Correction du TD d'application

I Transformations de tous les jours

Caractérisez les transformations thermodynamiques suivantes :

1 Vous placez dans un thermos du thé bouillant et de l'eau froide.

Réponse

Transformation adiabatique d'une phase condensée, isobare et isochore (et monotherme, mais inutile si pas d'échange de chaleur).

◇

2 Vous oubliez votre tasse de café dans la cuisine la journée.

Réponse

Transformation monotherme, isobare et isochore.

◇

II Travail reçu le long d'un chemin donné

Un système constitué de n moles de gaz parfait subit une transformation d'un état initial A ($P_1 = 4{,}0\,\text{bar}, V_1 = 10\,\text{L}, T_1 = 600\,\text{K}$) vers un état final B ($P_2 = 1{,}0\,\text{bar}, V_2 = 20\,\text{L}, T_2$).

1 Déterminer T_2.

Réponse

Le gaz étant parfait,
$$P_1V_1 = nRT_1 \quad \text{et} \quad P_2V_2 = nRT_2$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{P_1V_1}{RT_1} \quad \text{et} \quad \boxed{T_2 = \frac{P_2V_2}{P_1V_1}T_1}$$
$$\Rightarrow \underline{T_2 = 300\,\text{K}}$$

◇

2 Cette transformation est constituée de deux étapes : une transformation isobare de A vers C puis une transformation isochore de C vers B. Déterminer le travail $\mathcal{W}_p^{\text{AB}}$.

Réponse

$\mathcal{W}_p^{\text{AB}} = \mathcal{W}_p^{\text{AC}} + \mathcal{W}_p^{\text{CB}}$.

- $\mathcal{W}_p^{\text{CB}} = 0$ car isochore ;
- Si $A \to C$ quasi-statique,
$$\mathcal{W}_p^{\text{AC}} = -\int_A^C P\,\mathrm{d}V$$
  Comme $A \to C$ isobare, $P = P_1$ et
$$\mathcal{W}_p^{\text{AC}} = -P_1(V_2 - V_1)$$

Ainsi,
$$\mathcal{W}_p^{\text{AB}} = \mathcal{W}_p^{\text{AC}} \Rightarrow \underline{\mathcal{W}_p^{\text{AB}} = -4{,}0\,\text{kJ}}$$

◇

3 On considère un autre chemin : une transformation isochore de A vers D puis une transformation isobare de D vers B. Déterminer le travail $\mathcal{W}_p^{\text{AB}}$.

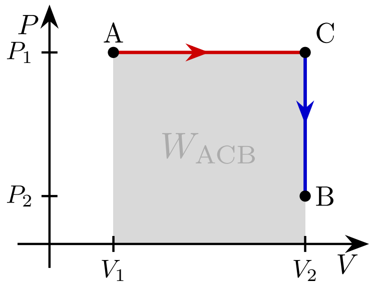
Réponse

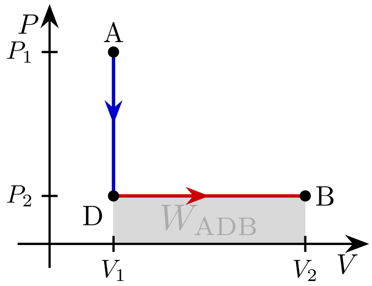
De même que précédemment, la transformation isochore a un travail nul, donc seule la transformation de D vers B travaille, et $\mathcal{W}_p^{\text{AB}} = \mathcal{W}_p^{\text{DB}}$. Seulement, la pression de l'isobare n'est plus la même, et on trouve
$$\mathcal{W}_p^{\text{AB}} = \mathcal{W}_p^{\text{DB}} = -P_2(V_2 - V_1) \Rightarrow \underline{\mathcal{W}_p^{\text{AB}} = -1{,}0\,\text{kJ}}$$

◇

4 Représenter ces deux transformations sur un schéma et retrouver graphiquement quelle transformation a le plus grand travail et le signe dudit travail.

Réponse





L'aire sous la courbe est en effet plus grande pour la transformation ACB. On voit que le signe est négatif puisque le **volume augmente** ($dV > 0$).

