

Correction du TD d'application



I Échauffement d'une bille en mouvement dans l'air

Une bille métallique, de capacité thermique massique c (supposée constante) est lancée vers le haut avec une vitesse \vec{v}_0 dans le champ de pesanteur \vec{g} uniforme. Elle atteint une altitude h puis redescend.



$$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} ; c = 0,4 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1} ; v_0 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} ; h = 5 \text{ m}.$$

- 1 Déterminer l'altitude maximale h_0 que peut atteindre la bille si on néglige les forces de frottement fluide entre l'air et la bille. Exprimer h_0 en fonction de v_0 et g .

Réponse

Système = {bille} dans $\mathcal{R}_{\text{terre}}$ supposé galiléen. Seule force subie est le poids. Avec $\dot{z}(0) = v_0$ et $z(0) = 0$:

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -gt + v_0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

Altitude maximale quand $\dot{z}(t_{\text{max}}) = 0 \Leftrightarrow t_{\text{max}} = \frac{v_0}{g}$, soit

$$h_0 = z(t_{\text{max}}) = \frac{v_0^2}{2g}$$



On constate que l'altitude h est inférieure à h_0 , à cause des forces de frottement. Calculer la variation de température ΔT de cette bille entre l'instant où elle est lancée et l'instant où elle atteint son point le plus haut, en supposant que :

- ◇ On néglige toute variation de volume de la bille ;
- ◇ l'air ambiant reste macroscopiquement au repos ;
- ◇ le travail des forces de frottement se dissipe pour moitié dans l'air ambiant et pour moitié dans la bille.

- 2 Exprimer ΔT en fonction de h_0 , h , g et c .

Réponse

L'énergie mécanique de la bille, sans frottement, est constante, et en utilisant l'énergie au maximum d'altitude s'écrit $\mathcal{E}_{m,0} = mgh_0$. Avec frottement, son énergie n'est **plus constante**, mais à son maximum d'altitude on a $\mathcal{E}_m = mgh$.

La différence entre ces énergie est égale à l'énergie perdue par frottement avec l'air, soit le travail reçu de l'air :

$$W_f = \mathcal{E}_{m,0} - \mathcal{E}_m = mg(h_0 - h)$$

Or, la moitié de cette énergie est évacuée dans l'air, tandis que l'autre moitié est emmagasinée sous forme d'énergie interne de la bille. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{2}mg(h_0 - h) \Leftrightarrow mc\Delta T = \frac{1}{2}mg(h_0 - h) \\ &\Leftrightarrow \Delta T = \frac{g}{2c}(h_0 - h) \end{aligned}$$

étant donné que la bille est supposée incompressible et indilatable, et qu'elle suit donc la première loi de JOULE.



- 3 Calculer h_0 puis ΔT .

Réponse

On trouve $h_0 \approx 5,097 \text{ m}$, soit $\Delta T \approx 1,2 \text{ mK}$.





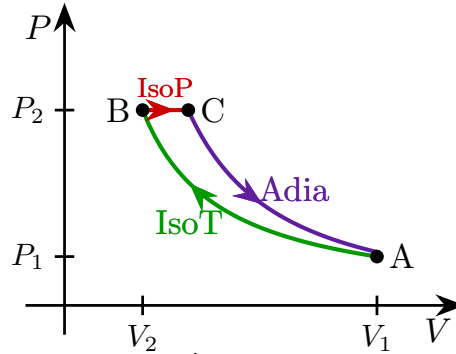
II Cycle de transformation

Deux moles de gaz parfait diatomique subissent le cycle de transformations mécaniquement réversible suivant :

- ① Compression isotherme de l'état A à l'état B, avec $T_A = T_B = 298\text{ K}$ et $P_A = 1,0\text{ bar}$;
- ② Un chauffage isobare de l'état B à l'état C, avec $T_C = 400\text{ K}$;
- ③ Une détente adiabatique ramenant le système de l'état C à l'état initial A.

- 1 Représenter le cycle de transformations dans un diagramme de WATT.

Réponse



- 2 Exprimer et calculer le travail et le transfert thermique pour chacune des transformations AB, BC et CA.

Réponse

TABLEAU T4.1 – Expressions de u , w_p et Q pour le gaz parfait diatomique

Transfo.	Énergie interne	Travail pression	Transfert thermique
AB isoT.	$\Delta u_{AB} = 0$	$w_p^{AB} = -nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 5,1\text{ kJ}$	$Q = -w_p^{AB} = -5,1\text{ kJ}$
BC isoP.	$\Delta u_{BC} = C_V(T_C - T_B)$	$w_p^{BC} = \Delta u_{BC} - Q_{BC} = -1,7\text{ kJ}$	$Q_{BC} = \Delta H_{BC} = C_P(T_C - T_B) = 5,9\text{ kJ}$
CA adia.	$\Delta u_{CA} = C_V(T_A - T_C)$	$w_p^{CA} = \Delta u_{CA} = -4,2\text{ kJ}$	$Q = 0$

- 3 De quel type de machine thermique s'agit-il ? Pouvait-on le déterminer avant le calcul ?

Réponse

$w_p^{\text{cycle}} < 0$: c'est un moteur. Ça se voyait puisque le cycle est parcouru dans le sens horaire.



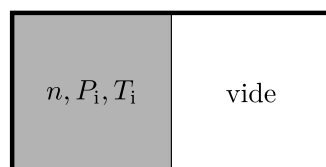
III Détente de JOULE GAY-LUSSAC d'un gaz réel

Le dispositif étudié dans cet exercice a été mis en point au XIX^e siècle par JOULE et GAY-LUSSAC en vue d'étudier le comportement des gaz. Deux compartiments indéformables aux parois calorifugées communiquent par un robinet initialement fermé. Le compartiment (1), de volume V_1 , est initialement rempli de gaz en équilibre à la température T_i . Le vide est fait dans le compartiment (2). Une fois le robinet ouvert, un nouvel équilibre s'établit, caractérisé par une température T_f du gaz.

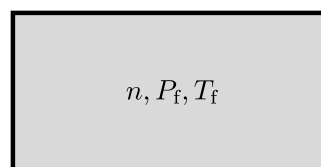
- 1 Faire un schéma des états initial et final. En considérant comme système fermé le contenu des deux compartiments, caractériser la transformation subie par ce système.

Réponse

On a le schéma suivant :



état initial



état final

Pour le système entier, la transformation est **isochore** car parois indéformables, et **adiabatique** car calorifugées.

- 2 Montrer que cette détente est isoénergétique, c'est-à-dire que l'énergie interne du gaz ne varie pas au cours de la transformation. Cette propriété dépend-elle du gaz ?

Réponse

Pour le système {gaz}, on a $Q = 0$ puisqu'il n'y a pas de transfert thermique avec l'extérieur ou avec le vide. De plus, $W_p = 0$ puisqu'il n'y a pas de force de pression exercée par l'extérieur sur le système. Il n'y a pas d'autres travaux. Ainsi, avec le premier principe,

$$\Delta u = W + Q \Leftrightarrow \boxed{\Delta u = 0}$$

Ce résultat **ne dépend pas du gaz**, qu'il soit réel ou non, puisqu'il dépend des propriétés de son environnement uniquement.

- 3 Déterminer la température T_f dans le cas où le gaz est parfait.

Réponse

Comme le gaz est parfait, il suit la première loi de JOULE, donc

$$\Delta u = C_V \Delta T \Rightarrow \Delta T = 0 \Leftrightarrow \boxed{T_f = T_i}$$

En réalité, on observe une légère diminution de la température du gaz dans la quasi-totalité des cas. L'expérience est ici réalisée avec du dioxygène, qui peut être efficacement modélisé par un gaz de VAN DER WAALS. L'équation d'état d'un tel gaz s'écrit

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad \text{tel que} \quad U = nC_{V,m}T - \frac{an^2}{V}$$

avec a et b deux constantes positives caractéristiques du gaz. Les travaux de VAN DER WAALS sur le comportement microscopique des gaz ont été de première importance, et il en a été récompensé par le prix NOBEL 1910. Pour le dioxygène, $C_{V,m} = 21 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $a = 1,32 \text{ USI}$.

