

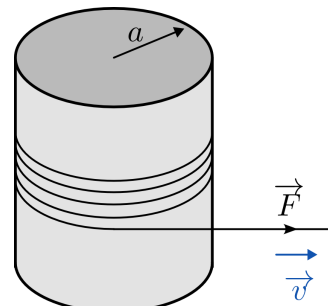
Correction du TD d'application



I Lancement d'une toupie

On souhaite lancer une toupie à ficelle. Pour cela il suffit de tirer cette dernière en maintenant la toupie sur son axe. On modélise l'action exercée par une force constante de norme F sur la ficelle et on suppose que celle-ci ne glisse pas sur la toupie.

On note a le rayon de la toupie, J son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation de $\omega(t)$ sa vitesse angulaire à tout instant.



- 1 Relier la vitesse v avec laquelle on tire la ficelle aux grandeurs de l'énoncé. En déduire la puissance de l'opérateur.

Réponse

Puisqu'il n'y a pas de glissement, la vitesse de la ficelle est égale à la vitesse de rotation de la toupie, soit $v = a\omega$.

Ainsi

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv = Fa\omega(t)$$



- 2 En déduire l'équation différentielle vérifiée par ω .

Réponse

On a

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} J \omega^2(t)$$

Ainsi

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = J\dot{\omega}(t)\omega(t) \stackrel{\text{TPC}}{=} Fa\omega(t)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\omega}(t) = \frac{Fa}{J}$$



- 3 Quelle sera la vitesse angulaire de la toupie après avoir totalement déroulé le fil (4 tours) ?

Réponse

On intègre :

$$\omega(t) = \frac{Fa}{J}t + \underbrace{\omega(0)}_{=0} \quad \theta = \int \omega(t)dt \Rightarrow \theta(t) = \frac{Fa}{2J}t^2$$

À t_f :

$$\theta(t_f) = \theta_f = 4 \times 2\pi \Leftrightarrow t_f = 4\sqrt{\frac{\pi J}{Fa}}$$

Ainsi

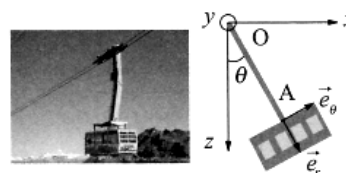
$$\omega(t_f) = 4\sqrt{\frac{\pi Fa}{J}}$$



II Pendule pesant non amorti

Une benne de téléphérique, de masse $M = 2,0 \times 10^3$ kg, est accrochée au point A situé à l'extrémité inférieure d'un bras de masse $m = 300$ kg relié à des câbles au point O. On note $\ell = 4,5$ m la distance entre O et G le centre de gravité de l'ensemble {benne+bras}, situé sur l'axe (OA).

On note J_{tot} le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe de rotation y , et la liaison est supposée parfaite. On effectue un test d'oscillations de la benne, le point O étant maintenant fixe.



- 1 En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ .

Réponse

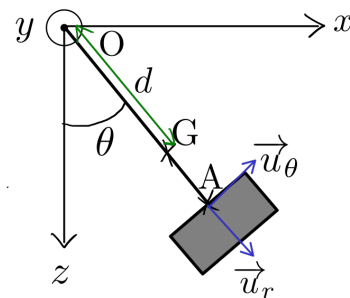
◇ **Système** : {benne+bras} solide de masse $m_{\text{tot}} = m + M$

◇ **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.

◇ **Repère** : cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_y)$ avec O centre de la liaison pivot.

◇ **Repérage** :

$$\begin{cases} \vec{OG} = \ell \vec{e}_r \\ \vec{v}(G) = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \vec{a}(G) = \ell \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \ell \dot{\theta}^2 \vec{e}_r \\ \vec{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S}) = J_{\text{tot}} \dot{\theta} \vec{e}_y \end{cases}$$



◇ **Bilan des forces** :

▷ $\vec{P} = m_{\text{tot}} g \vec{e}_y = m_{\text{tot}} g (\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$

▷ $\vec{F}$ réaction en O

◇ **Bilan des moments** :

▷ $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = (\ell \vec{e}_r) \wedge (m_{\text{tot}} g (\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta)) \Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = -m_{\text{tot}} g \ell \sin(\theta) \vec{e}_y}$

Par projection, on retrouve le résultat qu'on aurait eu avec le bras de levier :

$$d = \ell \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \|\vec{P}\| = m_{\text{tot}} g \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_y(\vec{P}) = -m_{\text{tot}} g \ell \sin(\theta)}$$

