r}(t) \vec{u}_r + r(t) \omega(t) \vec{u}_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{\mathcal{L}}_O(M, t) &= (r(t) \vec{u}_r) \wedge m(\dot{r}(t) \vec{u}_r + r(t) \omega(t) \vec{u}_\theta) \\ &= mr^2(t) \omega(t) \vec{u}_z \end{aligned}$$

Or, $\vec{\mathcal{L}}_O = \text{cte}$, donc $\|\vec{\mathcal{L}}_O\| = mr^2(t) |\dot{\theta}(t)| = \text{cte}$ d'où $C = \frac{\|\vec{\mathcal{L}}_O\|}{m} = r^2(t) |\dot{\theta}(t)|$

Loi des aires

Or, l'aire balayée $d\mathcal{A}$ pendant un temps dt se calcule par produit vectoriel, qui se relie au moment cinétique :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &\triangleq \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}\| \\ \Leftrightarrow d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} dt\| \\ \Leftrightarrow d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \frac{\|\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\|}{m} dt \\ &= \frac{\|\vec{\mathcal{L}}_O\|}{2m} dt \\ \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \frac{\|\vec{\mathcal{L}}_O\|}{2m} = \frac{C}{2} \end{aligned}$$

et ce peu importe la position du corps au point O. $\blacksquare$

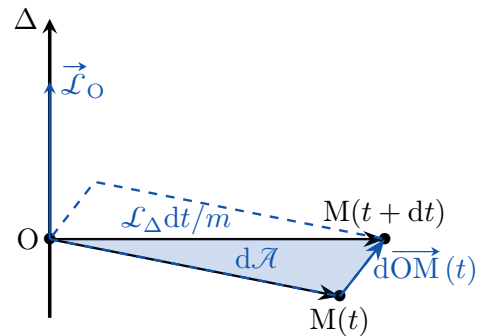


FIGURE M7.7 – Aire balayée.

I/C

Étude des trajectoires

♥ Propriété M7.5 : Énergie potentielle effective, cas newtonien

L'énergie mécanique d'un point matériel M soumis à une force centrale **conservative** est **constante**. Grâce à la constante des aires, on peut la mettre sous une forme n'utilisant que la variable r et sa dérivée :

$$\mathcal{E}_m(M) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2(t) + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \text{cte} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2(t)} + \mathcal{E}_p(r)$$

Si $\vec{F}$ newtonienne, $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2(t)} - \frac{k}{r(t)} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} +\infty \\ \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$

♥ Démonstration M7.5 : Énergie potentielle effective

Or $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} \stackrel{\text{TPM}}{=} 0$
 $\Leftrightarrow \mathcal{E}_m(M) = \text{cte} = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p(r)$
 Or $v^2(t) = \dot{r}^2(t) + (r(t)\dot{\theta}(t))^2$
 $\Rightarrow \mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2(t) + \frac{1}{2}mr^2(t)\dot{\theta}^2(t)$

Or $C = r^2(t)|\dot{\theta}(t)| \Leftrightarrow |\dot{\theta}(t)| = C/r^2(t)$
 $\Rightarrow \frac{1}{2}mr^2(t)\dot{\theta}^2(t) = \frac{1}{2}mr^2(t)\frac{C^2}{r^4(t)} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2(t)}$

$\Leftrightarrow \mathcal{E}_m(M) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2(t) + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2(t)} + \mathcal{E}_p(r,t)}_{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)} \blacksquare$

Interprétation M7.1 : Énergie potentielle effective

L'énergie potentielle effective permet de se ramener à l'étude d'une seule dimension, ici r la distance au centre de force, plutôt que d'utiliser à la fois r et θ , en considérant $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ comme l'énergie potentielle du système et $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ son énergie cinétique.

♥ Propriété M7.6 : $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ cas attractif

Pour une force attractive ($k > 0$), $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ présente un minimum en $r_{\min}$ tel que :

$$r_{\min} = \frac{mC^2}{k} \Rightarrow \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_{\min}) = -\frac{k^2}{2mC^2} = -\mathcal{E}_0$$

et il existe donc des **états liés** pour lesquels $\mathcal{E}_m < 0$, et des **états de diffusion** pour lesquels $\mathcal{E}_m \geq 0$.