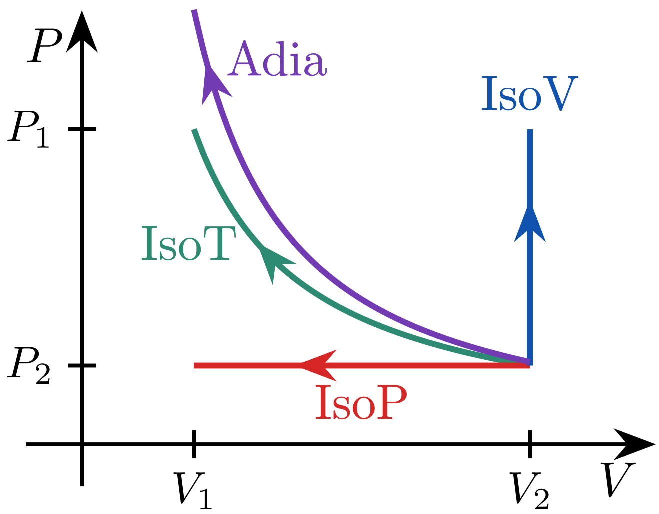
◇

III Diagramme de Watt

Considérons un système fermé qui subit une transformation d'un état d'équilibre initial (P_i, V_i) à un état d'équilibre final (P_f, V_f), de manière mécaniquement réversible.

1 Représenter les différentes transformations dans un diagramme de Watt (P,V) : isochore, isobare, isotherme d'un gaz parfait, adiabatique d'un gaz parfait, caractérisée par $PV^\gamma =$ cte avec $\gamma > 1$.

Réponse



◇

2 Faire le lien entre l'aire sous la courbe et le travail des forces de pression dans ce diagramme.

Réponse

$$\mathcal{A} = \int_{V_i}^{V_f} P\,\mathrm{d}V = -\left(-\int_{V_i}^{V_f} P\,\mathrm{d}V\right)$$

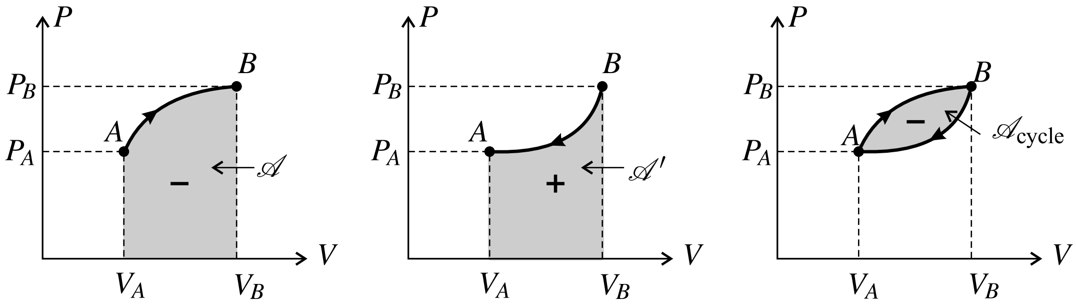
Or $P = P_{\text{ext}}$ pour quasi-statique $\boxed{\mathcal{A} = -\mathcal{W}_p}$

◇

3 Pour une transformation cyclique, faire le lien entre le sens de parcours du cycle et le signe du travail au cours d'un cycle.

Réponse

$\mathrm{d}V > 0 \Leftrightarrow \mathcal{W}_p < 0$ et inversement. Or, si le cycle est parcouru dans le **sens direct**, alors la transformation de $\mathrm{d}V > 0$ passe en-dessous de la transformation de $\mathrm{d}V < 0$; ainsi l'aire entourée correspond à un travail **positif**.


P
B
P_B
A
P_A
−
$\mathscr{A}$
V
V_A
V_B
P
B
P_B
A
P_A
+
$\mathscr{A}'$
V
V_A
V_B
P
B
P_B
A
P_A
−
$\mathscr{A}_{\text{cycle}}$
V
V_A
V_B