▷ $\vec{\Gamma}_O(\vec{P}) = \vec{0}$ car pivot parfait

◇ **TMC** : $\frac{d\mathcal{L}_y(\mathcal{S})}{dt} = \mathcal{M}_y(\vec{P}) \Leftrightarrow J_{\text{tot}} \ddot{\theta} = -m_{\text{tot}} g \ell \sin(\theta) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{m_{\text{tot}} g \ell}{J_{\text{tot}}} \sin(\theta) = 0}$



2 En déduire la période T des petites oscillations de la benne.

Réponse

Petites oscillations $\Rightarrow \sin(\theta) \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \theta$, donc oscillateur harmonique :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{\text{tot}} g d}{J_{\text{tot}}}} \Leftrightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\text{tot}}}{m_{\text{tot}} g d}}}$$



3 Sachant que la période des petites oscillations est $T = 4,1 \text{ s}$ et que le bras de longueur $L = 3,0 \text{ m}$ a un moment d'inertie $J' = \frac{1}{3} m L^2$ par rapport à l'axe y , calculer le moment d'inertie J de la benne par rapport à y . On rappelle que $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ et on indique que dans ce cas, les moments d'inertie se somment.

Réponse

En restant autour du même axe, les moments cinétiques se somment, soit $J_{\text{tot}} = J_{\text{bras}} + J_{\text{benne}}$. On isole J_{tot} :

$$\begin{aligned} J_{\text{tot}} &= \frac{T^2}{4\pi^2} m_{\text{tot}} g d \\ \Leftrightarrow J &= \frac{T^2}{4\pi^2} m_{\text{tot}} g d - J' \\ \Leftrightarrow J &= \frac{T^2}{4\pi^2} m_{\text{tot}} g d - \frac{m L^2}{3} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T = 4,1 \text{ s} \\ L = 3,0 \text{ m} \\ d = 4,5 \text{ m} \\ m = 300 \text{ kg} \\ m_{\text{tot}} = 2,3 \times 10^3 \text{ kg} \\ g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \end{cases}$$

A.N. : $J = 4,2 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

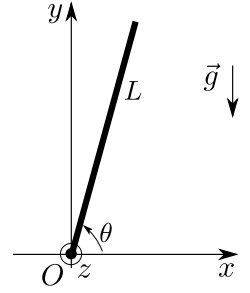




III Chute d'un arbre

On étudie la chute d'un arbre : on souhaite connaître la durée que met l'arbre, une fois tranché à sa base, pour tomber au sol.

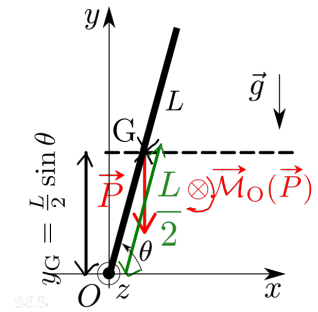
On modélise la situation par une tige homogène de hauteur $L = 10$ m et de masse m , reliée au sol par une liaison pivot parfaite et qui part d'un angle initial $\theta_0 = 1,5$ rad avec une vitesse initiale nulle. On donne le moment d'inertie par rapport à Oz : $J_z = \frac{1}{3}mL^2$.



- 1 Donner les expressions des énergies cinétique et potentielle de pesanteur de l'arbre. En déduire l'expression de son énergie mécanique.

Réponse

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t) &= \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{p,p}(y) = mgy_G + 0 \\ \text{Or} \quad y_G(\theta) &= \frac{L}{2}\sin(\theta) \Rightarrow \varepsilon_{p,p}(\theta) = \frac{mgL}{2}\sin(\theta) \\ \Rightarrow \quad \varepsilon_m &= \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{mgL}{2}\sin(\theta) \end{aligned} \quad (\text{M8.1})$$



- 2 Justifier que l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement. Exprimer cette constante en utilisant les conditions initiales.

Réponse

Le système n'est soumis qu'à son poids, conservatif, et à l'action de la liaison pivot, supposée parfaite donc sans frottement. Le système est donc conservatif, et par TPM on a $\frac{d\varepsilon_m}{dt} = 0$.

On a donc $\varepsilon_m(t) = \varepsilon_m(0)$, or $\varepsilon_c(0) = 0$ et $\varepsilon_{p,p}(0) = \frac{mgL}{2}\sin(\theta_0)$, soit

$$\varepsilon_m = \frac{mgL}{2}\sin(\theta_0) \quad (\text{M8.2})$$

- 3 En déduire la relation $\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{L}}(\sin\theta_0 - \sin\theta)$

Réponse

$$\begin{aligned} (\text{M8.1}) &= (\text{M8.2}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}J\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \frac{mgL}{2}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta)) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \frac{3mgL}{mL^2}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta)) \\ \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} &= \pm\sqrt{\frac{3g}{L}}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Or, de toute évidence θ **diminue** puisque l'arbre tombe ($\mathcal{M}_z(\vec{P}) < 0$), soit

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{L}}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta))$$

- 4 Retrouver ce résultat par le TMC.