♥ Démonstration M7.6 : $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ cas attractif

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_{p,\text{eff}}}{dr} \right|_{r_{\min}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m \left(-2\frac{C^2}{r_{\min}^3} \right) + \frac{k}{r_{\min}^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -mC^2 + kr_{\min} = 0 \quad \times r_{\min}^3$$

$$\Leftrightarrow r_{\min} = \frac{mC^2}{k}$$

Ainsi, $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_{\min}) = -\frac{k^2}{2mC^2} = -\mathcal{E}_0 \blacksquare$

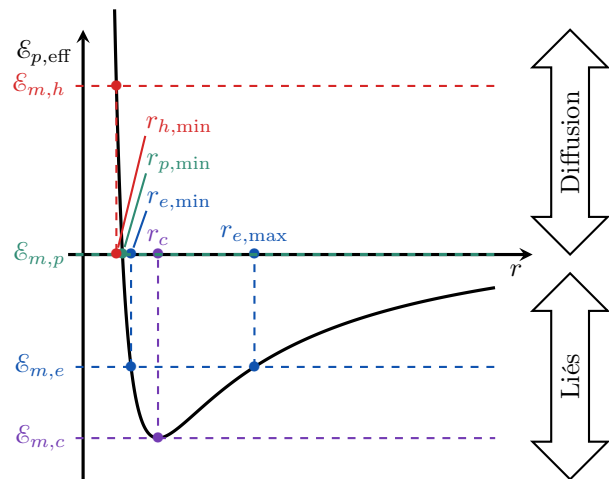
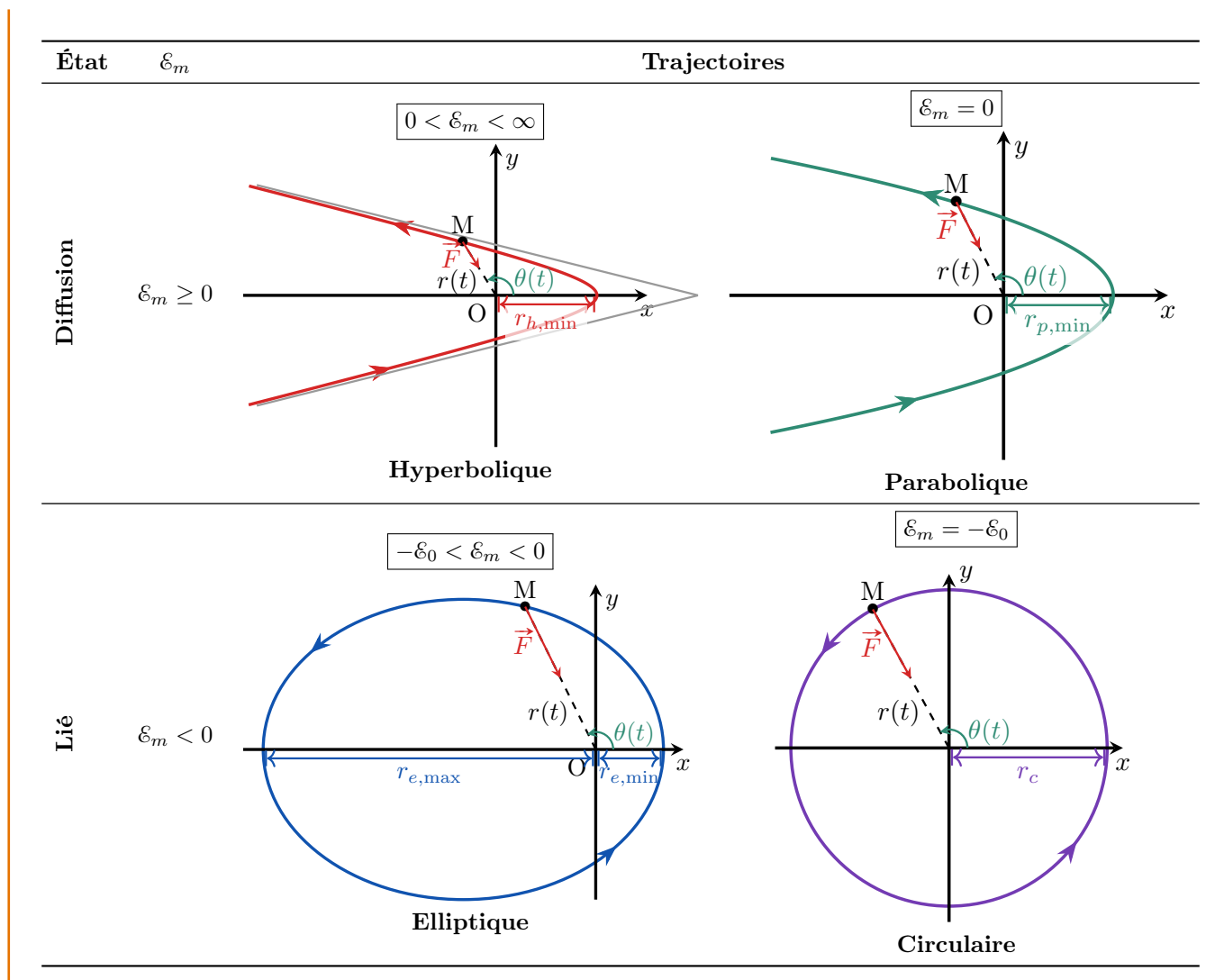