Correction du TD d'entraînement

I Calculs de travaux

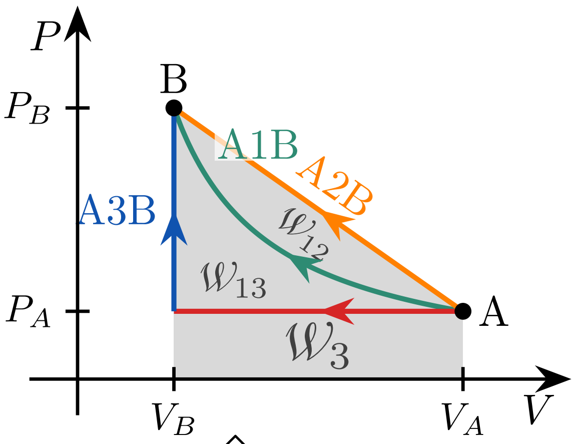
On considère trois moles de dioxygène, gaz supposé parfait, qu'on peut faire passer de l'état initial A (P_A, V_A, T_A) à l'état final B (P_B, V_B, T_B) par trois transformations distinctes :

- A1B isotherme ;
- A2B représentée par une droite dans le diagramme (P,V) ;
- A3B composée d'une transformation à pression constante, suivie d'une transformation à volume constant.

On considère l'équilibre thermodynamique interne conservé à tout instant. On donne $P_B = 3P_A$, $T_A = 300\,\mathrm{K}$ et $R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$.

1 Représenter les trois transformations dans le diagramme (P,V).

Réponse



2 Déterminer la température T_B et le volume V_B.

Réponse

- A et B sont reliés par une isotherme, donc $\boxed{T_A = T_B = 300\,\mathrm{K}}$.
- On a donc $P_A V_A = P_B V_B$, soit $\boxed{V_B = V_A \dfrac{P_A}{P_B} = \dfrac{V_A}{3}}$

3 Exprimer les travaux reçus par le système pour ces trois transformations. Commentez.

Réponse

On condidère les transformations comme quasi-statique, soit $\boxed{P(t) = P_{\text{ext}}}$. Ainsi :

A1B : $$\mathcal{W}_1 = -\int_A^B P\,\mathrm{d}V = -nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{W}_1 = P_A V_A \ln 3}$$

A2B : $$\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_{\text{rect}} + \mathcal{W}_{\text{trgl}} = -P_A(V_B - V_A) + \frac{1}{2}(P_B - P_A)(V_A - V_B) \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{W}_2 = \frac{4}{3} P_A V_A}$$

A3B : $$\mathcal{W}_3 = -P_A(V_B - V_A) \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{W}_3 = \frac{2}{3} P_A V_A}$$

Le travail des forces de pression **dépend donc bien du chemin suivi**.

4 Exprimer les transferts thermiques reçus par le système pour ces trois transformations. On donne le premier principe de la thermodynamique : $\Delta\mathcal{U} = \mathcal{W} + \mathcal{Q}$.

Réponse

Comme $T_A = T_B$, on a $\Delta\mathcal{U} = 0$. Avec le premier principe :

$$\boxed{\mathcal{Q} = -\mathcal{W}}$$

II Apport d'énergie électrique

Un récipient de volume $2V_0 = 4{,}0\,\mathrm{L}$ est partagé en deux compartiments (1) et (2), séparés par une paroi mobile et athermane. Le premier compartiment est calorifugé, le second est entouré de parois diathermes. Chacun contient n moles d'un gaz parfait diatomique, qui occupe un volume initial V_0 sous la pression $P_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$ et la température $T_0 = 300\,\mathrm{K}$, température de l'air extérieur.

Dans le compartiment (1) se trouve une résistance électrique R, dans laquelle on fait passer un courant I. Le phénomène, assez lent, conduit au bout d'un temps τ à obtenir une pression dans le compartiment (1) telle que $P_1 = 2P_0$.