Réponse

Avec le bras de levier, on a $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -\frac{mgL}{2} \cos(\theta)$. Ainsi, avec le TMC,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{L}_z}{dt} &= \mathcal{M}_z(\vec{P}) \\
 \Leftrightarrow J\ddot{\theta} &= -\frac{mgL}{2} \cos(\theta) \\
 \Leftrightarrow J\ddot{\theta}\dot{\theta} &= -\frac{mgL}{2} \cos(\theta)\dot{\theta} \\
 \Rightarrow J \int_{t=0}^t \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right] dt &= -\frac{mgL}{2} \int_{t=0}^t \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} dt \\
 \Leftrightarrow \underbrace{\dot{\theta}^2(t) - \dot{\theta}^2(0)}_{=0} &= -\frac{mgL}{2J} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) \\
 \Leftrightarrow \dot{\theta}^2(t) &= -\frac{3mgL}{2J} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) \\
 \Leftrightarrow \dot{\theta}^2(t) &= \frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta)) \\
 \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}}
 \end{aligned}$$

Diagramme de dérivation à droite :

- $\times \dot{\theta}$ (dans un cercle)
- $\int (\cdot) dt$ (dans un cercle)
- $\int \cos(\theta) d\theta = \int d[\sin(\theta)]$
- $J = \frac{mL^2}{3}$
- On prend l'opposé
- $\frac{d\theta}{dt} < 0$

On retiendra ici deux choses :

Important M8.1 : À retenir

- ◇ Penser à multiplier par $\dot{\theta}$ pour facilement intégrer les relations avec $\ddot{\theta}$ et des fonctions transcendantes (cos, sin...)
- ◇ Attention en prenant la racine carré d'une fonction : toujours écrire les deux valeurs possibles et vérifier la faisabilité physiquement.

- 5 Pour exprimer la durée T de la chute, isoler dt dans l'expression précédente puis l'intégrer entre $\theta = \theta_0$ et $\theta = 0$. Faire l'application numérique, sachant que $\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta}} \approx 5,44$ pour $\theta_0 = 1,5$ rad.

Réponse

On inverse pour avoir

$$dt = \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}}$$

Or, quand $t|_0^{t_f}$, on a $\theta|_{\theta_0}^{\theta_f=0}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_f} dt &= \int_{\theta_0}^0 \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}} \\
 \Leftrightarrow t_f - 0 &= \sqrt{\frac{L}{3g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta_0) - \sin(\theta)}}
 \end{aligned}$$

On inverse les bornes avec –

A.N. : $t_f = 3,2$ s

- 6 *Bonus* Écrire un script Python permettant de calculer numériquement l'intégrale précédente. Vous utiliserez pour cela la fonction `quad` de la librairie `scipy.integrate`.

Réponse

On obtient bien $t_f = 3,17$ s avec :



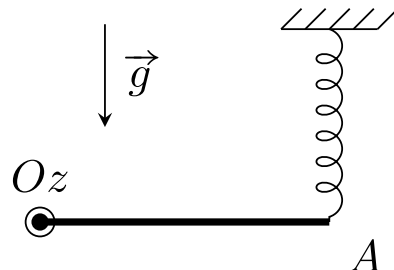
```
1  from scipy.integrate import quad # Module d'intégration "quad"
2  import numpy as np
3
4  # Intervalle d'intégration
5  theta_0 = 1.5 # rad
6  theta_f = 0 # rad
7
8  # Constantes
9  L = 10 # m
10 g = 9.81 # m.s^-2
11 K = np.sqrt(L / (3 * g)) # s
12
13
14 # Fonction à intégrer
15 def function(theta):
16     return K / (np.sqrt(np.sin(theta_0) - np.sin(theta)))
17
18
19 # Calcul de l'intégrale
20 res, err = quad(function, theta_f, theta_0)
21
22 # Affichage du résultat
23 print(f"Résultat de l'intégrale = {res:.2f} ± {err:.2f}")
```



Correction du TD d'entraînement

I Barre fixée à ses extrémités

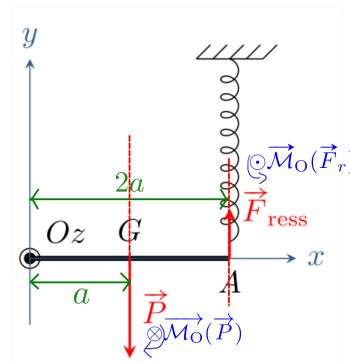
Considérons le système mécanique représenté ci-contre, constitué d'une barre homogène de masse m , de longueur $OA = 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe Oz (liaison parfaite). Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $J_z = \frac{4}{3}ma^2$. Elle est attachée en A à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k . L'autre extrémité du ressort est fixe.