FIGURE M7.8 – $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ cas attractifs.

♥ Important M7.1 : Trajectoires cas attractif

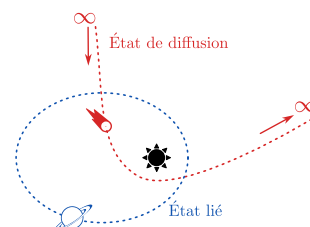
Comme $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}$, on a forcément $\mathcal{E}_{p,\text{eff}} < \mathcal{E}_m$. Ainsi, selon la valeur de $\mathcal{E}_m$ par rapport à $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$, le système aura différentes trajectoires, toutes ayant O comme foyer ou centre :

- ◇ $\mathcal{E}_m \geq 0$: la trajectoire n'est **pas bornée**, on aura donc un état de **diffusion** avec une valeur minimale et deux trajectoires possibles, hyperbolique et parabolique ;
- ◇ $\mathcal{E}_m < 0$: la trajectoire **est bornée**, on aura donc un état **lié** avec deux valeurs extrêmes différentes pour la trajectoire elliptique ou une seule, $r_{\min}$, pour la trajectoire circulaire.



Exemple M7.1 : État lié, état de diffusion

- ◇ Les planètes du système solaire restent confinées près du Soleil, ce sont donc des états liés.
- ◇ Un état de diffusion correspond par exemple au cas d'un comète arrivant vers le Soleil, atteignant une distance minimale avant de retourner à l'infini.



♥ Important M7.2 : Trajectoires cas répulsif

Dans le cas répulsif $\varepsilon_{p,\text{eff}}^{\text{rep}} > 0$ n'a pas de minimum : la trajectoire est toujours hyperbolique.

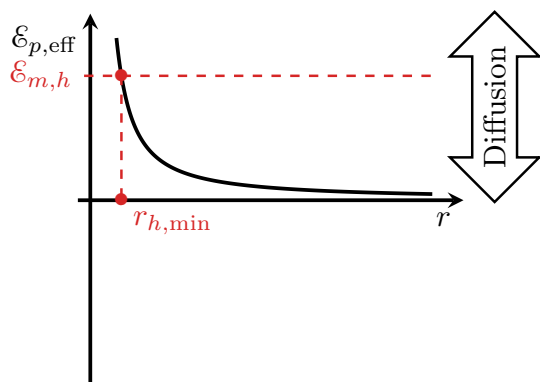


FIGURE M7.9 – $\varepsilon_{p,\text{eff}}$ cas répulsif.

