

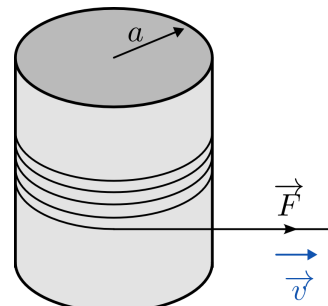
TD application : mécanique du solide



I Lancement d'une toupie

On souhaite lancer une toupie à ficelle. Pour cela il suffit de tirer cette dernière en maintenant la toupie sur son axe. On modélise l'action exercée par une force constante de norme F sur la ficelle et on suppose que celle-ci ne glisse pas sur la toupie.

On note a le rayon de la toupie, J son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation de $\omega(t)$ sa vitesse angulaire à tout instant.



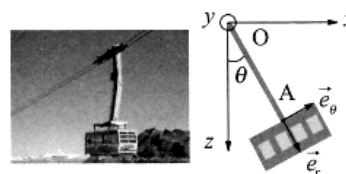
- 1 Relier la vitesse v avec laquelle on tire la ficelle aux grandeurs de l'énoncé. En déduire la puissance de l'opérateur.
- 2 En déduire l'équation différentielle vérifiée par ω .
- 3 Quelle sera la vitesse angulaire de la toupie après avoir totalement déroulé le fil (4 tours) ?



II Pendule pesant non amorti

Une benne de téléphérique, de masse $M = 2,0 \times 10^3$ kg, est accrochée au point A situé à l'extrémité inférieure d'un bras de masse $m = 300$ kg relié à des câbles au point O. On note $\ell = 4,5$ m la distance entre O et G le centre de gravité de l'ensemble {benne+bras}, situé sur l'axe (OA).

On note J_{tot} le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe de rotation y , et la liaison est supposée parfaite. On effectue un test d'oscillations de la benne, le point O étant maintenant fixe.



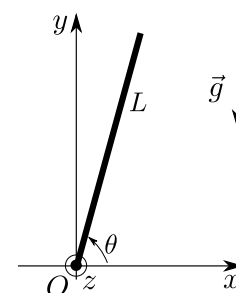
- 1 En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ .
- 2 En déduire la période T des petites oscillations de la benne.
- 3 Sachant que la période des petites oscillations est $T = 4,1$ s et que le bras de longueur $L = 3,0$ m a un moment d'inertie $J' = \frac{1}{3}mL^2$ par rapport à l'axe y , calculer le moment d'inertie J de la benne par rapport à y . On rappelle que $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ et on indique que dans ce cas, les moments d'inertie se somment.



III Chute d'un arbre

On étudie la chute d'un arbre : on souhaite connaître la durée que met l'arbre, une fois tranché à sa base, pour tomber au sol.

On modélise la situation par une tige homogène de hauteur $L = 10$ m et de masse m , reliée au sol par une liaison pivot parfaite et qui part d'un angle initial $\theta_0 = 1,5$ rad avec une vitesse initiale nulle. On donne le moment d'inertie par rapport à Oz : $J_z = \frac{1}{3}mL^2$.



- 1 Donner les expressions des énergies cinétique et potentielle de pesanteur de l'arbre. En déduire l'expression de son énergie mécanique.
- 2 Justifier que l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement. Exprimer cette constante en utilisant les conditions initiales.

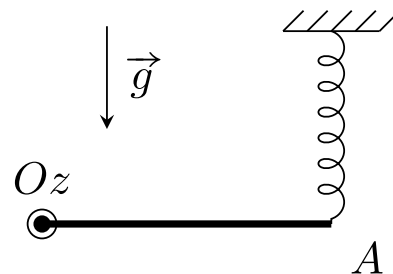
- 3 En déduire la relation $\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin \theta_0 - \sin \theta)}$
- 4 Retrouver ce résultat par le TMC.
- 5 Pour exprimer la durée T de la chute, isoler dt dans l'expression précédente puis l'intégrer entre $\theta = \theta_0$ et $\theta = 0$.
Faire l'application numérique, sachant que $\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta}} \approx 5,44$ pour $\theta_0 = 1,5$ rad.
- 6 *Bonus* Écrire un script `Python` permettant de calculer numériquement l'intégrale précédente. Vous utiliserez pour cela la fonction `quad` de la librairie `scipy.integrate`.