- 1 À l'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical. En déduire la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de k, ℓ_0, m et g .

Réponse

- ◇ **Système** : {barre}
- ◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen
- ◇ **Repère** : $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$
- ◇ **Repérage** : $\vec{OG} = a\vec{u}_x$, $\vec{OA} = 2a\vec{u}_x$ et $\vec{L}_O(M) = J\dot{\theta}(t)\vec{u}_z$
- ◇ **BdF** : à l'équilibre, le ressort est vertical, soit
 - ▷ $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$;
 - ▷ $\vec{F}_r = k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u}_y$.
 - ▷ $\vec{F}_{pivot} = \vec{0}$



- ◇ **BdM** : avec les bras de levier, qui se confondent ici avec les distances des points d'application puisque les droites d'actions sont perpendiculaires à l'objet, on trouve
 - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -a \times mg$ (sens horaire) ;
 - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = +2a \times k(\ell_{eq} - \ell_0)$.
 - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{F}_{pivot}) = 0$ pivot parfaite.
- ◇ **TMC** : à l'équilibre, pas de rotation donc

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = 0 \Leftrightarrow -mga + 2ak(\ell_{eq} - \ell_0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}}$$

- 2 La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre, puis lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la période des petites oscillations. Comme les angles sont très petits, on peut considérer que le point A se déplace verticalement.

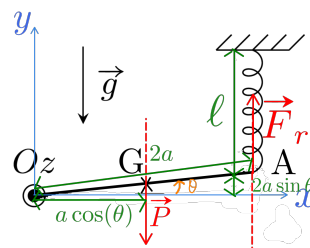
Réponse

Avec un angle, les droites d'actions ne sont plus perpendiculaires à la barre donc les bras de levier ne se confondent plus avec les distances des points d'application. Il faut refaire un schéma et recalculer les moments :

- ◇ **BdM** :
 - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -a \cos(\theta) \times mg$;
 - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = +2a \cos(\theta) \times k(\ell - \ell_0)$

Or, ℓ n'est plus ℓ_{eq} puisqu'on n'est plus à l'équilibre. On trouve $\ell = \ell_{eq} - 2a \sin(\theta)$, soit finalement

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = +2a \cos(\theta) \times k(\ell_{eq} - 2a \sin(\theta) - \ell_0)$$



◇ TMC :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} &= \sum_i \mathcal{M}_z(\vec{F}_i) \\
\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} &= -a \cos(\theta) \times mg + 2a \cos(\theta) \times k(\ell_{\text{eq}} - 2a \sin(\theta) - \ell_0) \quad \left. \begin{array}{l} \cos(\theta) \approx 1 \\ \sin(\theta) \approx \theta \end{array} \right\} \\
\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} &= -mga + 2ak(\ell_{\text{eq}} - 2a\theta - \ell_0) \\
\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} &= -mga - 4ak\theta + 2ak(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) \quad \left. \begin{array}{l} 2ak(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = mga \\ J_z = \frac{4}{3}ma^2 \end{array} \right\} \\
\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} &= -mga + mga - 4ak\theta \\
\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3k}{m}\theta &= 0 \\
\Rightarrow T_0 &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{3k}}
\end{aligned}$$

■

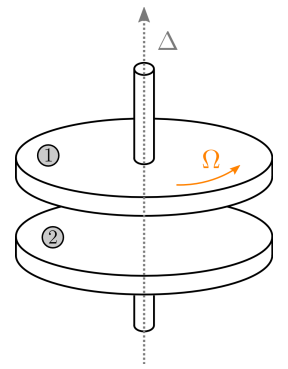


II Embrayage

Un embrayage est constitué de deux disques solides centrés sur un même axe Δ , pouvant glisser le long de cet axe. On note J_1 et J_2 leurs moments d'inertie par rapport à Δ . On étudie le système en absence de tout moment extérieur.

Initialement, les disques sont séparés. On lance le premier avec une vitesse angulaire Ω , puis à $t = 0$, on les colle.

On s'intéresse tout d'abord simplement à l'état final, où les deux disques sont synchronisés à la vitesse angulaire ω_f .



- 1 Donner l'expression de ω_f en fonction de J_1 , J_2 et Ω .

Réponse

Le système {disque 1 + disque 2} est isolé, ainsi le moment cinétique total se conserve :

$$\frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_\Delta = J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = \text{cte} \Rightarrow \mathcal{L}_\Delta(0) = \mathcal{L}_\Delta(t_f)$$

Ainsi,

$$J_1\Omega + 0 = (J_1 + J_2)\omega_f \Leftrightarrow \omega_f = \frac{J_1}{J_1 + J_2}\Omega$$

- 2 Quel travail le premier disque a-t-il exercé sur le second entre $t = 0$ et $t = +\infty$?