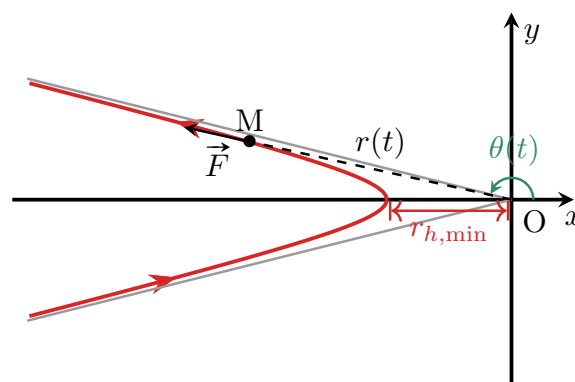


FIGURE M7.10 – Trajectoire cas répulsif.

II Mécanique céleste

II/A Lois de KEPLER

Les lois de KEPLER ont été établies par Johannes KEPLER au début du XVII^e siècle (publiées en 1609 et 1619) à partir de relevés expérimentaux effectués par Tycho BRAHE à la fin du XVI^e siècle. Voir [cette animation](#).

♥ Loi M7.1 : de KEPLER

- 1) **Loi des orbites** : les planètes ont des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers ;
- 2) **Loi des aires** : le vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaye des aires $\Delta\mathcal{A}$ égales en des temps Δt égaux ;
- 3) **Loi des périodes** : la période de révolution d'une planète autour du Soleil est liée au demi-grand axe de son ellipse par :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cte} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

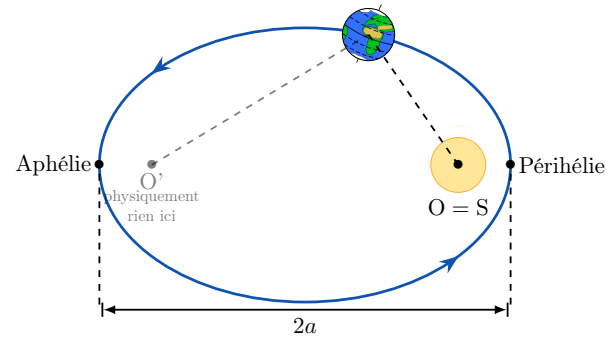


FIGURE M7.11 – 1^{re} loi de KEPLER

♥ Définition M7.2 : Ellipse

Une ellipse est l'ensemble des points M tels que

$$OM + O'M = 2a$$

avec O et O' les **foyers** de l'ellipse, et son **a** **demi-grand axe**.

Le point le plus proche s'appelle le **péricentre** (périgée pour la Terre, périhélie pour le Soleil), noté P, et le plus éloigné s'appelle l'**apocentre** (apogée pour la Terre, aphélie pour le Soleil), noté A.

Par construction, on a donc

$$\diamond r_P + r_A = 2a$$

$$\diamond \dot{r}_{P|A} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_{P|A} = r_{P|A} \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

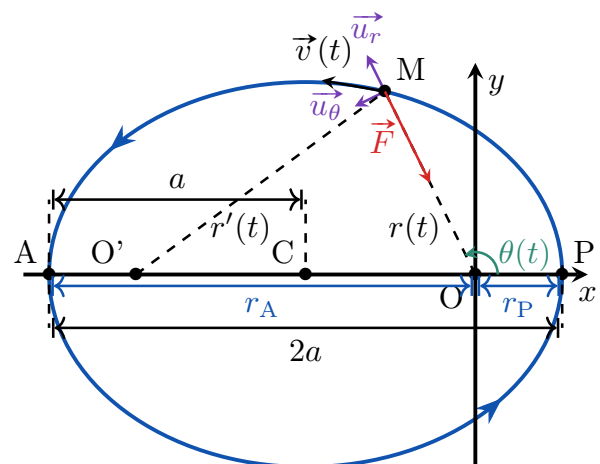


FIGURE M7.12 – Ellipse et paramètres

Application M7.1 : Troisième loi de KEPLER

Calculer la période de révolution de Mars autour du Soleil. On donne $a_{\text{Terre}} = 150 \times 10^6 \text{ km}$ et $a_{\text{Mars}} = 228 \times 10^6 \text{ km}$.

$$\frac{T_M^2}{a_M^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = \frac{T_T^2}{a_T^3} \Leftrightarrow T_M = T_T \sqrt{\frac{a_M^3}{a_T^3}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T_T = 1 \text{ an} \\ a_T = 150 \times 10^6 \text{ km} \\ a_M = 228 \times 10^6 \text{ km} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } T_M = 1 \text{ an } 319 \text{ jours}$$