TD entraînement : mécanique du solide



I Barre fixée à ses extrémités

Considérons le système mécanique représenté ci-contre, constitué d'une barre homogène de masse m , de longueur $OA = 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe Oz (liaison parfaite). Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $J_z = \frac{4}{3}ma^2$. Elle est attachée en A à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k . L'autre extrémité du ressort est fixe.



- 1 À l'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical. En déduire la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de k, ℓ_0, m et g .
- 2 La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre, puis lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la période des petites oscillations. Comme les angles sont très petits, on peut considérer que le point A se déplace verticalement.

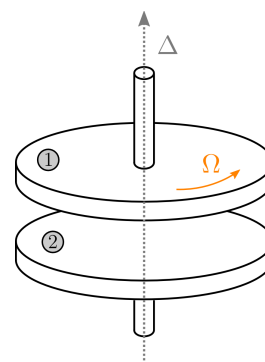


II Embrayage

Un embrayage est constitué de deux disques solides centrés sur un même axe Δ , pouvant glisser le long de cet axe. On note J_1 et J_2 leurs moments d'inertie par rapport à Δ . On étudie le système en absence de tout moment extérieur.

Initialement, les disques sont séparés. On lance le premier avec une vitesse angulaire Ω , puis à $t = 0$, on les colle.

On s'intéresse tout d'abord simplement à l'état final, où les deux disques sont synchronisés à la vitesse angulaire ω_f .



- 1 Donner l'expression de ω_f en fonction de J_1, J_2 et Ω .
- 2 Quel travail le premier disque a-t-il exercé sur le second entre $t = 0$ et $t = +\infty$?

À présent, on s'intéresse à la forme de l'évolution vers l'état final : on note $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ les vitesses angulaires des disques au cours du temps.

- 3 Montrer qu'à tout instant, on peut écrire $\omega_1(t) = \Omega - \frac{J_2}{J_1}\omega_2(t)$.

À tout instant, on suppose que le disque 1 applique un couple sur le disque 2, de la forme $\Gamma_{1 \rightarrow 2} = \alpha(\omega_1 - \omega_2)$.

- 4 Démontrer que l'on a les équations différentielles suivantes :

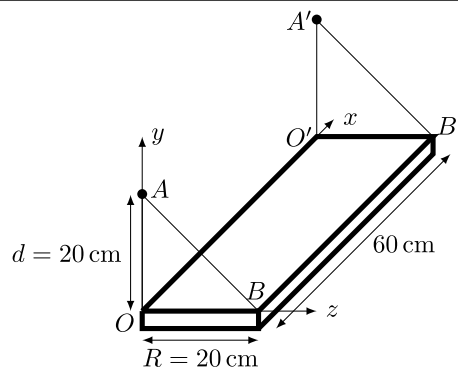
$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = \alpha(\omega_2 - \omega_1) \\ J_2 \dot{\omega}_2 = \alpha(\omega_1 - \omega_2) \end{cases}$$

- 5 Résoudre ces équations et donner la forme explicite des fonctions $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$.
- 6 Exprimer explicitement le travail reçu par le disque 2 entre $t = 0$ et $t = +\infty$ à partir de la puissance du disque 1 sur le disque 2. Comparer avec la question 2.
- 7 Quel est alors l'impact de la valeur de α sur l'évolution du système?



III Étagère murale

Une étagère est suspendue par quatre câbles métalliques et fixée au mur uniquement par deux pattes de fixation murale (en A et A'). La planche est en bois, de masse $m = 1,0 \text{ kg}$, de centre de masse G situé à la distance $R/2$ de l'axe $\Delta = (OO')$ et nous négligerons la masse des câbles.