- 4 Interpréter physiquement l'origine du terme de cohésion a et du volume exclu b , et donner leur unité. Nommer et interpréter la constante $C_{V,m}$.

Réponse

Le volume exclu b est simple à interpréter : il traduit qualitativement l'**effet du volume occupé par les atomes** du gaz, et qui n'est donc pas accessible à leur mouvement. Le terme de cohésion lui traduit l'**existence de forces de VAN DER WAALS attractives** entre les atomes de dioxygène. Ces forces attractives ont pour effet une diminution de la pression au sein du gaz, ce que traduit bien l'équation d'état :

$$P^{\text{GP}} = P^{\text{VDW}} + \frac{an^2}{V^2} \Leftrightarrow P^{\text{VDW}} = P^{\text{GP}} - \frac{an^2}{V^2} < P^{\text{GP}}$$

Pour les unités, on trouve

$$[a] = \text{Pa}\cdot\text{m}^6\cdot\text{mol}^{-2} = \text{J}\cdot\text{m}^3\cdot\text{mol}^{-2} \quad \text{et} \quad [b] = \text{m}^3\cdot\text{mol}^{-1}$$

Le coefficient $C_{V,m}$ est la **capacité thermique molaire à volume constant** du gaz de VAN DER WAALS, $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{n,V} = n \cdot C_{V,m}$. C'est l'énergie qu'il faut apporter à 1 mol du gaz pour augmenter sa température de 1 K.

- 5 Déterminer l'expression de la température finale T_f du gaz.

Réponse

Avec l'expression de U donnée, comme la transformation reste isoénergétique on trouve

$$\begin{aligned} \Delta u &= nC_{V,m}(T_2 - T_i) + an^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_1 + V_2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow T_2 &= T_i + \frac{an}{C_{V,m}} \left(\frac{1}{V_1 + V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \end{aligned}$$

- 6 Effectuer l'application numérique de ΔT pour $n = 0,80 \text{ mol}$ et $V_1 = V_2 = 5,0 \text{ L}$.

Réponse

$$\underline{\Delta T = -5,06 \text{ K}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n = 0,80 \text{ mol} \\ a = 1,32 \text{ J}\cdot\text{m}^3\cdot\text{mol}^{-2} \\ C_{V,m} = 21 \text{ J}\cdot\text{K}\cdot\text{mol}^{-1} \\ V_1 = V_2 = 5,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \end{cases}$$



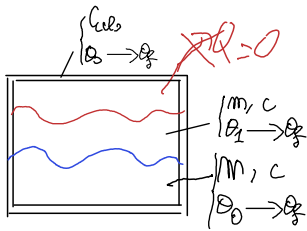
IV Calorimétries du fer

La calorimétrie consiste en la mesure d'échanges thermiques. On utilise pour cela un calorimètre, dont les parois sont conçues pour minimiser les échanges thermiques entre l'intérieur et l'extérieur du calorimètre. Ces échanges seront considérés comme nuls. Les transformations se font à la pression atmosphérique constante, et sont donc supposées monobares.

1 Mesure de la capacité thermique C du calorimètre

Le calorimètre contient initialement une masse $m = 100$ g d'eau, l'ensemble étant à la température ambiante $\theta_0 = 20,0^\circ\text{C}$. On ajoute alors la même masse d'eau à $\theta_1 = 80,0^\circ\text{C}$. On remue pour homogénéiser le système et on mesure la température $\theta_f = 43,6^\circ\text{C}$. La capacité thermique massique de l'eau est $c = 4,18$ kJ·K⁻¹·kg⁻¹.

a – Montrer que l'enthalpie du système {parois + eau} reste constante au cours de la transformation.



Réponse

On a une transformation monobare, avec un état d'équilibre initial et final. On peut donc appliquer le premier principe enthalpique, avec $\mathcal{W}_u = 0$: $\Delta\mathcal{H} = \mathcal{Q}$. Or, on néglige les échanges thermiques avec l'extérieur, soit $\mathcal{Q} = 0$. Ainsi,

$$\Delta\mathcal{H} = 0$$

b – En déduire la capacité thermique C des parois internes du calorimètre.

Réponse

On évalue la variation d'enthalpie en séparant les contributions des différentes parties du système :

$$\Delta\mathcal{H} = \Delta\mathcal{H}_{\text{eau froide}} + \Delta\mathcal{H}_{\text{eau chaude}} + \Delta\mathcal{H}_{\text{calo}}$$

$$\Leftrightarrow 0 = mc(T_0 - T_f) + mc(T_1 - T_f) + C(T_0 - T_f)$$

$$\Leftrightarrow C = mc \left(\frac{T_1 - T_f}{T_0 - T_f} - 1 \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 100 \times 10^{-3} \text{ kg} \\ T_0 = 293 \text{ K} \\ T_1 = 353 \text{ K} \\ T_f = 316,6 \text{ K} \\ c = 4,18 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } C = 226 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

c – Quelle est la masse en eau m_0 du calorimètre ?

Réponse

$$C = m_0 c \Leftrightarrow m_0 = \frac{C}{c} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C = 226 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1} \\ c = 4,18 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } m_0 = 54 \text{ g}$$

d – Pourquoi ne faut-il pas trop attendre pour mesurer la température finale ? Quelle serait sa valeur si on attendait un temps très long ?

Réponse

En réalité, $\mathcal{Q} \neq 0$, il y a des fuites thermiques. Ainsi, si on attend longtemps, on ne peut plus considérer le système comme isolé, et la température finale sera la température extérieure :

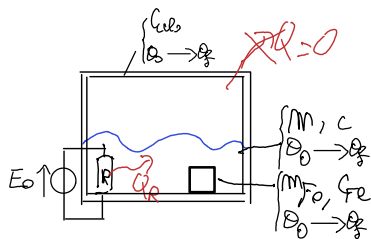
$$T_f \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} T_0$$

2 Mesure de la capacité thermique massique du fer

On considère l'état initial où une masse $m = 100$ g d'eau et une masse $m_{\text{Fe}} = 140$ g de fer sont dans le calorimètre. Une résistance électrique de masse négligeable est aussi immergée dans le liquide. L'ensemble est initialement à la température $\theta_0 = 20,0^\circ\text{C}$. Pendant une durée $\tau = 30$ s, un générateur électrique fourni à la résistance une puissance $\mathcal{P} = 350$ W. On homogénéise la solution et on mesure la température $\theta'_f = 34,8^\circ\text{C}$.

a – Exprimer la variation d'enthalpie du système {parois + eau + fer} au cours de la transformation précédente.

Réponse



On peut toujours appliquer le premier principe enthalpique, mais cette fois on a $Q_{tot} \neq 0$:

$$\Delta\mathcal{H} = \underbrace{Q_{ext}}_{=0} + Q_R \Leftrightarrow \boxed{\Delta\mathcal{H} = Q_R}$$

Or,
$$\mathcal{P} = \frac{Q_R}{\tau} \Leftrightarrow \boxed{Q_R = \mathcal{P}\tau}$$

Remarque



L'énergie apportée peut être interprétée comme un transfert thermique ou comme un travail par effet JOULE, en considérant que toute la puissance électrique est convertie en chaleur : on peut donc considérer

$$\Delta\mathcal{H} = W_u + \underbrace{Q}_{=0} = W_{géné}$$

b – En déduire l'expression puis la valeur de la capacité thermique massique du fer c_{Fe} .