II/B Cas particulier du mouvement circulaire et généralisation

♥ Propriété M7.7 : Vitesse en orbite circulaire

Le mouvement circulaire d'un astre autour d'un autre est nécessairement uniforme, et on a

$$v_{\text{cercle}} = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}$$

♥ Démonstration M7.7 : Vitesse en orbite circulaire

1 **Système et référentiel** : {planète} point matériel M de masse m , dans $\mathcal{R}$ héliocentrique, supposé galiléen.

2 **Repère et repérage** : cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ avec O centre du Soleil, R le rayon supposé constant ($\dot{R} = 0$),

$$\vec{OM}(t) = R\vec{u}_r \quad ; \quad \vec{v}(t) = R\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta \quad ; \quad \vec{a}(t) = -R\dot{\theta}^2(t)\vec{u}_r + R\ddot{\theta}(t)\vec{u}_\theta$$

3 **Bilan des forces** : $\vec{F}_g = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{R^2} \vec{u}_r$ donc $\mathcal{E}_{p,g} = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{R}$

5 **PFD** :

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}_g \Leftrightarrow \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2(t) = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{R^2} \\ mR\ddot{\theta}(t) = 0 \end{cases} \quad \text{(M7.1)}$$

$$\text{(M7.2)}$$

6 **Vitesse du mouvement circulaire** : l'équation (M7.2) donne $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte}$, et (M7.1) donne

$$|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R^3}} \Leftrightarrow v = R|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R}} \quad \blacksquare \quad \text{(M7.3)}$$

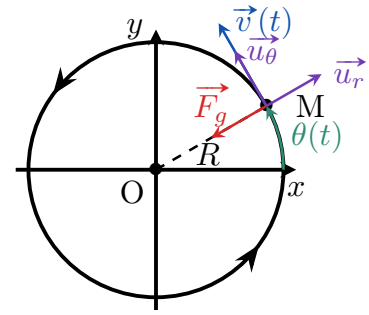


FIGURE M7.13 – 4

♥ Attention M7.1 : Vitesse des orbites elliptiques

Le mouvement elliptique n'est pas uniforme !

♥ Propriété M7.8 : Période circulaire

La période de révolution du mouvement circulaire d'un astre autour d'un autre vérifie

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}$$

Pour l'ellipse, on remplace R par a .

♥ Démonstration M7.8 : Période circulaire

En effet, avec (M7.3),

$$\begin{aligned} |\dot{\theta}| &= \frac{2\pi}{T} \\ \Leftrightarrow \frac{\mathcal{G}M_S}{R^3} &= \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \left. \vphantom{\frac{\mathcal{G}M_S}{R^3}} \right\} |\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R^3}} \\ \Leftrightarrow \frac{T^2}{R^3} &= \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

♥ Propriété M7.9 : $\mathcal{E}_m$ circulaire

L'énergie mécanique du mouvement circulaire d'un astre autour d'un autre vérifie

$$\mathcal{E}_{m,\text{cercle}} = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{2R}$$

Pour l'ellipse, on remplace R par a .

♥ Démonstration M7.9 : $\mathcal{E}_m$ circulaire

Enfin, avec (M7.3) et l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G} \frac{mM_S}{R} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}m \frac{\mathcal{G}M_S}{R} - \mathcal{G} \frac{mM_S}{R} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{2}m \frac{\mathcal{G}M_S}{R}} \right\} v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_m &= -\mathcal{G} \frac{mM_S}{2R} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

II/C Satellite en orbite terrestre

II/C) 1 Vitesses cosmiques

Définition M7.3 : 1^{re} vitesse cosmique

La première vitesse cosmique, ou *vitesse de satellisation minimale*, est la **vitesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir le placer en orbite **circulaire** à sa surface

Propriété M7.10 : 1^{re} vitesse cosmique

Sur Terre, on trouve

$$v_{\text{sat}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} \approx 8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Démonstration M7.10 : Première vitesse cosmique