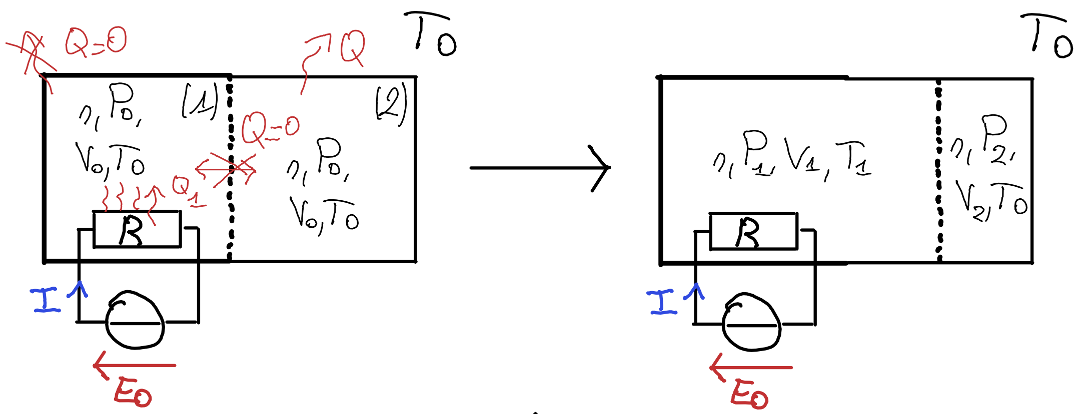
1 Déterminer et calculer les grandeurs P_2, V_2 et T_2 au bout du temps τ dans le compartiment.

Réponse

◇ Équilibre mécanique et paroi mobile verticale donc $\boxed{P_2 = P_1 = 2P_0}$;

◇ Évolution lente donc transfert thermiques terminés, soit $\boxed{T_2 = T_0 = 300\,\mathrm{K}}$;

◇ Ainsi $V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} \Leftrightarrow \boxed{V_2 = \frac{V_0}{2}} = \underline{1{,}0\,\mathrm{L}}$.



◇

2 En déduire les expressions et les valeurs de V_1 et de T_1.

Réponse

◇ Conservation du volume : $V_1 + V_2 = 2V_0 \Leftrightarrow \boxed{V_1 = 3V_0/2} = \underline{3{,}0\,\mathrm{L}}$;

◇ $T_1 = \frac{P_1V_1}{nR} = \frac{P1V_1}{P_0V_0}T_0 \Leftrightarrow \boxed{T_1 = 3T_0} = \underline{900\,\mathrm{K}}$

◇

3 Déterminer et calculer les variations d'énergie interne $\Delta\mathcal{U}_1$ et $\Delta\mathcal{U}_2$.

Réponse

Gaz de gauche $\Delta\mathcal{U}_1 = C_V\Delta T = \dfrac{5}{2}nR(T_1 - T_0) = \dfrac{5}{2}nR(2T_0) \Leftrightarrow \boxed{\Delta\mathcal{U}_1 = 5nRT_0} \Rightarrow \underline{\Delta\mathcal{U}_1 = 1{,}0\,\mathrm{kJ}}$

Gaz de droite $\Delta T_{\mathrm{droite}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\Delta\mathcal{U}_2 = 0}$

◇

4 Quel travail $\mathcal{W}_{p,2}$ a été reçu par le compartiment (2) ? Combien vaut $\mathcal{W}_{p,1}$ reçu par le compartiment (1) ?

Réponse

Transformation lente donc quasi-statique, donc P compartiment 1 défini à chaque instant :

$$\mathcal{W}_2 = -\int_{V_i}^{V_f} P\,\mathrm{d}V = -nRT_0\int_{V_i}^{V_f}\frac{\mathrm{d}V}{V} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{W}_2 = P_0V_0\ln\frac{V_0}{V_2}} \Rightarrow \underline{\mathcal{W}_2 = 70\,\mathrm{J}}$$

Travail reçu $= -$travail fourni donc $\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{W}_1 = -\mathcal{W}_2}$

◇

5 Comment s'exprime l'énergie thermique reçue par le compartiment (1) ? La relier à $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}_{p,1}$ grâce au premier principe $\Delta\mathcal{U} = \mathcal{W} + \mathcal{Q}$. Déterminer alors la valeur de τ.

