

Mécanique du solide

Sommaire

I Système de points matériels	2
I/A Mouvements d'un solide indéformable	2
I/B Étude de la translation par TRC	4
II Solide en rotation	5
II/A Moments de forces et moment cinétique	5
II/B Théorème du moment cinétique et applications	7
II/C Approche énergétique	8

Capacités exigibles

- ☐ Définition d'un solide; translation; rotation autour d'un axe fixe. Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
- ☐ Décrire la trajectoire d'un point quelconque d'un solide en rotation et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
- ☐ Définir un couple, définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
- ☐ Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
- ☐ Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d'un axe fixe, moment d'inertie.
- ☐ Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie masses.
- ☐ Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen. Établir une intégrale première du mouvement.
- ☐ Établir, dans le cas de la rotation, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.

L'essentiel

Définitions

M8.1 : Systèmes discrets vs. continus, indéformables	2
M8.2 : Mouvement de translation	2
M8.3 : Rotation, vecteur rotation	3
M8.4 : Forces intérieures et extérieures	4
M8.5 : Couple et liaison pivot	5
M8.6 : $\vec{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S})$ et moment d'inertie	5
M8.7 : Précession	8
M8.8 : Énergie cinétique d'un solide	8
M8.9 : Intégrale première du mouvement	9

Propriétés

M8.1 : $\vec{v}_M$ pour $\mathcal{S}_{rot}$	3
M8.2 : Résultante des forces intérieures	4
M8.3 : Moment des forces intérieures	5
M8.4 : $\vec{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S})$ et J_Δ	5
M8.5 : J_Δ et ω	7
M8.6 : Précession d'un volant d'inertie	8
M8.7 : $\mathcal{E}_c(\mathcal{S}, t)$ en rotation	8
M8.8 : Puissance des forces intérieures	8
M8.9 : $\mathcal{P}(\vec{F})$ en rotation	9

Démonstrations

M8.1 : $\vec{v}_M$ pour $\mathcal{S}_{rot}$	3
M8.2 : Résultante des forces intérieures	4
M8.3 : Moment des forces intérieures	5
M8.4 : $\vec{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ et J_Δ	6
M8.5 : J_Δ et ω	7
M8.6 : Précession	8
M8.7 : $\mathcal{E}_c(\mathcal{S}, t)$ en rotation	8
M8.8 : Puissance des forces intérieures	9
M8.9 : $\mathcal{P}(\vec{F})$ en rotation	9

Théorèmes

M8.1 : de la résultante cinétique (TRC)	4
M8.2 : du moment cinétique solide (TMC solide)	7
M8.3 : Énergétique pour le solide	9

Preuves

M8.1 : TRC	4
M8.2 : TMC solide	7
M8.3 : Énergétique pour le solide	9

Corollaires

M8.1 : Équivalence TPC/TMC scalaire	9
-------------------------------------	---

Applications

M8.1 : Pendule pesant par TMC	7
M8.2 : Pendule pesant par TPC	9
M8.3 : Intégrale première du pendule	10

Outils

M8.1 : Double produit vectoriel	6
M8.2 : Produit mixte	9

Points importants

M8.1 : Analyse du moment d'inertie	6
M8.2 : Analogie point translation/solide en rotation	10

Erreurs communes

M8.1 : Translation circulaire vs. rotation	3
M8.2 : TRC et rotation	5
M8.3 : Solide vs. centre d'inertie	6

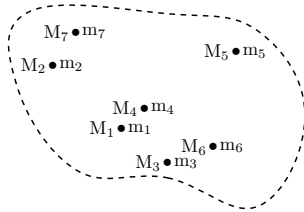
I Système de points matériels

I/A Mouvements d'un solide indéformable

Définition M8.1 : Systèmes discrets vs. continus, indéformables

Système discret

Un ensemble de n points matériels M_i de masses m_i .

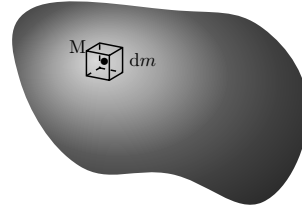


Un solide $\mathcal{S}$ **indéformable** est un ensemble de points tels que la distance entre deux points quelconques soit constante :

Du fait de ce caractère indéformable, on peut donc associer à un solide indéformable **un repère qui lui est propre**. Il suffit de prendre une origine quelconque dans le solide et trois axes pointant vers d'autres points du solide.

Système continu

Un ensemble d'éléments de volumes dV de masse dm .