Pour satelliser un corps, il faut faire varier son **énergie mécanique** d'un état partant **du sol** jusqu'**en orbite**. La **plus petite** énergie mécanique pour cela est celle de la **trajectoire circulaire de rayon R_T** . Ainsi, à partir de l'énergie mécanique d'un objet lancé au niveau du sol, on a

$$\varepsilon_{m,\text{sol}} = \frac{1}{2}mv_{\text{sat}}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{m,\text{cercle}} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{2R_T}$$

Or $\varepsilon_m = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{\text{sat}}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{2R_T} \Leftrightarrow v_{\text{sat}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}}$ ■

On retrouve v_{cercle} avec $R = R_T$! Pour des altitudes plus élevées, il faut davantage de vitesse.

Définition M7.4 : 2^{de} vitesse cosmique

La seconde vitesse cosmique, ou *vitesse de libération* et notée v_{lib} , correspond à la **vitesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir **l'éloigner définitivement** de la Terre.

Propriété M7.11 : 2^{de} vitesse cosmique

Pour la Terre, on trouve

$$v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{2}v_{\text{sat}} = 11 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$$

Démonstration M7.11 : Seconde vitesse cosmique

Pour éloigner définitivement un objet de la Terre, il faut un **état de diffusion**, donc que sa trajectoire soit au **minimum parabolique** :

$$\varepsilon_{m,\text{sol}} = \frac{1}{2}mv_{\text{lib}}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{m,\text{par}} = 0$$

Or $\varepsilon_m = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{\text{lib}}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T} = 0 \Leftrightarrow v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}}$ ■

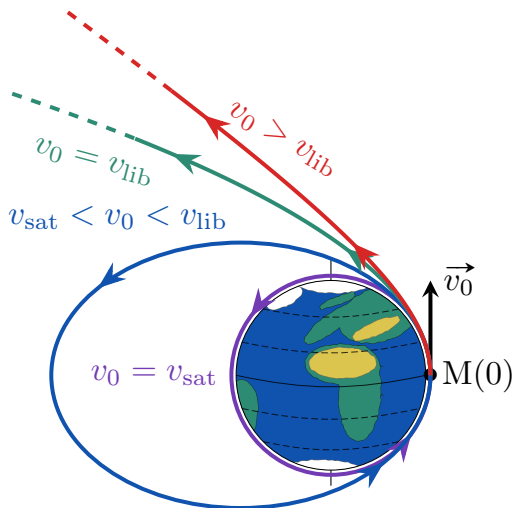
Exemple M7.2 : Trajectoires depuis la Terre

FIGURE M7.14 – Le code couleur correspond à celui de la Section I/C– Étude des trajectoires. La réalité est évidemment plus complexe que ça, étant donné les frottements, la non-galiléianité des référentiels, la prise en compte de la masse de carburant nécessaire, etc. . .

II/C) 2 Satellites artificiels**Définition M7.5 : Satellite géostationnaire**

Un satellite géostationnaire est un satellite qui **reste constamment au-dessus d'un même point** de la surface terrestre ; il apparaît donc immobile pour un observateur terrestre.

Mission typique : obtenir des images fixes de la Terre avec une vue éloignée (à des fins météorologiques par exemple).

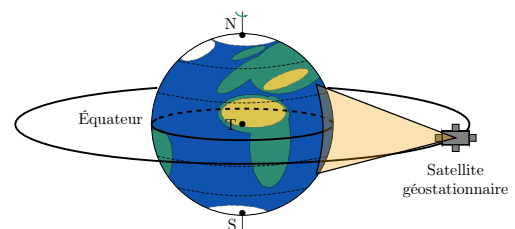


FIGURE M7.15 – Satellite géostationnaire.