- Exprimer les 4 forces de tension des câbles en fonction de normes arbitraires, la force de réaction $\vec{R}_N$ du mur sur la planche lorsque l'étagère est posée et en équilibre ainsi que le poids de l'étagère. $\vec{R}_N$ est supposée normale au mur. Calculer les valeurs numériques des normes des forces à l'aide de l'équilibre.
- On imagine que les 2 câbles fixés en B et B' se rompent en même temps. La planche n'est alors retenue que par les câbles OA et OA', et elle tourne donc autour de l'axe $\Delta = (OO')$. Nous négligerons son épaisseur et admettrons que son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ vaut $J_\Delta = mR^2$. Montrer qu'alors :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{mgR}{J_\Delta} \sin(\theta)$$

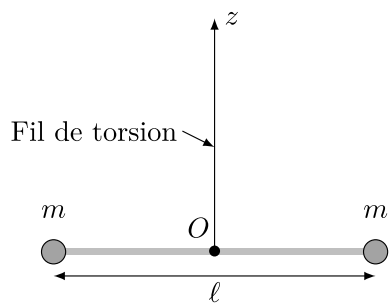
En déduire la vitesse angulaire de la planche lorsqu'elle percute le mur.



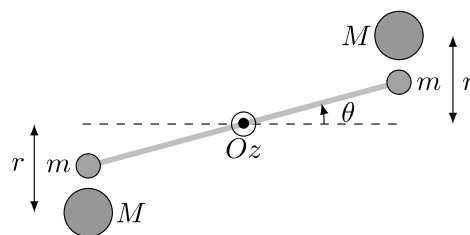
IV Expérience de CAVENDISH

L'expérience réalisée par CAVENDISH en 1789 a permis à ce dernier d'obtenir une valeur remarquable de la constante de gravitation universelle, $\mathcal{G}$. Le dispositif est constitué de deux petites sphères, de masse $m = 0,72 \text{ kg}$, fixées aux extrémités d'une tige de masse négligeable, rigide, et longueur $\ell = 180 \text{ cm}$ et suspendue horizontalement, en son milieu, à un fil de torsion vertical et très fin de constante de torsion C : si la tige tourne d'un angle θ par rapport à sa position d'équilibre $\theta = 0$, le fil exerce ainsi le couple de rappel $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{u}_z$ sur la tige.

Deux boules de plomb de masse $M = 160 \text{ kg}$ sont fixées, l'une derrière une petite sphère et l'autre devant l'autre petite sphère, à une distance $r = 20 \text{ cm}$ définie sur le schéma ci-dessous. Les deux forces d'attraction gravitationnelle produisent un couple qui fait tourner la tige d'un angle θ par rapport à sa position au repos. Les deux petites sphères se rapprochent ainsi des boules de plomb jusqu'à ce que la torsion du fil s'équilibre avec le couple gravitationnel.



Vue de face du pendule



Vue de dessus avec les boules de plomb

- Nous cherchons dans un premier temps à déterminer la constante de torsion C du pendule en faisant osciller celui-ci. Les boules en plomb ne sont pas encore présentes.
 - Montrer à l'aide du TMC que l'oscillateur est harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{m\ell^2}}$.
 - La mesure de la période T_0 des oscillations donne $T_0 = 7,0 \text{ min}$. En déduire la valeur de C .
- Les boules étant placées, déterminer l'expression de la déviation angulaire θ par rapport à la position d'équilibre. On tiendra compte du fait que θ est extrêmement faible pour évaluer le couple exercé par les deux boules de plomb, et on pourra utiliser l'équivalent $(1 - x)^{-2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + 2x$.
- La valeur obtenue par CAVENDISH à l'aide de ce dispositif et $\mathcal{G} = 6,75 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$. En déduire la déviation angulaire et commenter.