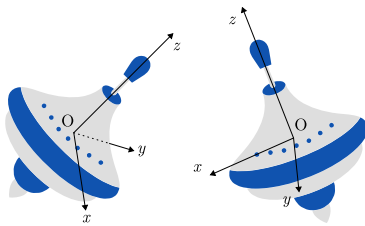


$\forall (M_1, M_2) \in (\text{solide}),$

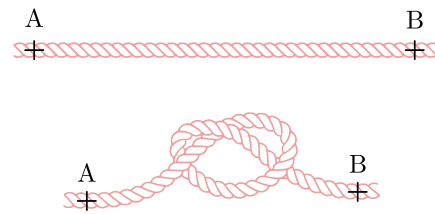
$$M_1 M_2 = \text{cte}$$

Exemple M8.1 : Solides déformables ou non

◇ Une toupie est un solide indéformable :



◇ Une corde n'est pas un solide indéformable :



Définition M8.2 : Mouvement de translation

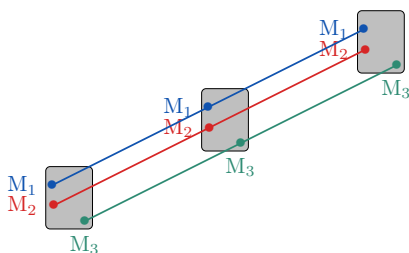
Un solide $\mathcal{S}$ en mouvement est en **translation** si son **orientation est fixe** au cours du mouvement. Ainsi, de manière équivalente :

- 1) $\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{S}, \quad \overrightarrow{M_1 M_2} = \text{cte};$
- 2) $\forall t, \forall (M_1, M_2) \in \mathcal{S}, \quad \vec{v}(M_1) = \vec{v}(M_2).$

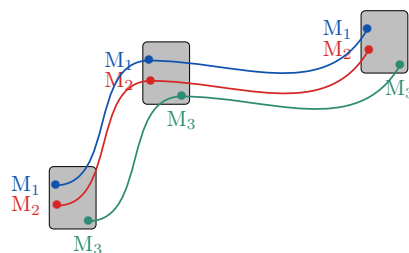
Alors, la connaissance du mouvement d'un point du solide en translation permet de connaître le mouvement de **tout point** du solide; on prendra habituellement le **centre d'inertie**.

Exemple M8.2 : Mouvements de translation

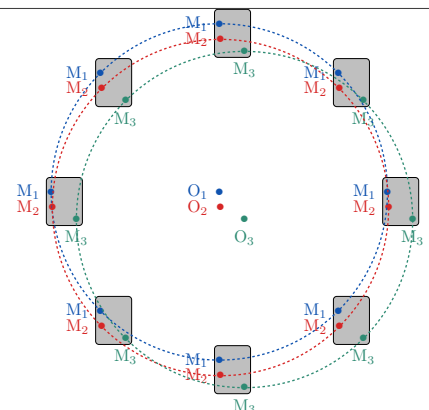
Translation rectiligne



Translation quelconque



Translation circulaire



♥ Définition M8.3 : Rotation, vecteur rotation

Un solide est dit en **mouvement de rotation** autour d'un **axe fixe** Δ si la **distance** de tout point du solide à tout **point de l'axe** est constante :

$$\forall M_i \in \mathcal{S}, \exists H_i \in \Delta : \|\overrightarrow{H_i M_i}\| = \text{cte}$$

Alors, tous les points ont un **mouvement circulaire** autour de cet axe, avec la **même vitesse angulaire**. On introduit pour cela le **vecteur rotation** $\vec{\omega}$ (parfois noté $\vec{\Omega}$) en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, tel que

$$\vec{\omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}(t) = \omega(t)\vec{u}_\Delta$$

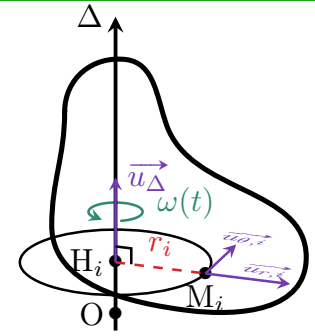


FIGURE M8.1 – Rotation.

♥ Propriété M8.1 : $\vec{v}_M$ pour $\mathcal{S}_{rot}$

En plaçant un point O sur l'axe de rotation Δ , la vitesse d'un point M_i du solide est

$$\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}(t) = \vec{\omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}(t) \wedge \overrightarrow{OM_i}(t)$$

Démonstration M8.1 : $\vec{v}_M$ pour $\mathcal{S}_{rot}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_i}(t) &= r_i \vec{u}_r + z \vec{u}_\Delta \\ \Rightarrow \vec{\omega}_{\mathcal{S}}(t) \wedge \overrightarrow{OM_i}(t) &= \omega(t) \vec{u}_\Delta \wedge (r_i \vec{u}_r + z \vec{u}_\Delta) \\ \Leftrightarrow \vec{\omega}_{\mathcal{S}}(t) \wedge \overrightarrow{OM_i}(t) &= r_M \omega(t) \vec{u}_\theta = \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}(t) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Implication M8.1 : Vitesse des points d'un solide en rotation

- ◇ La vitesse est nulle sur un point de l'axe, puisqu'alors $\overrightarrow{OM} \parallel \Delta$ donc $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{0}$;
- ◇ Le déplacement des points se fait perpendiculairement à l'axe de rotation (par propriété du produit vectoriel) ;
- ◇ Plus on s'éloigne de l'axe, plus la vitesse des points est élevée.