Réponse

Or

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{H} &= \Delta\mathcal{H}_{eau} + \Delta\mathcal{H}_{fer} + \Delta\mathcal{H}_{calo} \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}\tau &= (T'_f - T_0)(mc + m_{Fe}c_{Fe} + C) \\ \Leftrightarrow m_{Fe}c_{Fe} &= \frac{\mathcal{P}\tau}{T'_f - T_0} - mc - C \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow c_{Fe} = \frac{\mathcal{P}\tau}{m_{Fe}(T'_f - T_0)} - c \frac{m}{m_{Fe}} - \frac{C}{m_{Fe}}$$

A.N. : $c_{Fe} = 467 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$



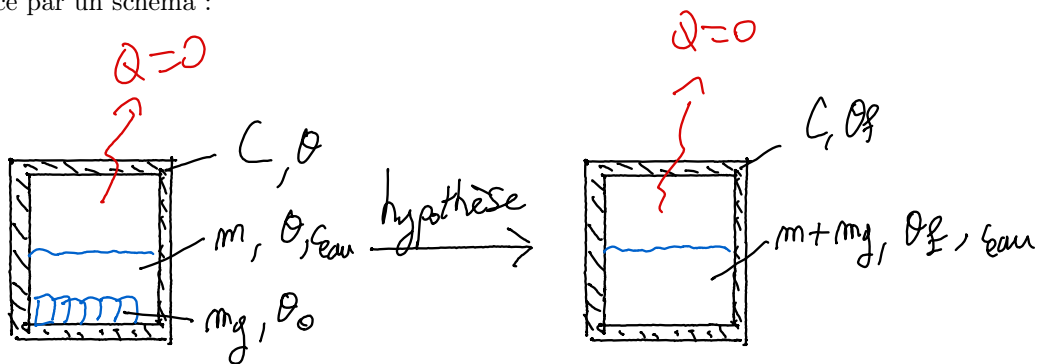
V Calorimétries de la glace

Dans un calorimètre parfaitement isolé de capacité thermique C , on place $m = 100 \text{ g}$ d'eau à la température $\theta = 18^\circ\text{C}$ en équilibre thermique avec le vase intérieur et une masse m_g de glace sèche à $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$.

1 Calculer la température d'équilibre pour $C = 150 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ et $m_g = 25 \text{ g}$.

Réponse

On commence par un schéma :



Hypothèse : on suppose que toute la glace a fondu. Dans ce cas, comme la transformation est isobare et que le calorimètre est calorifugé, on a

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{H}_{tot} &= Q = 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= \Delta\mathcal{H}_{calo} + \Delta\mathcal{H}_{eau} + \Delta\mathcal{H}_{glace} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{H}_{calo} &= C(T_f - T) \\ \Delta\mathcal{H}_{eau} &= mc_{eau}(T_f - T) \\ \Delta\mathcal{H}_{glace} &= m_g c_{eau}(T_f - T_0) + m_g \Delta h_{fus} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (C + mc_{eau} + m_g c_{eau})T_f = (C + mc_{eau})T + m_g c_{eau}(T_f - T_0) - m_g \Delta h_{fus}$$

$$\Leftrightarrow T_f = \frac{(C + mc_{\text{eau}})T + m_g c_{\text{eau}}(T_f - T_0) - m_g \Delta h_{\text{fus}}}{C + mc_{\text{eau}} + m_g c_{\text{eau}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta = 18^\circ\text{C} \\ \theta_0 = 0^\circ\text{C} \\ C = 150 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1} \\ m = 100 \times 10^{-3} \text{ kg} \\ m_g = 25 \times 10^{-3} \text{ kg} \\ c_{\text{eau}} = 4,185 \times 10^3 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1} \\ \Delta h_{\text{fus}} = 335 \times 10^3 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1} \end{cases}$$

A.N. : $\theta_f = 2,76^\circ\text{C}$

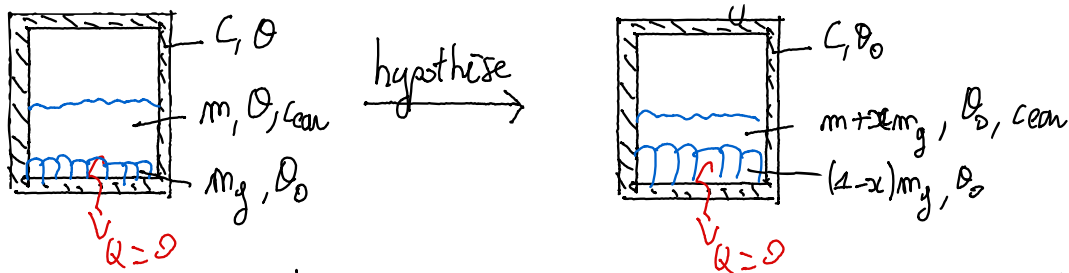
Ce qui est cohérent avec l'hypothèse.



- 2 Calculer la température d'équilibre pour $C = 246 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ et $m_g = 50 \text{ g}$. Quelle proportion de glace a fondu ?

Réponse

Même expérience mais C et m_g changent. En appliquant la même formule, on obtient $\theta_f = -5,5^\circ\text{C}$! C'est incohérent avec l'hypothèse. On la reformule, en supposant un **équilibre diphasé glace/eau**. La température doit alors être $T_f = T_0$. On appelle x la fraction d'eau qui a gelé. Nouveau schéma :



Dans ce cas, l'eau et le calorimètre refroidissent jusqu'à 0°C , et une fraction x de la glace fond. Ainsi,

$$\Delta \mathcal{H}_{\text{calo}} = C(T_0 - T)$$

$$\Delta \mathcal{H}_{\text{eau}} = mc_{\text{eau}}(T_0 - T)$$

$$\Delta \mathcal{H}_{\text{glace}} = xm_g \Delta h_{\text{fus}}$$

Avec $\Delta \mathcal{H}_{\text{tot}} = 0$,

$$0 = (C + mc_{\text{eau}})(T_0 - T) + xm_g \Delta h_{\text{fus}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(C + mc_{\text{eau}})(T - T_0)}{m_g \Delta h_{\text{fus}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C = 245 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1} \\ m_g = 50 \times 10^{-3} \text{ kg} \end{cases}$$

A.N. : $x = 0,71$

Autrement dit, **71% de la glace a fondu**.



Données

$$c_{\text{eau}} = 4185 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta h_{\text{fus}} = 335 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}.$$

Correction du TD d'entraînement



I Transformation polytropique

Une transformation polytropique est une transformation d'un gaz pour laquelle il existe un coefficient $k > 0$ tel que $PV^k = \text{cte}$ tout au long de la transformation. De telles transformations sont intermédiaires entre des adiabatiques et des isothermes, et se rencontrent en thermodynamique industrielles, par exemple lorsque le système réfrigérant ne permet pas d'éliminer tout le transfert thermique produit par une réaction chimique. On raisonnera à partir d'une transformation quasi-statique d'un gaz parfait.

1 À quelles transformations connues correspondent les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = +\infty$?

Réponse

- ◇ $k = 0 \Rightarrow P = \text{cte}$ donc **isobare** ;
- ◇ $k = 1 \Rightarrow PV = \text{cte} = nRT$ donc **isotherme** ;
- ◇ $k = +\infty \Rightarrow V = \text{cte}$ donc **isochore** (sinon toute infime variation de volume entraîne des effets infinis).

Pour s'en convaincre, il suffit de regarder l'évolution de la pression en fonction du volume en diagramme (P,V) : une pente infinie implique un volume fixe (Figure T3.1, à gauche). On pourrait croire qu'alors la pression est fixée, mais pour un gaz parfait on a également $PV = nRT$, donc P peut varier si T varie (Figure T3.1, à droite).