Réponse

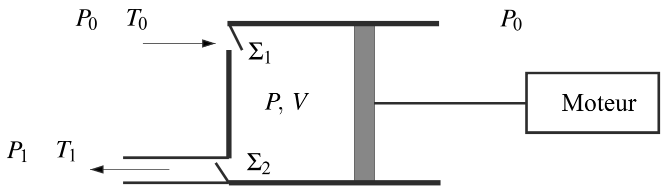
L'énergie thermique est la puissance par effet JOULE que multiplie le temps de chauffe, soit

$$\mathcal{Q}_1 = RI^2 \times \tau \Leftrightarrow \boxed{\tau = \frac{\Delta\mathcal{U}_1 - \mathcal{W}_1}{RI^2}} \Rightarrow \underline{\tau = 43\,\mathrm{s}}$$

◇

III Étude d'un compresseur

On s'intéresse au compresseur d'un moteur à air comprimé, comme celui d'un marteau-piqueur par exemple. L'air est assimilé à un gaz parfait. Il est aspiré dans les conditions atmosphériques, sous la pression $P_0 = 1\,\mathrm{bar}$ et à la température $T_0 = 290\,\mathrm{K}$, jusqu'au volume V_m. Il est ensuite comprimé jusqu'à la pression P_1 où il occupe un volume V_1, et est refoulé à la température T_1 dans un milieu où la pression est $P_1 = 6\,\mathrm{bar}$.



Bien que le mécanisme réel d'un compresseur soit différent, on suppose que celui-ci fonctionne comme une pompe à piston, qui se compose d'un cylindre, d'un piston coulissant entraîné par un moteur et de deux soupapes :

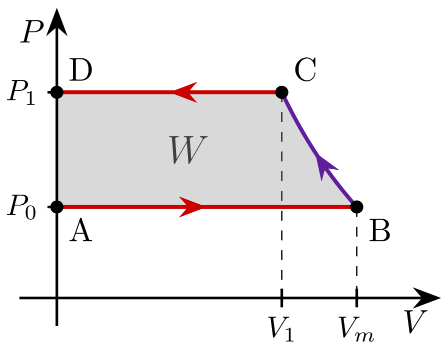
- ◇ La soupape d'entrée Σ_1 est ouverte si la pression P dans le corps de la pompe est inférieure ou égale à la pression atmosphérique P_0 ;
- ◇ La soupape de sortie Σ_2 est ouverte si P est supérieure à P_1 ;
- ◇ Le volume V du corps de pompe est compris entre 0 et V_m ;
- ◇ À chaque cycle (un aller-retour du piston), la pompe aspire et refoule une mole d'air.

1 a – Tracer sur un diagramme de WATT (P,V) l'allure de la courbe représentant un aller-retour du piston. Indiquer le sens de parcours par une flèche.

Réponse

On étudie le gaz qui entre dans le corps de la pompe pendant la première phase. L'évolution étudiée comporte les trois étapes suivantes :

1. Admission du gaz de A à B à la pression P_0 ;
2. Compression de B à C ;
3. Refoulement de C à D à la pression P_1.



◇

b – Montrer que le travail de l'air situé à droite du piston est nul sur un aller-retour.

Réponse

La pression extérieure est constante, donc le travail des forces de pression du gaz à droite du piston est :

$$\mathcal{W}_{p,\text{droite}} = \mathcal{W}_{p,\text{droite}}^{\text{AB}} + \mathcal{W}_{p,\text{droite}}^{\text{BC}} + \mathcal{W}_{p,\text{droite}}^{\text{CD}} = P_0(\cancel{V_B} - \cancel{V_A} + \cancel{V_C} - \cancel{V_B} + \cancel{V_D} - \cancel{V_C}) = 0$$

En effet, puisque le piston effectue un aller-retour, le volume balayé est le même à l'aller (travail résistant) qu'au retour (travail moteur).

◇

c – Relier le travail fourni par le moteur qui actionne le piston au travail reçu par le gaz. Montrer qu'il est donc égal à l'aire d'une surface sur le diagramme. On supposera que le mouvement est assez lent pour que l'évolution soit mécaniquement réversible.

Réponse

On a $\vec{F}_{\text{moteur}\to\text{piston}} = (P_0 S - PS)\vec{u_x}$ en supposant l'équilibre mécanique à chaque instant (c'est-à-dire $\sum \vec{F}_{\text{ext}\to\text{piston}} = \vec{0}$). Ainsi, son travail s'exprime :

$$\mathcal{W}(\vec{F}_{\text{mot}\to\text{piston}}) = \int_{ABCD} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{ABCD} (P_0 - P)\,\mathrm{d}V =$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{W}(\vec{F}_{\text{mot}\to\text{piston}}) = \underbrace{\mathcal{W}_{\text{droite}}}_{=0} - \int_{ABCD} P\,\mathrm{d}V \Longleftrightarrow \boxed{\mathcal{W}^{\text{fourni}}_{\text{moteur}} = \mathcal{W}^{\text{reçu}}_{\text{gaz}}}$$ ■

En effet, le travail **fourni par le moteur** est le travail **reçu par le gaz**, en supposant la pression P définie à chaque instant. C'est ce qu'on appelle habituellement le travail de l'opérataire. C'est donc l'aire sous la courbe dans le diagramme de Watt (P,V).