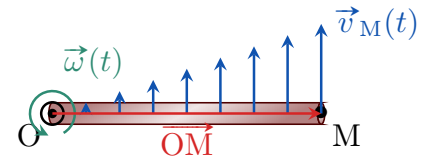


FIGURE M8.2 – Vitesse avec le rayon.

Attention M8.1 : Translation circulaire vs. rotation

	Translation circulaire	Rotation autour d'un axe fixe
Définition	Tous les points suivent une trajectoire circulaire de même rayon mais de centre différent	Tous les points suivent une trajectoire circulaire de même centre mais de rayon différent .
Schéma		
Photo		

Combinaison translation/rotation (HP)

Lors d'un mouvement combinant translation et rotation, la vitesse d'un point M du solide est donnée par :

$$\vec{v}_{M/R}(t) = \vec{v}_O(t) + \vec{\omega}(t) \wedge \overrightarrow{OM}(t)$$

I/B Étude de la translation par TRC**Rappel M8.1 : Centre d'inertie**

Le **centre d'inertie** (ou **de gravité**) G d'un ensemble de points M_i de masses m_i , avec $m_{\text{tot}} = \sum_i m_i$, est :

$$m_{\text{tot}} \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \Leftrightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

Il s'agit du **barycentre** des points du système, **pondéré par leur masse**.

Rappel M8.2 : $\vec{p}$ d'un ensemble de points

Le vecteur quantité de mouvement d'un ensemble $\mathcal{S}$ de points matériels M_i de masses m_i s'exprime :

$$\vec{p}_{\mathcal{S}/R}(t) = \sum_i \vec{p}_{M_i/R}(t) = \sum_i m_i \vec{v}_{M_i/R}(t)$$

La quantité de mouvement de cet ensemble $\mathcal{S}$ est celle d'un point matériel placé en G et de masse m_{tot} :

$$\vec{p}_{\mathcal{S}/R}(t) = m_{\text{tot}} \vec{v}_{G/R}(t) \quad \text{autrement dit, tout se passe comme si la masse était concentrée en G}$$

Définition M8.4 : Forces intérieures et extérieures

Les forces s'appliquant aux points M_i de $\mathcal{S}$ se rangent en deux catégories :

- 1) Les forces intérieures **centrales** $\vec{F}_{\text{int} \rightarrow i}$ exercées par les autres points $M_{j \neq i}$ du système ;
- 2) Les forces extérieures $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i}$ exercées par une origine externe au système.

On définit alors les forces totales sur le système :

$$\vec{F}_{\text{int} \rightarrow \mathcal{S}} = \sum_i \vec{F}_{\text{int} \rightarrow i} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i}$$

♥ Propriété M8.2 : Résultante des forces intérieures

La résultante des forces intérieures d'un système indéformable est toujours nulle.

Démonstration M8.2 : Résultante des forces intérieures

Pour M_i : $\vec{F}_{\text{int} \rightarrow i} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$ soit pour $\mathcal{S}$: $\vec{F}_{\text{int} \rightarrow \mathcal{S}} = \sum_i \vec{F}_{\text{int} \rightarrow i} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$

Or, 3^e loi : $\forall i \neq j, \vec{F}_{j \rightarrow i} = -\vec{F}_{i \rightarrow j} \Rightarrow \vec{F}_{\text{int} \rightarrow \mathcal{S}} = \sum_i \vec{F}_{\text{int} \rightarrow i} = \vec{0}$ ■

♥ Théorème M8.1 : de la résultante cinétique (TRC)

Le **PFD** pour un point se transpose à un *ensemble de points* en prenant pour **point matériel** le **centre d'inertie G** affecté de la masse totale m_{tot} du système, en ne considérant que les **forces extérieures** :

$$\text{TRC :} \quad \frac{d\vec{p}_{\mathcal{S}/R}}{dt} = m_{\text{tot}} \frac{d\vec{v}_{G/R}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}}$$

Preuve M8.1 : TRC

$$\frac{d\vec{p}_{\mathcal{S}/R}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_{M_i/R}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{\text{int} \rightarrow i} + \sum_i \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i}$$

$= \vec{0} \text{ par 3^e loi} \quad = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}} \text{ par déf.}$ ■

Attention M8.2 : TRC et rotation

Ce théorème ne contient que l'**information du centre d'inertie** ; il ne suffit pas à décrire tout le système, notamment les rotations pures !

II Solide en rotation**II/A Moments de forces et moment cinétique****♥ Propriété M8.3 : Moment des forces intérieures**

Le moment des actions intérieures d'un système indéformable est toujours nul.