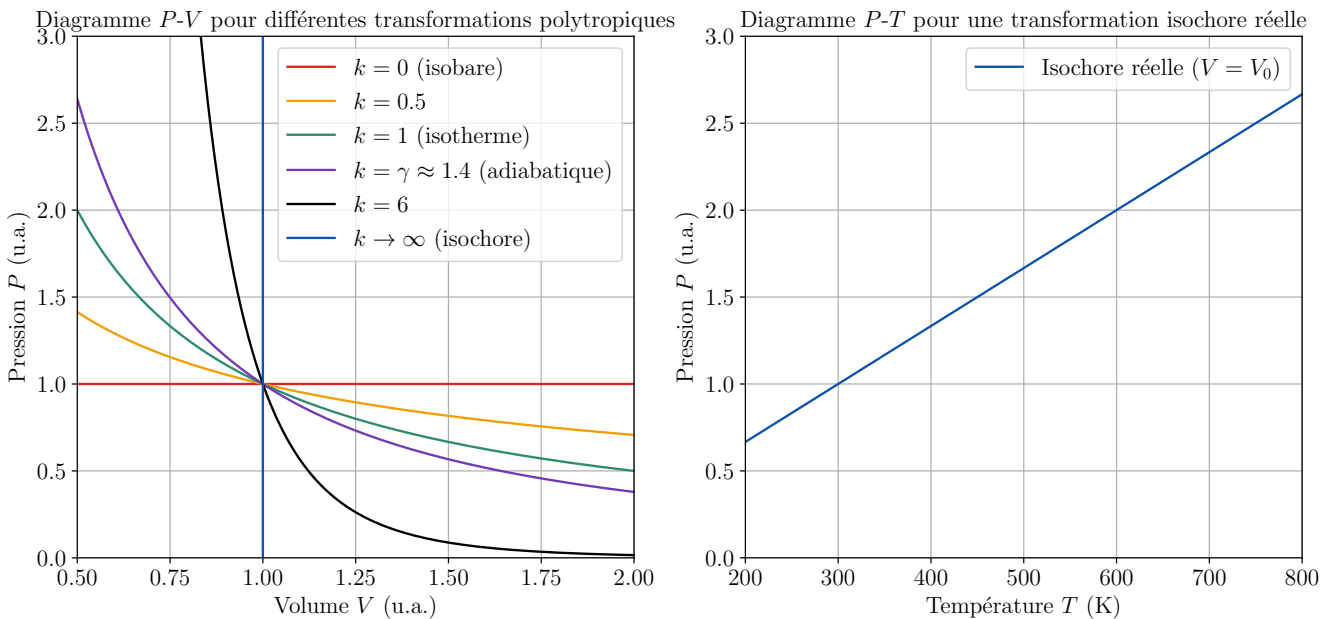


FIGURE T4.1



2 Calculer le travail des forces de pression pour un gaz subissant une transformation polytropique entre deux états (P_0, V_0, T_0) et (P_1, V_1, T_1) en fonction d'abord des pressions et des volumes, puis dans un second temps des températures seulement.

Réponse

Par définition, on a tout au long de la transformation $PV^k = P_0V_0^k$, soit $P = P_0(V_0/V)^k$. Si de plus la transformation est quasi-statique, c'est-à-dire mécaniquement réversible donc que l'équilibre mécanique est atteint tout au long

de la transformation, on aura $P = P_{\text{ext}}$. Le travail reçu entre les états est donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_p &= - \int_{V_0}^{V_1} P \, dV \\ \Leftrightarrow \mathcal{W}_p &= - \int_{V_0}^{V_1} P_0 V_0^k \frac{dV}{V^k} \\ \Leftrightarrow \mathcal{W}_p &= -P_0 V_0^k \frac{V_1^{1-k} - V_0^{1-k}}{1-k} \\ \Leftrightarrow \mathcal{W}_p &= -\frac{1}{1-k} (P_1 V_1 - P_0 V_0) \quad \left. \begin{array}{l} P_0 V_0^k = P_1 V_1^k \\ P_1 V_1^k V_1^{1-k} = P_1 V_1 \\ PV = nRT \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \mathcal{W}_p &= \boxed{\frac{nR}{k-1} (T_1 - T_0)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3 Montrer que le transfert thermique au cours de la transformation précédente s'écrit

$$Q = nR \left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1} \right) (T_1 - T_0)$$

Réponse

$$\Delta u = \mathcal{W}_p + Q \Leftrightarrow Q = \Delta u - \mathcal{W} \Leftrightarrow Q = C_V \Delta T - \frac{nR}{k-1} \Delta T$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q = nR \left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1} \right) (T_1 - T_0)} \quad \blacksquare$$

4 Analyser les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = +\infty$, et vérifier la cohérence avec l'analyse initiale.

Réponse

◇ $k = 0$ donne par le calcul :

$$\boxed{Q = \frac{\gamma nR}{\gamma-1} = C_P \Delta T}$$

Or, $k = 0 \Rightarrow$ isobare, donc

$$\Delta \mathcal{H} = \underbrace{\mathcal{W}_u}_0 + Q \Leftrightarrow C_P \Delta T = Q$$

On retrouve bien la même chose.

◇ $k = 1$ donne une forme indéterminée mathématiquement, ce qui implique qu'on ait $\Delta T = 0$ pour la réalité physique : c'est cohérent avec le résultat précédent de transformation isotherme.

◇ $k \rightarrow \infty$ donne

$$Q = C_V \Delta T \Leftrightarrow \Delta u = C_V \Delta T$$

ce qui est effectivement une variation à volume constant, donc isochore.

5 À quel type de transformation correspond le cas $k = \gamma$?

Réponse

$k = \gamma$ donne $\boxed{Q = 0}$: c'est une transformation **adiabatique**.



II Comparaison entre transformations

T_0, P_0

On considère un système composé d'une quantité de matière n de gaz parfait diatomique enfermée dans une enceinte. Cette enceinte est fermée par un piston de surface S et dont on négligera la masse, pouvant coulisser sans frottement. L'ensemble est situé dans l'atmosphère, dont on note T_0 et P_0 la température et la pression. On note I l'état initial. L'objectif est de comparer deux transformations du système : l'une brutale et l'autre lente.

T, P, V

Commençons par la transformation brutale : on lâche brusquement une masse M sur le piston, qui se stabilise en un état intermédiaire 1.

1 Le meilleur modèle pour la transformation est-il isotherme ou adiabatique ? Peut-on en déduire un résultat sur la température T_1 ?

Réponse

Le système considéré est le gaz et l'enceinte autour. On s'intéresse à une transformation brusque. Le système n'a pas

le temps d'échanger de l'énergie sous forme de transfert thermique avec l'extérieur : la transformation peut donc être considérée comme **adiabatique**. En revanche, comprimer un gaz rapidement le rend plus chaud (comme dans une pompe à vélo). La température du gaz va varier, la transformation **ne** sera donc **pas** isotherme.

On ne peut rien dire sur T_1 . On peut s'attendre à ce qu'elle soit supérieure à T_0 puisque l'on comprime rapidement le gaz.



- 2 Déterminer la pression P_1 .

Réponse

À l'état 1, le système est à l'équilibre mécanique. La pression qui s'exerce sur le piston est alors la somme de la pression atmosphérique plus celle de la masse posée sur la section S du piston. On en déduit que :

$$P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$$



- 3 Établir le bilan énergétique de la transformation en explicitant chacun des termes $\mathcal{W}_p^{I \rightarrow 1}$, $\mathcal{Q}_{I \rightarrow 1}$ et $\Delta_{I \rightarrow 1}U$, et appliquer le premier principe.

Réponse

Puisque cette transformation est considérée comme adiabatique :

$$\mathcal{Q}_{I \rightarrow 1} = 0$$

La transformation qu'il subit est monobare : tout au long de cette transformation, la pression extérieure est celle exercée par le piston sur le gaz qui est constante (la masse M est déposée en bloc). Ainsi,

$$\mathcal{W}_p^{I \rightarrow 1} = -P_{\text{ext}}\Delta V \Leftrightarrow \mathcal{W}_p^{I \rightarrow 1} = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_1 - V_I)$$

Comme le gaz est parfait, il suit la première loi de JOULE, donc

$$\Delta U_{I \rightarrow 1} = C_V \Delta T \Leftrightarrow \Delta_{I \rightarrow 1}U = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_I)$$

D'après le premier principe appliqué au système pendant la transformation $I \rightarrow 1$:

$$\Delta U_{I \rightarrow 1} = \mathcal{W}_p^{I \rightarrow 1} \Leftrightarrow \frac{5}{2}nR(T_1 - T_I) = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_1 - V_0)$$



- 4 Exprimer alors T_1 en fonction des pressions P_1 , P_0 et la température T_0 , et V_1 en fonction des pressions et du volume $V_I = V_0$.