Réponse

On prend comme système le second disque, qui subit une force de frottement de la part du premier. Avec le TEC :

$$\Delta\mathcal{E}_{c,2} = \mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} \Leftrightarrow \mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2}J_2\omega_f^2 - 0$$

À présent, on s'intéresse à la forme de l'évolution vers l'état final : on note $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ les vitesses angulaires des disques au cours du temps.

- 3 Montrer qu'à tout instant, on peut écrire $\omega_1(t) = \Omega - \frac{J_2}{J_1}\omega_2(t)$.

Réponse

Toujours par conservation : $\mathcal{L}_\Delta(t) = \text{cte} = \mathcal{L}_\Delta(0) \Leftrightarrow J_1\omega_1(t) + J_2\omega_2(t) = J_1\Omega$

Ainsi

$$\omega_1(t) = \Omega - \frac{J_2}{J_1}\omega_2(t)$$

■

À tout instant, on suppose que le disque 1 applique un couple sur le disque 2, de la forme $\Gamma_{1 \rightarrow 2} = \alpha(\omega_1 - \omega_2)$.

- 4 Démontrer que l'on a les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = \alpha(\omega_2 - \omega_1) \\ J_2 \dot{\omega}_2 = \alpha(\omega_1 - \omega_2) \end{cases}$$

Réponse

Toujours pour {disque 2}, $\frac{d\mathcal{L}_{\Delta,2}}{dt} = \Gamma_{1 \rightarrow 2} \Leftrightarrow J_2 \dot{\omega}_2 = \alpha(\omega_1 - \omega_2)$

et idem par symétrie.

- 5 Résoudre ces équations et donner la forme explicite des fonctions $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$.

Réponse

Avec le résultat de la question 3, on peut réécrire la deuxième équation :

$$J_2 \dot{\omega}_2 = \alpha \left(\Omega - \frac{J_2}{J_1} \omega_2 - \omega_2 \right) \Leftrightarrow \dot{\omega}_2 + \underbrace{\frac{\alpha}{J_2} \left(1 + \frac{J_2}{J_1} \right)}_{=\frac{1}{\tau}} \omega_2 = \frac{\alpha}{J_2} \Omega$$

Ainsi,

$$\omega_{2,p} = \frac{\Omega}{\frac{J_2}{J_1} + 1} = \frac{J_1}{J_1 + J_2} \Omega = \omega_f$$

et

$$\omega_{2,h}(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Soit

$$\omega_2(t) = \omega_{2,h}(t) + \omega_{2,p} = \omega_f + K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Par CI :

$$\omega_2(0) = 0 \Rightarrow K = -\omega_f$$

Conclusion :

$$\omega_2(t) = \omega_f \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

Et avec 3,

$$\omega_1(t) = \Omega - \frac{J_2}{J_1} \omega_f \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

- 6 Exprimer explicitement le travail reçu par le disque 2 entre $t = 0$ et $t = +\infty$ à partir de la puissance du disque 1 sur le disque 2. Comparer avec la question 2.

Réponse

$$\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} = \Gamma_{1 \rightarrow 2} \omega_2 = \alpha(\omega_1 - \omega_2) \omega_2$$

Or, 4 $\Rightarrow$

$$\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} = J_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 \right)$$

Ainsi,

$$\mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} = \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} dt = \left(\frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 \right)_0^{+\infty}$$

Soit

$$\mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} J_2 \omega_f^2$$

Et on retrouve le résultat de la question 2 ! On peut aussi faire le calcul en développant la puissance à partir de l'expression de $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$, mais c'est plus long :

$$\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} = \Gamma_{1 \rightarrow 2} \omega_2$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} = \alpha(\omega_1 - \omega_2) \omega_2$$

$$\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} \stackrel{3}{=} \alpha \left(\Omega - \left(\frac{J_2}{J_1} + 1 \right) \omega_2 \right) \omega_2$$

$$\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} \stackrel{5}{=} \alpha \left(\Omega - \left(\frac{J_2}{J_1} + 1 \right) \frac{J_1}{J_1 + J_2} \Omega \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) \omega_2$$

$$\mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} = \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} dt$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} \stackrel{\text{IPP}}{=} \alpha \Omega \left(\left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \omega_2(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \dot{\omega}_2(t) dt \right)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} = \alpha \Omega \left(0 - 0 - \int_0^{+\infty} \left(-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \dot{\omega}_2(t) dt \right)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} = \alpha \Omega \tau \int_0^{+\infty} \frac{\omega_f}{\tau} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} = \alpha \Omega \omega_f \cdot \frac{\tau}{2}$$

Or, d'après la définition de τ (Question 5), on a

$$\tau = \frac{J_1 J_2}{\alpha (J_1 + J_2)} = \frac{J_2 \omega_f}{\alpha \Omega}$$

Donc on retrouve encore

$$\mathcal{W}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} J_2 \omega_f^2$$



- 7 Quel est alors l'impact de la valeur de α sur l'évolution du système ?