Démonstration M8.3 : Moment des forces intérieures

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{int} \rightarrow \mathcal{S}}) = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{int} \rightarrow i}) = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{j \rightarrow i})$$

Or, en étudiant deux à deux les termes de la somme et en utilisant la 3^e loi de NEWTON :

$$\vec{\mathcal{M}}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} + \vec{\mathcal{M}}_j \wedge \underbrace{\vec{F}_{i \rightarrow j}}_{=-\vec{F}_{j \rightarrow i}} = \vec{\mathcal{M}}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} + \underbrace{-\vec{\mathcal{M}}_j \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i}}_{=\vec{\mathcal{M}}_j \vec{O}} = \vec{\mathcal{M}}_j \vec{M}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{0}$$

puisque les forces intérieures sont centrales. Ainsi, tous les termes s'annulent 2 à 2.

♥ Définition M8.5 : Couple et liaison pivot**Couple**

Un **couple** noté $\vec{\Gamma}$, est un **moment** issu d'une **force de résultante nulle**. Il **modifie la rotation** sans affecter la translation.

Couple de frottement

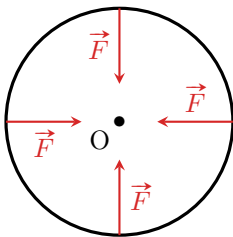
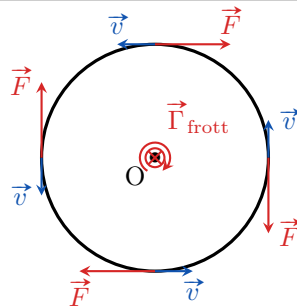
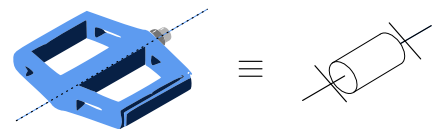
$$\vec{\Gamma}_{\text{frott}} = -\alpha \vec{\omega}(t)$$

Liaison pivot

Une **liaison pivot** est une **rotation guidée** : elle empêche la translation et force la rotation, avec un couple de frottement.

Pivot parfaite

Une liaison pivot est **parfaite** si son **couple est nul**.

Exemple M8.3 : Couples et pivot**Couple nul****Couple non nul****Pivot****♥ Définition M8.6 : $\vec{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S})$ et moment d'inertie**

Par rapport à un point O fixe dans $\mathcal{R}$ référentiel d'étude, le **moment cinétique d'un système** de points est la **somme des moments cinétiques** de chaque point :

$$\vec{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S}, t) = \sum_i \vec{\mathcal{L}}_O(M_i, t) = \sum_i \vec{\mathcal{O}}M_i(t) \wedge \vec{p}_{M_i/\mathcal{R}}(t)$$

L'**inertie de rotation** autour d'un axe Δ du système est donnée par le **moment d'inertie** :

$$J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{en} \quad \underline{\text{kg} \cdot \text{m}^2 = \text{J} \cdot \text{s}^2}$$

♥ Propriété M8.4 : $\vec{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S})$ et J_Δ

Pour $\mathcal{S}$ avec Δ son **axe de rotation**, $O \in \Delta$, J_Δ son **moment d'inertie** et $\vec{\omega}_\mathcal{S}(t)$ son **vecteur rotation**,

$$\vec{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S}, t) = J_\Delta \vec{\omega}_\mathcal{S}(t) \Rightarrow \mathcal{L}_\Delta(\mathcal{S}, t) = J_\Delta \omega(t)$$

♥ Outils M8.1 : Double produit vectoriel

Formule

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

Moyen mnémotechnique

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \underbrace{\vec{a} \wedge \vec{b}}_{\text{ABC, c'est assez bien}} \wedge \vec{c} = \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b}}_{\text{mais abaissé}} - \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}}$$

Démonstration M8.4 : $\vec{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ et J_Δ

Discret

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S}, t) &= \sum_i \vec{\mathcal{L}}_O(M_i, t) = \sum_i (\overrightarrow{OM_i}(t) \wedge m_i \vec{v}_i(t)) = \underbrace{(r_i \vec{u}_r)}_{\text{bleu}} \wedge (m_i \underbrace{\vec{\omega}_S(t)}_{\text{vert}} \wedge \underbrace{r_i \vec{u}_r}_{\text{rouge}}) \\ \Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S}, t) &= \sum_i m_i \underbrace{(r_i^2 \vec{\omega}_S(t))}_{\text{bleu}} - \underbrace{(\overbrace{r_i \vec{u}_r \cdot \vec{\omega}_S(t)}^{=0})}_{\text{bleu}} \underbrace{r_i \vec{u}_r}_{\text{rouge}} = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \vec{\omega}_S(t) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Continu (HP)

$$\mathcal{L}_\Delta = \int_{M \in \mathcal{S}} (\overrightarrow{OM} \wedge dm \vec{v}_M) \vec{u}_\Delta = \int_{M \in \mathcal{S}} \underbrace{(r \vec{u}_r \wedge r \omega(t) \vec{u}_\theta)}_{\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_\Delta} \vec{u}_\Delta dm \Leftrightarrow \mathcal{L}_\Delta = \left(\underbrace{\int_{M \in \mathcal{S}} r^2 dm}_{J_z} \right) \omega(t) \quad \blacksquare$$