Réponse

La pression P_1 est déjà connue. Pour déterminer la température T_1 , on peut remplacer les volumes par $V_i = nRT_i/P_i$ dans l'expression du premier principe. Sachant que l'état initial est un état d'équilibre, on a $T_I = T_0$ et, **sans la masse**, $P_I = P_0$. Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}nR(T_1 - T_I) = -nRP_1 \left(\frac{T_1}{P_1} - \frac{T_I}{P_I} \right) & \quad \text{donc} \quad T_1 = \frac{2}{7} \left(\frac{5}{2} + \frac{P_1}{P_I} \right) T_I \\ \Leftrightarrow \frac{nRT_1}{P_1 V_1} = \frac{2}{7} \left(\frac{5}{2} + \frac{P_1}{P_I} \right) \frac{nRT_0}{P_0 V_0} & \quad \Leftrightarrow \quad V_1 = \frac{2}{7} \left(\frac{5P_0}{2P_1} + 1 \right) V_0 \end{aligned}$$



On observe qu'en fait l'état 1 n'est pas un réel état d'équilibre : le piston continue de bouger, mais beaucoup plus lentement, jusqu'à atteindre l'état 2 qui est l'état final.

- 5 Quel phénomène, négligé précédemment, est responsable de cette nouvelle transformation du système ? Comment peut-on qualifier cette transformation ?

Réponse

On a négligé les transferts d'énergie thermique entre le gaz et l'extérieur.

Cette transformation peut alors être qualifiée de **monobare** et **monotherme** (la température et la pression de l'extérieur ne varient pas). On peut aussi considérer que cette transformation est **isobare** car, comme la **transformation est lente**, le système sera à chaque instant à l'équilibre mécanique avec l'extérieur.



- 6 Déterminer les caractéristiques T_2 , P_2 , V_2 de l'état 2.

————— Réponse —————

Dans l'état final, l'équilibre est complètement atteint : il y a équilibre thermique et mécanique. D'après la question précédente :

$$\boxed{T_2 = T_0} \quad \text{et} \quad \boxed{P_2 = P_0 + \frac{Mg}{S}}$$

Le volume occupé par le gaz est imposé par la loi du gaz parfait :

$$\boxed{V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} = \frac{nRT_0}{P_0 + \frac{Mg}{S}}}$$



- 7 Déterminer le travail reçu par le système, puis sa variation d'énergie interne au cours de la transformation $1 \rightarrow 2$. En déduire le travail total et le transfert thermique total reçus au cours de la transformation brusque.

————— Réponse —————

Le travail des forces de pression au cours de $1 \rightarrow 2$ se calcule comme précédemment :

$$W_p^{1 \rightarrow 2} = - \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_1)$$

et on a

$$\Delta U_{1 \rightarrow 2} = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1)$$

Le transfert thermique reçu s'obtient alors par

$$\begin{aligned} Q_{1 \rightarrow 2} &= \Delta U_{1 \rightarrow 2} - W_p^{1 \rightarrow 2} \\ &= \frac{5}{2} nR \underbrace{\left(\underbrace{T_2}_{=T_0} - T_1 \right)}_{=-W_p^{1 \rightarrow 2}} + \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q_{1 \rightarrow 2} = \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_0)}$$

Finalement, le travail total et le transfert thermique total reçus au cours de la transformation brusque valent :

$$W_p^{\text{tot}} = - \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_0) \quad \text{et} \quad Q_{\text{tot}} = \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_0)$$

Ainsi, on a évidemment $W_p^{\text{tot}} + Q_{\text{tot}} = 0$: en effet, dans l'état I et l'état final 2, le gaz est en équilibre thermique avec l'extérieur à T_0 ; or $\Delta U = C_V \Delta T$ donc $\Delta U = W_p^{\text{tot}} + Q_{\text{tot}} = 0$!



Comparons maintenant à une transformation lente : la même masse M est lâchée très progressivement sur le piston, par exemple en ajoutant du sable « grain à grain ».

- 8 Comment qualifie-t-on une telle transformation ? Que peut-on en déduire sur la température du système au cours de la transformation ?

————— Réponse —————

On la dit **quasi-statique**. On peut supposer qu'elle laisse largement le temps aux échanges thermiques d'avoir lieu, si bien que l'équilibre thermique est atteint à tout instant. Par conséquent, on peut considérer la transformation **isotherme** : $T = T_0$.



- 9 Déterminer la pression dans l'état final et en déduire le volume. Commenter.

————— Réponse —————

Dans l'état final F , la masse placée sur le piston est exactement la même que dans le cas précédent : on en déduit

$$\boxed{P_F = P_2 = P_0 + \frac{Mg}{S}}$$

et comme par ailleurs $T_F = T_0 = T_2$, avec la loi du gaz parfait on a également $V_F = V_2$. Ainsi, **les états finaux sont les mêmes**. Cela n'a rien d'étonnant : les équilibres thermique et mécanique sont établis dans les 2 états, et les contraintes extérieures (masse M , pression P_0 et température T_0) sont les mêmes.



10 Établir le bilan énergétique de la transformation en explicitant chaque terme.

Réponse

La transformation étant quasi-statique, on a $P = P_{\text{ext}}$, soit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_p &= - \int_{V_i}^{V_f} P_{\text{ext}} dV = - \int_{V_i}^{V_f} P dV \\ \Leftrightarrow \mathcal{W}_p &= -nRT_0 \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{W}_p = -nRT_0 \ln \frac{V_f}{V_i}} \end{aligned}$$

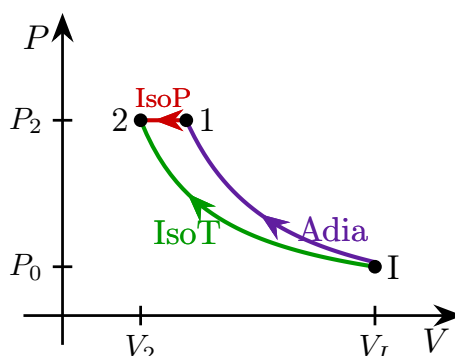
Par ailleurs, la transformation étant isotherme on a $\Delta U = C_V \Delta T = 0$, et avec le premier principe

$$\Delta U = \mathcal{W}_p + \mathcal{Q} \Leftrightarrow \mathcal{Q} = -\mathcal{W} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{Q} = nRT_0 \ln \frac{V_f}{V_i}}$$



11 Représenter alors ces deux transformations dans un diagramme de WATT (P, V), en considérant la transformation $I \rightarrow 1$ mécaniquement réversible, et commenter.

Réponse



On voit ainsi que les deux transformations ont les mêmes états initial et final, donc la même variation d'énergie interne, alors que les échanges d'énergie ne sont pas les mêmes.



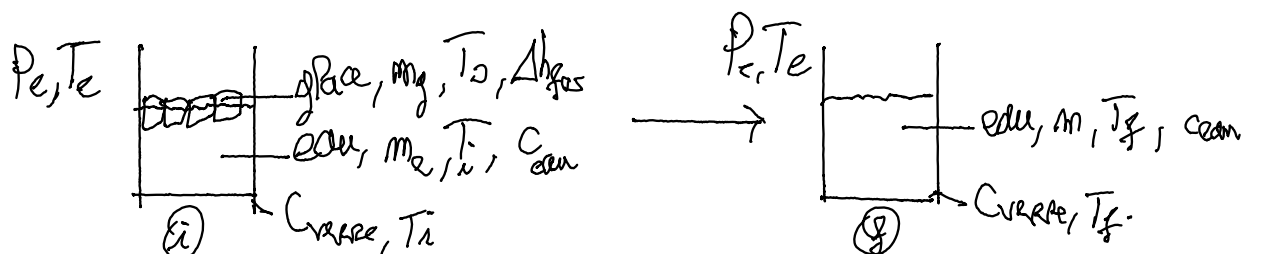
★★ **III Résolution de problème : rafraîchir un soda**

1 Par une chaude journée d'été, vous avez oublié de mettre votre soda au frais. Combien de glaçons faut-il ajouter pour que sa température descende à 5°C ?