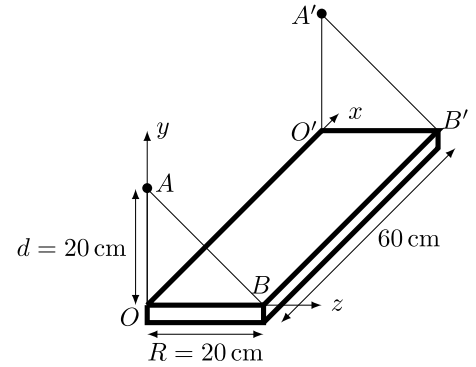
Réponse

α ne change pas l'état final du système, mais modifie la **durée du régime transitoire** : plus α est grand, plus τ est petit, et plus le système arrive rapidement à l'état final.



III Étagère murale

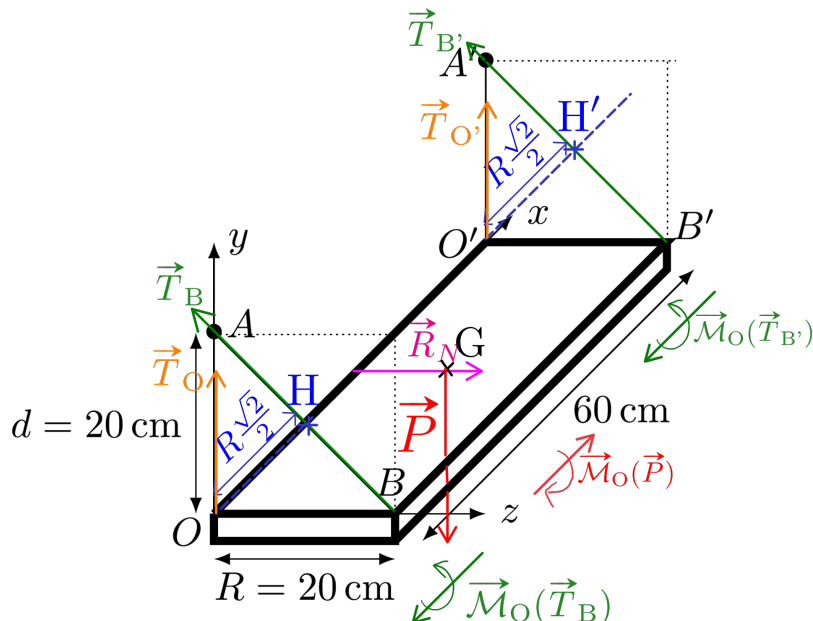
Une étagère est suspendue par quatre câbles métalliques et fixée au mur uniquement par deux pattes de fixation murale (en A et A'). La planche est en bois, de masse $m = 1,0 \text{ kg}$, de centre de masse G situé à la distance $R/2$ de l'axe $\Delta = (OO')$ et nous négligerons la masse des câbles.



- 1 Exprimer les 4 forces de tension des câbles en fonction de normes arbitraires, la force de réaction $\vec{R}_N$ du mur sur la planche lorsque l'étagère est posée et en équilibre ainsi que le poids de l'étagère. $\vec{R}_N$ est supposée normale au mur. Calculer les valeurs numériques des normes des forces à l'aide de l'équilibre.

Réponse

On fait un schéma :



◇ BdF :

- ▷ En B et B', les tensions des câbles obliques sont portées par les vecteurs $\vec{BA}$ et $\vec{B'A'}$. Elles ont la même norme T_1 par symétrie, et on peut déduire les angles $\widehat{OBA} = 45^\circ = \widehat{O'B'A'}$ puisque les triangles sont isocèles et rectangles. Ainsi, avec $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(45^\circ)$, on trouve

$$\vec{T}_B = \frac{\sqrt{2}}{2} T_1 (\vec{u}_y - \vec{u}_z) = \vec{T}_{B'}$$

- ▷ En O et O', les tensions sont égales et verticales, soit

$$\vec{T}_O = T_2 \vec{u}_y = \vec{T}_{O'}$$

▷ De plus, la réaction du mur est $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_z$.