Interprétation M8.1 : Lien $\vec{p}$ et $\vec{\mathcal{L}}$

Le moment d'inertie caractérise **l'inertie de rotation**, c'est-à-dire la facilité avec laquelle la rotation d'un solide s'établit ou s'arrête; il est analogue à la **masse** pour la translation, qui caractérise l'inertie d'un corps à être mis en mouvement. On peut alors associer $\vec{p} = m\vec{v}$ et $\vec{\mathcal{L}}_O = J\vec{\omega}$ et tous les théorèmes en découlent.

♥ Attention M8.3 : Solide vs. centre d'inertie

Ne pas confondre le solide avec son centre d'inertie!

$$\vec{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S}, t) \neq \vec{\mathcal{L}}_O(G, t)$$

Important M8.1 : Analyse du moment d'inertie

Plus la masse d'un solide est excentrée, plus le moment d'inertie est grand et plus il est difficile de le mettre en rotation.

Exemple M8.4 : Moments d'inertie divers

	Point	Cylindre	Sphère	Tige
Schéma				
J_Δ	$J_\Delta = mr^2$	$J_{\Delta, \text{plein}} = \frac{1}{2}mR^2$ $J_{\Delta, \text{creux}} = mR^2$	$J_{\Delta, \text{plein}} = \frac{2}{5}mR^2$ $J_{\Delta, \text{creux}} = \frac{2}{3}mR^2$	$J_{\Delta', \text{centre}} = \frac{1}{12}mL^2$ $J_{\Delta, \text{bout}} = \frac{1}{3}mL^2$

Remarque M8.1 : Moments d'inertie d'un solide

Le moment d'inertie d'un solide **dépend de l'axe de rotation** choisi! Un objet peut avoir des J_Δ différents selon l'axe Δ autour duquel il tourne. Par exemple, le moment d'inertie d'un téléphone est plus grand pour une rotation à plat, cf. Figure M8.3.

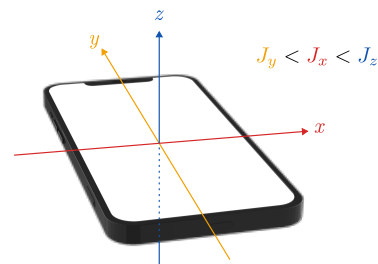


FIGURE M8.3

II/B Théorème du moment cinétique et applications

II/B) 1 Énoncé

♥ Théorème M8.2 : du moment cinétique solide (TMC solide)

Pour un solide $\mathcal{S}$ de moment d'inertie J_Δ dans $\mathcal{R}$ galiléen, O point **fixe** et Δ axe orienté **fixe** dans $\mathcal{R}$, on a

TMC vectoriel

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{O/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{dt} \triangleq J_\Delta \frac{d\vec{\omega}}{dt} \stackrel{\text{TMC}}{=} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}})$$

TMC scalaire

$$\frac{d\mathcal{L}_{\Delta/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{dt} \triangleq J_\Delta \ddot{\theta}(t) \stackrel{\text{TMC}}{=} \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}})$$

Preuve M8.2 : TMC solide

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S})}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O(M_i)}{dt} = \sum_i \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{int} \rightarrow M_i})}_{=\vec{0} \text{ par 3}^\circ \text{ loi}} + \sum_i \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M_i})}_{=\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}})}$$

♥ Application M8.1 : Pendule pesant par TMC

Un pendule pesant est un objet solide pouvant osciller **sans frottement** autour d'un axe z . **Trouver l'équation du mouvement.**

- Système et référentiel** : {pendule}, centre G, moment d'inertie J_Δ , $\mathcal{R}$ terrestre, supposé galiléen.
- Repère et repérage** : cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\Delta)$, O centre de la liaison pivot, $\vec{OG} = \ell \vec{u}_r$ et $\vec{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S}, t) = J_\Delta \dot{\theta}(t) \vec{u}_\Delta$
- Bilan des actions** :

Origine	Force	Moment
Poids	$\vec{P} = m\vec{g}$	$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mg\ell \sin(\theta)$
Pivot parfaite	$\vec{F} = -m\vec{g}$	$\vec{\Gamma} = \vec{0}$ car parfaite

$$5 \text{ TMC : } \frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta}(t) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) \Leftrightarrow \ddot{\theta}(t) + \frac{mg\ell}{J_\Delta} \sin(\theta(t)) = 0$$

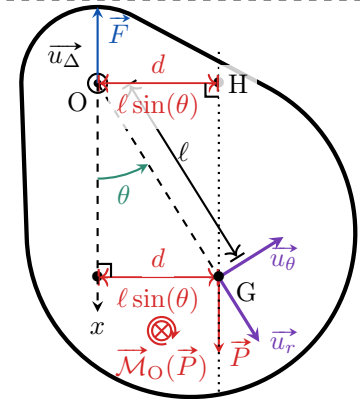


FIGURE M8.4 – 4

II/B) 2 Patinage artistique

Propriété M8.5 : J_Δ et ω

Si le moment cinétique d'un solide se conserve, alors rapprocher sa masse de l'axe augmente sa vitesse de rotation.