◇

2 Pendant la phase de compression, l'air suit une loi polytropique $PV^k = \text{cte}$. Il sort du compresseur à la température $T_1 = 391\,\text{K}$. Trouver la valeur de k.

Réponse

On étudie le gaz entre B et C. On retrouve une expression proche de la loi de Laplace, et on connaît P et T aux instants initial et final : on la convertit donc en $P^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{cte}$, d'où

$$\left(\frac{P_C}{P_B}\right)^{1-k} = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{-k}$$

$$\xrightarrow{\ln(\,\cdot\,)}$$

$$k = \frac{\ln\frac{P_B}{P_C}}{\ln\frac{P_B}{P_C} - \ln\frac{T_B}{T_C}} \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{\ln\frac{P_0}{P_1}}{\ln\frac{P_0}{P_1} - \ln\frac{T_0}{T_1}}} \Rightarrow \underline{k = 1{,}2}$$

◇

3 Exprimer le travail mécanique $\mathcal{W}_p^{\text{moteur}}$ fourni par le moteur pendant un aller-retour en fonction de n, R, k, T_1 et T_0.

Réponse

On calcule le travail sur les trois transformations élémentaires :

1 $P = P_0 = \text{cte}$, donc $\mathcal{W}_p^{\text{AB}} = -P_0\int_{V_0}^{V_m}\mathrm{d}V = -P_0V_m \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{W}_p^{\text{AB}} = -nRT_0}$

2 $PV^k = \text{cte} = P_0V_m^k$, d'où

$$\mathcal{W}_p^{\text{BC}} = -\int_{V_m}^{V_1} P_0V_m^k\cdot\frac{\mathrm{d}V}{V^k}$$

$$\xrightarrow{\int \frac{1}{V^k} \quad \text{avec} \quad k>1}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{W}_p^{\text{BC}} = \frac{P_0V_m^{k+1-1}}{k-1}\left[V^{1-k}\right]_{V_m}^{V_1}$$

$$\xrightarrow{\text{On factorise par } V_m^{1-k}}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{W}_p^{\text{BC}} = \frac{P_0V_m}{k-1}\left(\left(\frac{V_1}{V_m}\right)^{1-k} - 1\right)$$

$$\xrightarrow{PV^k = \text{cte} \Leftrightarrow TV^{k-1} = \text{cte} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{V_1}{V_m}\right)^{1-k} = \frac{T_1}{T_0}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{W}_p^{\text{BC}} = \frac{P_0V_m}{k-1}\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right)}$$

3 $P = P_1$ donc $\mathcal{W}_p^{\text{CD}} = -\int_{V_1}^{0} P_1\,\mathrm{d}V = P_1V_1 \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{W}_p^{\text{CD}} = nRT_1}$

D'où par somme $\boxed{\mathcal{W}_p^{\text{moteur}} = \frac{k}{k-1}nR(T_1 - T_0)}$

◇

4 Le débit massique de l'air dans le compresseur est $D_m = 0{,}013\,\text{kg·s}^{-1}$. Calculer la puissance $\mathcal{P}_{\text{moteur}}$ fournie par le moteur.

Réponse

Par définition, $\mathcal{W}_p^{\text{moteur}} = \mathcal{P}_{\text{moteur}}\Delta t$. Aussi, en $\Delta t = 1\,\text{s}$ on a $n = \frac{D_m\Delta t}{M}$ quantité d'air passant dans le compresseur. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{moteur}} = \frac{k}{k-1}\frac{D_m}{M}R(T_1 - T_0)} \Rightarrow \underline{\mathcal{P}_{\text{moteur}} = 2{,}26\,\text{kW}}$$

◇