▷ Enfin, le poids s'exprime $\vec{P} = -mg \vec{u}_y$

◇ **BdM** :

▷ le moment des tensions en B et B' se trouvent par le bras de levier. Avec H le projeté orthogonal de O sur AB, on trouve $OH = R \frac{\sqrt{2}}{2}$ (OBA triangle rectangle isocèle, OH moitié de la diagonale et diagonale d'un carré de côté $a = a\sqrt{2}$). Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B + \vec{T}_{B'}) &= 2 \times \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B) = \underbrace{-2}_{\text{sens direct}} OH \|\vec{T}_B\| \Leftrightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B + \vec{T}_{B'}) = -2 \underbrace{R \frac{\sqrt{2}}{2}}_{OH} \underbrace{T_1}_{\|\vec{T}_B\|} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B + \vec{T}_{B'}) = -RT_1\sqrt{2}} \end{aligned}$$

▷ Les moments des tensions $\vec{T}_O$ et $\vec{T}_{O'}$ ainsi que la réaction du support $\vec{R}_N$ sont tous nuls, puisque leurs droites d'actions passent par l'axe Δ .

▷ Finalement, à l'équilibre la droite d'action du poids est à une distance $R/2$ de l'axe de rotation, et comme le poids fait tourner l'étagère dans le sens horaire, on a

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgR}{2}$$

◇ **PFD** : à l'équilibre, la somme des forces est nulle, soit

$$\begin{cases} T_1\sqrt{2} + 2T_2 = mg & \text{sur } \vec{u}_y \\ T_1\sqrt{2} = R_N & \text{sur } \vec{u}_z \end{cases}$$

◇ **TMC** : à l'équilibre, il n'y a pas de rotation donc la somme des moments est nulle :

$$RT_1\sqrt{2} = \frac{mgR}{2}$$

◇ **Ccl** : on trouve

$$\boxed{T_1 = \frac{mg}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow \underline{T_1 = 3,5 \text{ N}} \quad ; \quad \boxed{R_N = \frac{mg}{2}} \Rightarrow \underline{R_N = 4,9 \text{ N}} \quad ; \quad \boxed{T_2 = \frac{mg}{4}} \Rightarrow \underline{T_2 = 2,5 \text{ N}}$$



[2] On imagine que les 2 câbles fixés en B et B' se rompent en même temps. La planche n'est alors retenue que par les câbles OA et OA', et elle tourne donc autour de l'axe $\Delta = (OO')$. Nous négligerons son épaisseur et admettrons que son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ vaut $J_\Delta = mR^2$. Montrer qu'alors :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{mgR}{J_\Delta} \sin(\theta)$$

En déduire la vitesse angulaire de la planche lorsqu'elle percute le mur.

Réponse

On reconnaît l'énergie cinétique dans la partie gauche de l'équation proposée. Il serait donc logique de partir du TEC. On sait que la puissance d'une force de rotation est $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})\omega$, donc le travail élémentaire associé est $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) d\theta$. Or, les tensions en B et B' n'existent plus et les moments des tensions en O et de la réaction normale sont toujours nuls : il ne reste que le moment du poids.

Or, avec un angle θ , le bras de levier diminue et on trouve $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgR}{2} \cos(\theta)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_c &= \mathcal{W}(\vec{P}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 &= \int_0^\theta \frac{mgR}{2} \cos(\theta) d\theta \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{c, \text{rot}} = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \\ \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgR}{2} \cos(\theta) \\ \int_0^\theta \cos(\theta) d\theta = [\sin(\theta)]_0^\theta \\ \sin(0) = 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 &= \frac{mgR}{2} \sin(\theta) \\ \Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{mgR}{J_\Delta} \sin(\theta)} & \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Quand l'étagère touche le mur, $\theta = \frac{\pi}{2}$, d'où

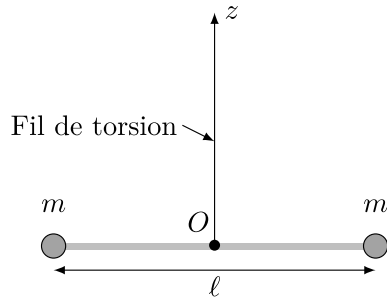
$$\boxed{\dot{\theta}_f = \sqrt{\frac{3g}{R}}} \Leftrightarrow \underline{\dot{\theta}_f = 12 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$



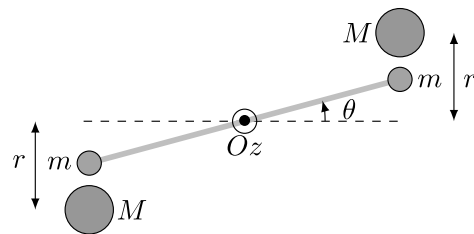
IV Expérience de CAVENDISH

L'expérience réalisée par CAVENDISH en 1789 a permis à ce dernier d'obtenir une valeur remarquable de la constante de gravitation universelle, $\mathcal{G}$. Le dispositif est constitué de deux petites sphères, de masse $m = 0,72 \text{ kg}$, fixées aux extrémités d'une tige de masse négligeable, rigide, et longueur $\ell = 180 \text{ cm}$ et suspendue horizontalement, en son milieu, à un fil de torsion vertical et très fin de constante de torsion C : si la tige tourne d'un angle θ par rapport à sa position d'équilibre $\theta = 0$, le fil exerce ainsi le couple de rappel $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{u}_z$ sur la tige.