Démonstration M8.5 : J_Δ et ω

$$\mathcal{L}_\Delta = J_\Delta \dot{\theta}(t) = \text{cte} \Leftrightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{\text{cte}}{J_\Delta} \nearrow \text{ si } J_\Delta \searrow$$

Exemple M8.5 : Patinage artistique

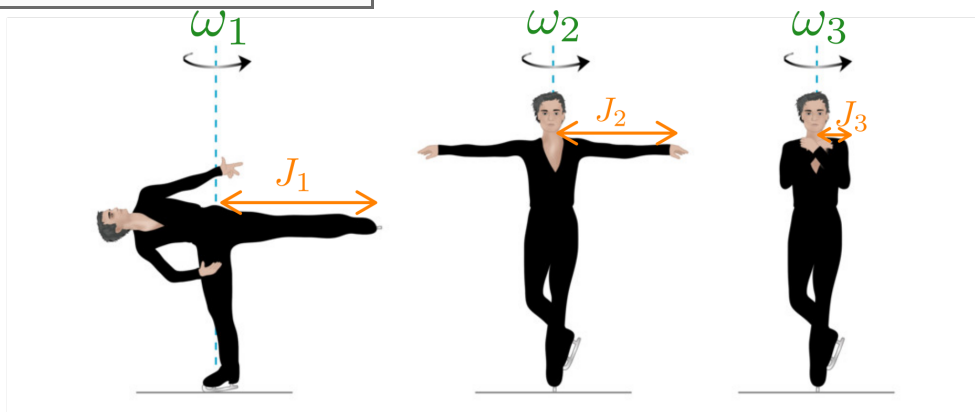


FIGURE M8.5 – Un-e patineur-euse accélère en rapprochant ses bras de son corps

II/B) 3 Précession

Définition M8.7 : Précession

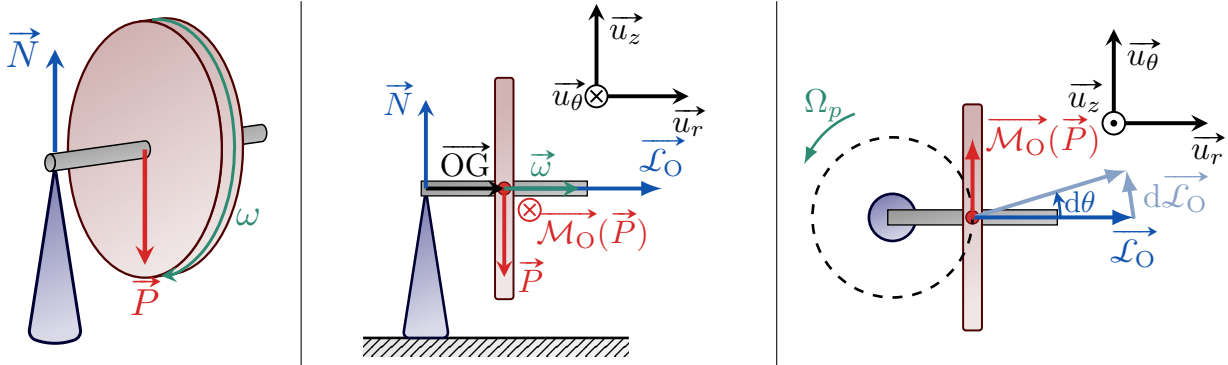
On appelle **précession** le **changement graduel** de la **direction de l'axe de rotation** d'un solide en rotation rapide : c'est le cas d'une toupie ou d'un gyroscope.

Propriété M8.6 : Précession d'un volant d'inertie

Soit un disque solide de moment d'inertie J_r , en rotation à la vitesse angulaire ω autour de son axe de symétrie. Posé sur un axe horizontal de demi-longueur d , le poids fait **varier son axe de rotation** : son **moment cinétique change de direction**, dans le plan perpendiculaire au poids, avec la vitesse angulaire de précession :

$$\Omega_p = \frac{mgd}{J_r \omega}$$

♥ Démonstration M8.6 : Précession



1 **Système et référentiel** : {volant d'inertie} à $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_r$ de moment d'inertie J_r dans $\mathcal{R}_{\text{terre}}$ supposé galiléen.