♥ Propriété M7.12 : Satellite géostationnaire

- 1) Le plan de son orbite est le **plan de l'équateur** ;
- 2) Sa **vitesse angulaire est constante**, et vaut $\omega_{\text{sat}} = \omega_T = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$
- 3) Son **rayon est constant**, et on trouve $R_{\text{sat}} \approx 42 \times 10^6 \text{ m}$ soit $h_{\text{sat}} = R_{\text{sat}} - R_T \approx 36 \times 10^3 \text{ km}$

♥ Attention M7.2 : Jours solaire et sidéral

Il existe deux durées qui peuvent s'appeler « jour » :

- ◇ le **jour sidéral**, que l'on croit à tort être celui qu'on emploie au quotidien, et qui correspond à la durée nécessaire pour que la Terre effectue une **rotation complète sur elle-même** :

$$T_{\text{sidéral}} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}$$

- ◇ le **jour solaire** est l'intervalle de temps séparant deux **passages du Soleil au zénith** d'un point donné de la Terre, i.e. le temps qui sépare deux « midis » sur Terre ; on a

$$T_{\text{solaire}} = 24 \text{ h}$$

Ces deux notions diffèrent légèrement à cause de la révolution de la Terre autour du Soleil.

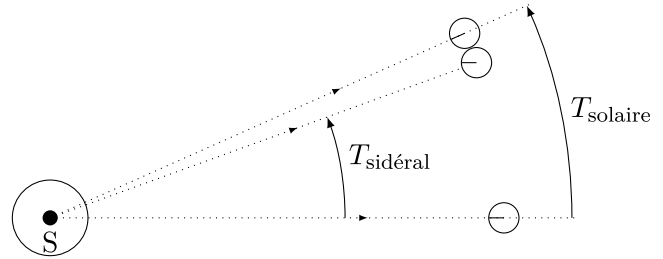


FIGURE M7.16

♥ Démonstration M7.12 : Satellite géostationnaire

- 1) En effet, la force étant centrale et conservative, le mouvement est un **plan passant par T le centre de la Terre**. Or, la Terre étant en rotation autour de l'axe de ses pôles, le seul plan contenant le centre de la Terre et permettant de rester **immobile par rapport à sa surface** est celui **contenant l'équateur**.
- 2) Pour la même raison, il doit avoir la **même vitesse angulaire que la Terre** : $\omega_{\text{sat}} = \dot{\theta} = \omega_T = \frac{2\pi}{T_{\text{sidéral}}}$
- 3) De plus, $C = r^2(t)\dot{\theta}(t)$, mais $\dot{\theta}(t) = \text{cte} = \omega_{\text{sat}}$, donc $r(t) = \text{cte} = R$. Ainsi :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \\ M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg} \\ T \approx 8,6 \times 10^4 \text{ s} \end{cases}$$

Définition M7.6 : Autres satellites

Satellites de positionnement.

Les satellites de positionnement fonctionnent par flotte de 20 à 30. Ils sont répartis dans quelques plans orbitaux (3 ou 6), de sorte qu'un point de la surface terrestre puisse toujours en voir au moins 3 dans le ciel.

- ◇ **Orbites** : $h \approx 20\,000 \text{ km}$
- ◇ **Mission** : GPS

Satellites circumpolaires.

Ces satellites oscillent entre les pôles Nord et Sud, et ont une période d'environ 1h à 2h afin de balayer de nombreuses zones de la surface terrestre en un jour.

- ◇ **Orbites** : perpendiculaires au plan équatorial, ces orbites sont basses (environ 700 km de haut).
- ◇ **Mission** : cartographier la surface terrestre de plus proche que ne pourrait le faire un satellite géostationnaire.

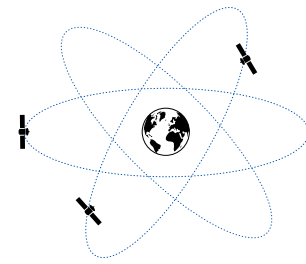


FIGURE M7.17 – positionnement.

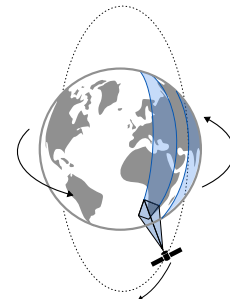


FIGURE M7.18 – Satellites circumpolaires

Remarque M7.1 : Sites internet

<https://www.ssec.wisc.edu/data/geo/> (géostationnaires), <https://earthnow.usgs.gov/observer/> et <https://worldview.earthdata.nasa.gov> (circumpolaires), et <https://stellarium-web.org/> (planétarium).