Il faudra pour cela faire quelques hypothèses sur les différentes capacités thermiques, en vous inspirant des capacités typiques données dans d'autres exercices du type calorimétrie, ainsi que sur la masse d'un glaçon. On donne $d_{\text{glaçon}} = 0,9$ la densité d'un glaçon.

Réponse

On pose le système : transformation isobare donc $\Delta \mathcal{H} = \mathcal{Q}$, et transformation monotherme. Schéma :



On suppose que le coca est assimilable à de l'eau, de capacité $c_{\text{eau}} = 4,18 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$. Le système est initialement à l'équilibre, avec une masse de coca $m_e \approx 250 \text{ g}$ (verre de 300 mL pas rempli à ras bord).

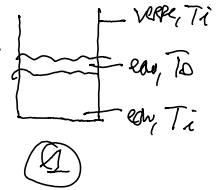
On suppose que le verre a une capacité thermique non nulle, $C_{\text{verre}} \approx 300 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ (plus qu'un calorimètre).

On ajoute une masse m_g de glaçons à T_0 . Pour connaître leur nombre, il faut estimer la masse d'un glaçon, sachant que leur densité est $d_{\text{glaçon}} = 0,9$. En supposant un glaçon cubique de 2 cm de côté, on obtient $m_{\text{1glaçon}} \approx 7 \text{ g}$.

On prend $\theta_i = 30^\circ\text{C}$.

Reste la plus grosse hypothèse : adiabatique ou pas ? ! On commence par supposer que oui, soit $\boxed{Q = 0}$. C'est donc un exercice de calorimétrie classique.

On suppose un état intermédiaire fictif (possible car \mathcal{H} est une fonction d'état, donc on peut ajouter et soustraire des transformations) E1 où la glace a fondu (à 0°C), et l'eau est à $T_i = 303\text{ K}$. Sur cette transformation,



$$\Delta\mathcal{H}_{\text{eau},i\rightarrow 1} = 0 = \Delta\mathcal{H}_{\text{verre},i\rightarrow 1}$$

$$\Delta\mathcal{H}_{\text{glace},i\rightarrow 1} = m_g \Delta h_{\text{fus}}$$

Vient ensuite l'autre transformation de $1 \rightarrow f$, où le verre et l'eau refroidissent, et la glace maintenant fondue réchauffe :

$$\Delta\mathcal{H}_{\text{eau},1\rightarrow f} = m_e c_{\text{eau}} (T_f - T_i)$$

$$\Delta\mathcal{H}_{\text{verre},1\rightarrow f} = C_{\text{verre}} (T_f - T_i)$$

$$\Delta\mathcal{H}_{\text{glace},1\rightarrow f} = m_g c_{\text{eau}} (T_f - T_0)$$

Ensuite,

$$\Delta\mathcal{H}_{\text{tot}} = \Delta\mathcal{H}_{i\rightarrow 1} + \Delta\mathcal{H}_{1\rightarrow f} = Q = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = m_g \Delta h_{\text{fus}} + (T_f - T_i)(m_e c_{\text{eau}} + C_{\text{verre}}) + (T_f - T_0)(m_g c_{\text{eau}})$$

$$\Leftrightarrow m_g (\Delta h_{\text{fus}} + c_{\text{eau}} (T_f - T_0)) = (T_i - T_f)(m_e c_{\text{eau}} + C_{\text{verre}})$$

$$\Leftrightarrow N \cdot m_{1\text{glaçon}} = (T_i - T_f) \frac{m_e c_{\text{eau}} + C_{\text{verre}}}{\Delta h_{\text{fus}} + c_{\text{eau}} (T_f - T_0)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{N = \frac{(T_i - T_f)}{m_{1\text{glaçon}}} \frac{m_e c_{\text{eau}} + C_{\text{verre}}}{\Delta h_{\text{fus}} + c_{\text{eau}} (T_f - T_0)}}$$

$$\text{A.N. : } \underline{N = 13,7}$$

Donc il faudrait un minimum de 14 glaçons ! Si on souhaite une température finale de 8°C , on passe à 12 glaçons, ce qui reste beaucoup ; et en plus on boirait un soda dilué à l'eau, ce qui est dommage... Conclusion : n'oubliez pas de mettre votre soda au frais !

Si $Q \neq 0$, alors il faut considérer les pertes thermiques par la surface du verre et par la surface en contact avec l'air :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_v = g_v S_{\text{verre}} (T(t) - T_e) & \text{avec } S_{\text{verre}} = 2\pi r h \\ \mathcal{P}_{\text{air}} = g_{\text{air}} S_{\text{air}} (T(t) - T_e) & \text{avec } S_{\text{air}} = \pi r^2 \end{cases}$$

et résoudre une équation différentielle...

IV Glaçon et vapeur d'eau

On considère une enceinte calorifugée et maintenue à pression constante $P_0 = 1,0\text{ bar}$. On y introduit une masse m d'eau sous deux phases : une masse $(1 - \alpha)m$ de vapeur d'eau à $T_{\text{eb}} = 373\text{ K}$, ainsi qu'un glaçon de masse αm dont la température initiale $T_{\text{fus}} = 273\text{ K}$.

- 1] Expliquer qualitativement ce qui va se passer dans l'enceinte.

Réponse

Il va y avoir des transferts thermiques entre la glace froide et la vapeur chaude. La glace étant à sa température de fusion, une partie de la glace va fondre alors qu'une partie de la vapeur va se liquéfier. Dans l'état final, il y aura donc de l'eau liquide. La proportion dépendra de la température finale.

- 2] On suppose pour commencer que la température finale est égale à T_{fus} . On appelle alors x la fraction massique de solide. **Faire un schéma détaillé** en proposant un découpage en 4 étapes de transformations menant à l'état final. Exprimer x dans l'état final, et montrer qu'un tel état final n'est possible que si α est supérieur à une valeur minimale α_0 à préciser.

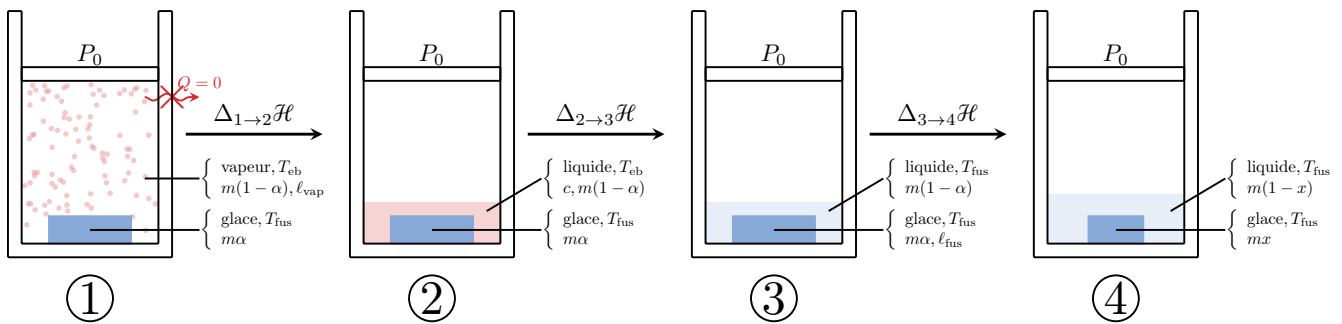
Réponse

Si la température finale est T_{fus} , cela signifie que la composition finale est un **mélange de glace et d'eau liquide**, où toute la vapeur a été liquéfiée.