2 **Repère et repérage** : cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, O centre de la liaison pivot, $\vec{OG} = d\vec{u}_r$ et $\vec{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S}, t) = J_r \omega \vec{u}_r$

3 **Bilan des actions** :

	Origine	Force	Moment
Poids		$\vec{P} = -mg\vec{u}_z$	$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = mgd\vec{u}_\theta$
Support		$\vec{N} = N\vec{u}_z$	$\vec{\Gamma}_{\text{frott}} = \vec{0}$

5 **TMC** :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) \Leftrightarrow J_r \omega \cdot \dot{\theta}_p \vec{u}_\theta = mgd \vec{u}_\theta \Rightarrow \Omega_p = \frac{mgd}{J_r \omega}$$

Vidéos

[Animation 3D](#) et vidéo de [Walter LEWIN](#)

II/C Approche énergétique

Définition M8.8 : Énergie cinétique d'un solide

L'énergie cinétique d'un solide est la **somme des énergies cinétiques de ses points** :

$$\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(\mathcal{S}, t) = \sum_i \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(M_i, t) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{M_i/\mathcal{R}}^2(t)$$

♥ Propriété M8.7 : $\mathcal{E}_c(\mathcal{S}, t)$ en rotation

L'énergie cinétique d'un solide en rotation à la vitesse angulaire $\omega(t)$ autour de l'axe Δ est

$$\mathcal{E}_{c, \text{rot}}(t) = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2(t)$$

Démonstration M8.7 : $\mathcal{E}_c(\mathcal{S}, t)$ en rotation

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{c, \text{rot}}(t) &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{M_i}(t)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2(t) \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_{c, \text{rot}}(t) &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{J_\Delta} \right) \omega^2(t) \end{aligned}$$

♥ Propriété M8.8 : Puissance des forces intérieures

La puissance des forces intérieures d'un système indéformable est nulle.

Démonstration M8.8 : Puissance des forces intérieures

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{int} \rightarrow \mathcal{S}}) = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{int} \rightarrow i}) = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{v}_{M_i/M_j} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \frac{d\vec{M}_j \vec{M}_i}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{int} \rightarrow \mathcal{S}}) = \sum_i \sum_{j \neq i} \overbrace{\vec{F}_{j \rightarrow i} \cdot \underbrace{(\vec{\omega}_S(t) \wedge \vec{M}_j \vec{M}_i)}_{\perp \vec{M}_j \vec{M}_i}}^{\substack{=0 \\ \parallel \vec{M}_j \vec{M}_i}} \quad \text{car} \quad \text{forces centrales}$$

♥ Propriété M8.9 : $\mathcal{P}(\vec{F})$ en rotation

La puissance d'une force sur un corps en rotation à $\vec{\omega}(t)$ autour de Δ est

$$\mathcal{P}_{\text{rot}}(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{\omega} = \mathcal{M}_\Delta \omega(t)$$

♥ Outils M8.2 : Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est le scalaire :

Antisymétrie

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) \\ = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{c}) \\ = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{b}) \end{aligned}$$

Alternance

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) \\ = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) \\ = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) \end{aligned}$$

Volume

Le parallélépipède formé par les vecteurs a un volume :

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})|$$

Démonstration M8.9 : $\mathcal{P}(\vec{F})$ en rotation

$$\mathcal{P}_{\text{rot}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot (\vec{\omega}(t) \wedge \vec{OM}(t)) = (\vec{OM}(t) \wedge \vec{F}) \cdot \vec{\omega}(t) \quad \blacksquare$$

♥ Théorème M8.3 : Énergétique pour le solide

Les théorèmes énergétiques s'écrivent avec les actions **intérieures** (nulle si indéformable) et **extérieures** :

TEC, TPC

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_{c/R} &= \mathcal{W}_{\text{ext}/R} + \mathcal{W}_{\text{int}/R} \\ \frac{d\mathcal{E}_{c/R}}{dt} &= \mathcal{P}_{\text{ext}/R} + \mathcal{P}_{\text{int}/R} \end{aligned}$$

TEM, TPM

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_{m/R} &= \mathcal{W}_{\text{ext,NC}/R} + \mathcal{W}_{\text{int,NC}/R} \\ \frac{d\mathcal{E}_{m/R}}{dt} &= \mathcal{P}_{\text{ext,NC}/R} + \mathcal{P}_{\text{int,NC}/R} \end{aligned}$$

Preuve M8.3 : Énergétique pour le solide

Il suffit d'appliquer le TPC ou TPM à chaque point matériel M_i , en incluant $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i}$ et $\vec{F}_{\text{int} \rightarrow i}$ et de sommer.