Deux boules de plomb de masse $M = 160 \text{ kg}$ sont fixées, l'une derrière une petite sphère et l'autre devant l'autre petite sphère, à une distance $r = 20 \text{ cm}$ définie sur le schéma ci-dessous. Les deux forces d'attraction gravitationnelle produisent un couple qui fait tourner la tige d'un angle θ par rapport à sa position au repos. Les deux petites sphères se rapprochent ainsi des boules de plomb jusqu'à ce que la torsion du fil s'équilibre avec le couple gravitationnel.



Vue de face du pendule



Vue de dessus avec les boules de plomb

- 1 Nous cherchons dans un premier temps à déterminer la constante de torsion C du pendule en faisant osciller celui-ci. Les boules en plomb ne sont pas encore présentes.

a – Montrer à l'aide du TMC que l'oscillateur est harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{m\ell^2}}$.

Réponse

Soit $\Delta = (Oz)$ l'axe vertical ascendant. Chacune des deux sphères étant en mouvement de rotation de rayon $\ell/2$ autour de Δ à la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et la masse de la tige étant négligée, le moment cinétique total de l'ensemble {tige+deux sphères} par rapport à Δ est $\mathcal{L}_\Delta = \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}$.

Ce système est soumis à l'action de son poids et de la tension du fil, dont les moments par rapport à Δ sont nuls, et au couple de torsion $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{u}_z$.

L'application du TMC scalaire conduit donc à

$$\frac{m\ell^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{2C}{m\ell^2}\theta = 0$$

C'est bien un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{m\ell^2}}$.

- b – La mesure de la période T_0 des oscillations donne $T_0 = 7,0 \text{ min}$. En déduire la valeur de C .

Réponse

$$C = \frac{2\pi^2 m\ell^2}{T_0^2} \Rightarrow C = 2,6 \times 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$$

- 2 Les boules étant placées, déterminer l'expression de la déviation angulaire θ par rapport à la position d'équilibre. On tiendra compte du fait que θ est extrêmement faible pour évaluer le couple exercé par les deux boules de plomb, et on pourra utiliser l'équivalent $(1-x)^{-2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1+2x$.

Réponse

On se place dans le système de coordonnées cylindriques, de base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ pour chacune des deux sphères, et on estime que la distance entre une des sphères et la boule correspondante est

$$r - \frac{\ell}{2} \sin(\theta) \approx r - \frac{\ell}{2} \theta$$

On néglige aussi l'action de la boule la plus éloignée. On suppose de plus que la force de gravitation exercée par la boule sur la sphère est portée par $\vec{u}_\theta$, et on utilise l'équivalent $(1-x)^{-2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1+2x$:

$$\vec{F}_g = \mathcal{G} \frac{mM}{\left(r - \frac{\ell}{2}\theta\right)^2} \vec{u}_\theta \approx \frac{\mathcal{G}mM}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right) \vec{u}_\theta$$

Le moment de cette force par rapport à Δ est ainsi, avec d du bras de levier égal à $\ell/2$:

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_g) = \frac{\mathcal{G}mM\ell}{2r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right)$$

On en déduit que le moment total des deux forces gravitationnelles est le double de ce moment unique :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{g,\text{tot}}) = \frac{\mathcal{G}mM\ell}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right)$$

Ainsi, avec le TMC :

$$\begin{aligned} \frac{m\ell^2}{2} \ddot{\theta} &= -C\theta + \frac{\mathcal{G}mM\ell}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right) \\ \Rightarrow \theta_{\text{eq}} &= \frac{\mathcal{G}mM\ell r}{Cr^3 - \mathcal{G}mM\ell^2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{m\ell^2}{2} \ddot{\theta}} \right\} \text{Équilibre}$$



- 3 La valeur obtenue par CAVENDISH à l'aide de ce dispositif et $\mathcal{G} = 6,75 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$. En déduire la déviation angulaire et commenter.

Réponse

$$\theta_{\text{eq}} = 1,4 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Ainsi, CAVENDISH avait donc développé une méthode de mesure d'angle avec une précision inférieure au milliradian !

Pour une vidéo sur le sujet, voir notamment celle de Steve MOULD : https://youtu.be/70-_GBymrck?si=6iBDUeYnSixdLS3c