On peut alors choisir une succession de transformations fictives qui conduisent à cet état final car l'enthalpie est une fonction d'état : elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final. On propose alors :

- ① État initial, vapeur chaude et glace froide.
- ② État intermédiaire, la vapeur se liquéfie à T_{eb} .

- ③ État intermédiaire, l'eau précédemment obtenue se refroidie jusqu'à T_{fus} .
- ④ État final, une fraction de la glace a fondu, passant de $m\alpha$ à mx , soit une masse fondue de $m\alpha - mx = m(\alpha - x)$.



En utilisant le premier principe de la thermodynamique lors de cette transformation calorifugée isobare avec l'enthalpie qui est une fonction d'état :

$$\Delta_{1 \rightarrow 4} \mathcal{H} = Q = 0 \Leftrightarrow \Delta_{1 \rightarrow 2} \mathcal{H} + \Delta_{2 \rightarrow 3} \mathcal{H} + \Delta_{3 \rightarrow 4} \mathcal{H} = 0$$

Or, $\Delta_{1 \rightarrow 2} \mathcal{H} = m(1-\alpha) \underbrace{\ell_{\text{liq}}}_{=-\ell_{\text{vap}}}$; $\Delta_{2 \rightarrow 3} \mathcal{H} = mc(1-\alpha) \underbrace{(T_{\text{fus}} - T_{\text{eb}})}_{=\Delta T}$; $\Delta_{3 \rightarrow 4} \mathcal{H} = m(\alpha - x) \ell_{\text{fus}}$

$$\Leftrightarrow 0 = -m(1-\alpha) \ell_{\text{vap}} + mc(1-\alpha) \Delta T + m(\alpha - x) \ell_{\text{fus}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(1-\alpha)(c\Delta T - \ell_{\text{vap}})}{\ell_{\text{fus}}} + \alpha$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{c\Delta T - \ell_{\text{vap}} - \alpha(c\Delta T - \ell_{\text{vap}} - \ell_{\text{fus}})}{\ell_{\text{fus}}}$$

Ce qui n'a de sens que si $x > 0$, soit $\alpha \underbrace{(c\Delta T - \ell_{\text{vap}} - \ell_{\text{fus}})}_{<0} \leq c\Delta T - \ell_{\text{vap}}$

$$\Leftrightarrow \alpha \geq \frac{c\Delta T - \ell_{\text{vap}}}{c\Delta T - \ell_{\text{vap}} - \ell_{\text{fus}}}$$

$$\text{A.N. : } \alpha_0 \approx 0,89$$

Conclusion : il faudrait à peu près 90% de glace initialement pour que toute la vapeur se liquéfie et arrive à 0°C .

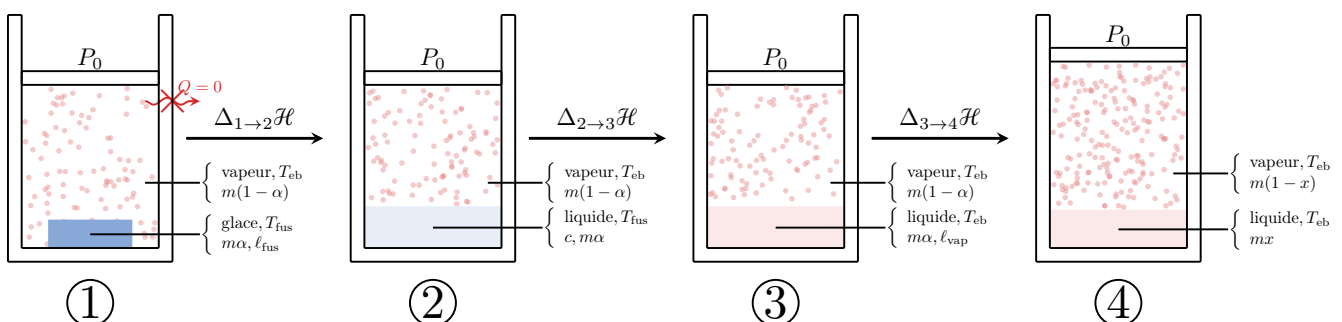


- ③ Déterminer la composition du système dans l'état final lorsque la température finale est égale cette fois à T_{eb} . On fera un schéma détaillé des transformations. Montrer qu'un tel état final n'est possible que si α est inférieur à une valeur maximale α_1 à préciser.

Réponse

On effectue le même raisonnement mais avec cette fois la température finale qui est T_{eb} en découpant la transformation en une suite de transformations fictives :

- ① État initial, vapeur chaude et glace froide.
- ② État intermédiaire, la glace se liquéfie à T_{fus} .
- ③ État intermédiaire, l'eau précédemment obtenue se réchauffe jusqu'à T_{eb} .
- ④ État final, une fraction de l'eau s'est vaporisée, passant de $m\alpha$ à mx , soit une masse vaporisée de $m\alpha - mx = m(\alpha - x)$.



On a toujours : $\Delta_{1 \rightarrow 4} \mathcal{H} = \mathcal{Q} = 0 \Leftrightarrow \Delta_{1 \rightarrow 2} \mathcal{H} + \Delta_{2 \rightarrow 3} \mathcal{H} + \Delta_{3 \rightarrow 4} \mathcal{H} = 0$

Or, $\Delta_{1 \rightarrow 2} \mathcal{H} = m\alpha l_{\text{fus}}$; $\Delta_{2 \rightarrow 3} \mathcal{H} = m c \alpha (T_{\text{eb}} - T_{\text{fus}})_{=\Delta T}$; $\Delta_{3 \rightarrow 4} \mathcal{H} = m(\alpha - x) l_{\text{vap}}$

$$\Leftrightarrow 0 = m\alpha l_{\text{fus}} + m c \alpha \Delta T + m(\alpha - x) l_{\text{vap}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha l_{\text{fus}} + c \alpha \Delta T}{l_{\text{vap}}} + \alpha$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha \times \frac{l_{\text{fus}} + l_{\text{vap}} + c \Delta T}{l_{\text{vap}}}$$

Ce qui n'a de sens que si $x < 1$, soit

$$\alpha \leq \frac{l_{\text{vap}}}{l_{\text{fus}} + l_{\text{vap}} + c \Delta T}$$

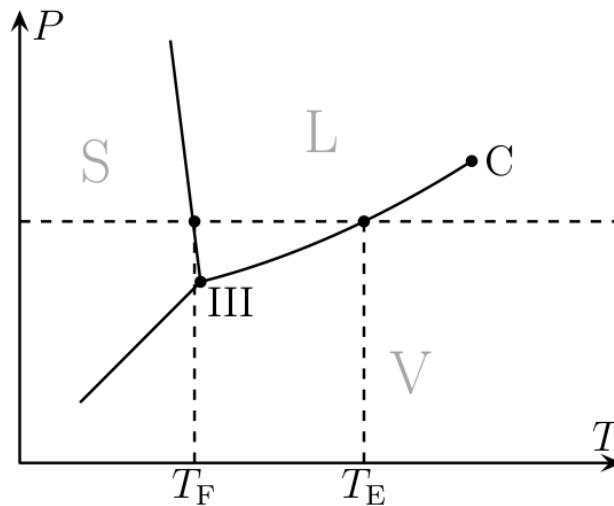
A.N. : $\alpha_1 \approx 0,75$

Ainsi, il faut moins de 75% de glace pour que toute la glace fonde et arrive à 100 °C.

- 4 Déterminer l'expression de la température finale T du système dans l'état final lorsque $\alpha_1 < \alpha < \alpha_0$. On fera un schéma détaillé des transformations. Application numérique pour $\alpha = 0,8$, conclusion.