Corollaire M8.1 : Équivalence TPC/TMC scalaire

Dans le cas du solide indéformable en rotation, l'expression du théorème de la puissance cinétique est équivalente à celle du théorème du moment cinétique.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_{c/R}}{dt} &= \mathcal{P}_{\text{ext}/R} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}}) \omega(t) \\ \Leftrightarrow J_\Delta \ddot{\theta}(t) \omega(t) &= \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}}) \omega(t) \\ \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} &= \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}}) \end{aligned}$$

♥ Application M8.2 : Pendule pesant par TPC

On repart du pendule pesant (Ap.M8.1), avec $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mg\ell \sin(\theta)$. Retrouver l'ED par TPC.

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}, t) = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\vec{P}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) \omega$$

Or, TPC $\Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) \Leftrightarrow J_\Delta \dot{\omega} \omega = -mg\ell \sin(\theta) \omega \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{J_\Delta} \sin(\theta) = 0 \quad \blacksquare$

♥ Définition M8.9 : Intégrale première du mouvement

Une intégrale première du mouvement est une équation de conservation faisant intervenir une coordonnée du mouvement et sa première dérivée ; c'est souvent une **forme intégrée de l'équation différentielle**.

♥ Application M8.3 : Intégrale première du pendule

À partir de l'équation du mouvement du pendule pesant, on obtient une intégrale première du mouvement en **multipliant par $\dot{\theta}$** et **en intégrant**. On retrouve la conservation de l'énergie mécanique :

$$J_z \ddot{\theta} \cdot \dot{\theta} + mgl \sin(\theta) \cdot \dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2(t) - mgl \cos(\theta) = cte \Leftrightarrow \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p(\theta) = cte = \mathcal{E}_m$$



À l'inverse, on peut **trouver l'ED du mouvement en dérivant l'énergie mécanique** !

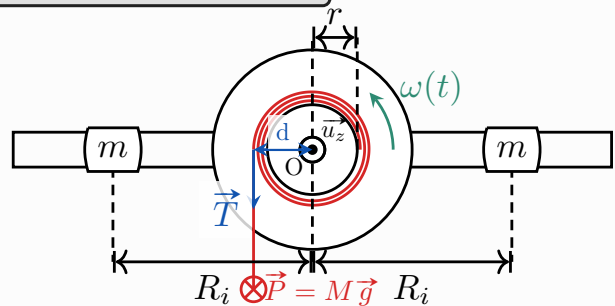
Important M8.2 : Analogie point translation/solide en rotation

	Inertie	Vitesse	Quantité	Action	Évolution	$\mathcal{E}_c$	$\mathcal{P}$
Point	m	$\vec{v}$	$\vec{p} = m \vec{v}$	$\vec{F}$	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$	$\frac{1}{2} m v^2$	$\vec{F} \cdot \vec{v}$
Solide	J_Δ	$\vec{\omega}$	$\vec{\mathcal{L}} = J_\Delta \vec{\omega}$	$\vec{\mathcal{M}}$	$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}$	$\frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$	$\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\omega}$

Expérience M8.1 : Mesure d'un moment d'inertie

On étudie un système en rotation disposant de deux bras sur lesquels se fixent deux masses $m = (258,24 \pm 0,01) \text{ g}$ à des distances variables R_i .

On attache une masse $M = (100,08 \pm 0,01) \text{ g}$ à un fil, enroulé autour du disque principal par une poulie. Le fil transmet la force du poids *via* sa tension. On appelle ℓ la longueur enroulée. Le bras de levier de la force est $d = r$, donc son moment est $\mathcal{M}_z = Mgr$.



En lâchant la masse, le système est mis en rotation. On appelle ω_f la vitesse angulaire du système lorsque le fil de la masse se détache. On contrôle deux grandeurs :

◇ la longueur de fil enroulé ℓ ;

◇ la distance R_i des deux masses.

La longueur de fil enroulé va contraindre la quantité d'énergie potentielle de la masse M qui va transformer en énergie cinétique de rotation du système. Cette énergie de rotation dépend du moment d'inertie du système, qui lui-même dépend de la distance R_i .

Une pince optique est installée afin de détecter le passage des bras lors de la rotation. Ceci permet de déterminer la vitesse angulaire finale ω_f . En mesurant ℓ et ω_f , on peut alors déterminer le moment d'inertie du système :

$$\Delta \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J_z \omega_f^2 = \mathcal{W}(\vec{P})$$

Or,
$$\mathcal{W}(\vec{P}) = \int_0^t \mathcal{P}(\vec{P}) dt$$

$$\Leftrightarrow \int \mathcal{M}_z \omega(t) dt = Mgr \int_0^{\theta_f} d\theta$$

Ainsi

$$\frac{1}{2} J_z \omega_f^2 = Mg \underbrace{r \theta_f}_{=\ell}$$

$$\Leftrightarrow J_z = \frac{2Mg\ell}{\omega_f^2}$$

On peut ainsi vérifier la relation $J_z = aR_i^2 + cte$ (il faut prendre en compte le moment d'inertie du disque principal et des bras). L'expérience est réalisée sur le Capytale suivant : <https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/a42d-3143216>.