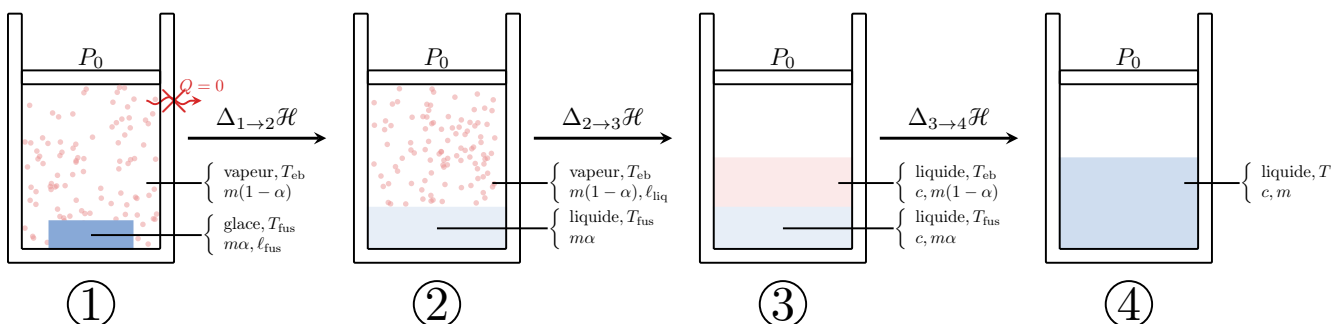
Réponse

Si $\alpha_1 < \alpha < \alpha_0$, alors l'état d'équilibre ne peut ni être un mélange liquide/glace ni un mélange liquide/vapeur ; il n'y aura que de l'eau liquide, avec une température finale comprise entre la température d'ébullition et celle de fusion. Pour une pression $P_0 = 1$ bar, l'eau sera **entièrement liquide** (cf diagramme PT).



On peut alors considérer les transformations fictives suivantes :

- ① État initial, vapeur chaude et glace froide.
- ② État intermédiaire, la glace se liquéfie à T_{fus} .
- ③ État intermédiaire, la vapeur se liquéfie à T_{eb} .
- ④ État final, l'eau froide se réchauffe jusqu'à T et l'eau chaude se refroidit jusqu'à T .



On a toujours : $\Delta_{1 \rightarrow 4} \mathcal{H} = \mathcal{Q} = 0 \Leftrightarrow \Delta_{1 \rightarrow 2} \mathcal{H} + \Delta_{2 \rightarrow 3} \mathcal{H} + \Delta_{3 \rightarrow 4} \mathcal{H} = 0$

Or, $\Delta_{1 \rightarrow 2} \mathcal{H} = m\alpha l_{\text{fus}}$; $\Delta_{2 \rightarrow 3} \mathcal{H} = -m(1 - \alpha) l_{\text{vap}}$; $\Delta_{3 \rightarrow 4} \mathcal{H} = m c ((1 - \alpha)(T - T_{\text{eb}}) + \alpha(T - T_{\text{fus}}))$

$$\Leftrightarrow 0 = m\alpha\ell_{\text{fus}} - mp(1 - \alpha)\ell_{\text{vap}} + mc(1 - \alpha)(T - T_{\text{eb}}) + m\alpha c(T - T_{\text{fus}})$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{(1 - \alpha)\ell_{\text{vap}} - \alpha\ell_{\text{fus}} + c(\alpha T_{\text{fus}} + (1 - \alpha)T_{\text{eb}})}{c}$$

A.N. : $T = 340 \text{ K}$

On obtient bien une valeur intermédiaire à T_{fus} et T_{eb} , cohérent avec l'hypothèse que le système soit entièrement liquide.

Données

- ◇ Enthalpie de vaporisation $\ell_{\text{vap}} = 2,3 \times 10^6 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$;
- ◇ Enthalpie de fusion $\ell_{\text{fus}} = 330 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$;
- ◇ Capacité thermique massique de l'eau liquide $c = 4,18 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

V Chauffage d'une chambre

On étudie le chauffage d'une chambre au dernier étage de l'internat en hiver. On installe un radiateur électrique d'appoint fournissant une puissance de chauffe \mathcal{P}_c . Le volume de la chambre est $V = 36 \text{ m}^3$, et est rempli d'air de capacité thermique molaire $C_{V,m} = \frac{5}{2}R$. On la suppose vide de meubles.

Les échanges thermiques se font par deux surfaces : le mur (vitres incluses) en contact avec l'extérieur d'une part, et le toit d'autre part, de surfaces égales $S = 12 \text{ m}^2$. Les autres surfaces sont supposées à l'équilibre thermique du fait des chambres voisines et en-dessous. On note $T_{\text{int}}(t)$ la température intérieure, et $T_{\text{ext}} = 10^\circ\text{C}$ la température extérieure, supposée constante.

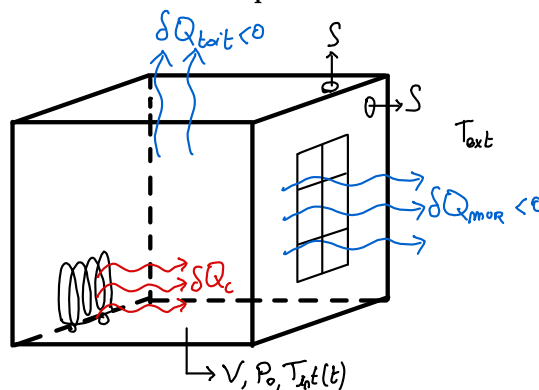
Les fuites thermiques à la date t à travers le mur sont données par la puissance $\mathcal{P}_{\text{mur}} = g_{\text{mur}}S(T_{\text{int}}(t) - T_{\text{ext}})$, et celles à travers le toit par $\mathcal{P}_{\text{toit}} = g_{\text{toit}}S(T_{\text{int}}(t) - T_{\text{ext}})$.

On souhaite maintenir la température à une température de confort $T_c = 19^\circ\text{C}$. La pression de l'air intérieur est $P_0 = 1,0 \text{ bar}$ à cette température.

$$g_{\text{mur}} = 2,90 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1} \text{ et } g_{\text{toit}} = 0,50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}, R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}.$$

- 1 Faire un schéma représentant la pièce, le radiateur et l'extérieur, en faisant apparaître les transferts thermiques entrant en rouge et les transferts thermiques sortant en bleu.

Réponse



- 2 Calculer le nombre de moles d'air présentes dans la chambre dans les conditions (T_c, P_0) . En déduire la capacité thermique C_V de l'air contenu dans la chambre. Faire l'application numérique.

Réponse

$$P_0V = nRT_c \Leftrightarrow n = \frac{P_0V}{RT_c} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 36 \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} \\ T_c = 292 \text{ K} \end{cases}$$

A.N. : $n = 1,5 \times 10^3 \text{ mol}$

Par définition, $C_{V,m} = \frac{C_V}{n} \Leftrightarrow C_V = nC_{V,m} \Rightarrow C_V = 31 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}$

- 3] Quelle est la puissance \mathcal{P}_c fournie par le radiateur pour maintenir une telle température de confort dans les conditions mentionnées ci-dessus ?

Réponse

Le volume de la chambre étant fixé, il n'y a pas de \mathcal{W}_p . Si la température est constante, c'est que le radiateur **compense les pertes**, et on a que $dU = C_V dT = 0$. Ainsi, avec le premier principe,

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q_c + \delta Q_{\text{toit}} + \delta Q_{\text{mur}} && \left. \begin{array}{l} \delta Q_{\text{toit}} < 0 \\ \delta Q_{\text{mur}} < 0 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow 0 &= \mathcal{P}_c dt - \mathcal{P}_{\text{toit}} dt - \mathcal{P}_{\text{mur}} dt \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}_c &= \mathcal{P}_{\text{toit}} + \mathcal{P}_{\text{mur}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}_c &= (g_{\text{toit}} + g_{\text{mur}})S(T_c - T_{\text{ext}}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g_{\text{toit}} = 0,50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1} \\ g_{\text{mur}} = 2,90 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1} \\ S = 12 \text{ m}^2 \\ T_c = 292 \text{ K} \\ T_{\text{ext}} = 283 \text{ K} \end{cases} \\ \text{A.N. : } \mathcal{P}_c &= 3,7 \times 10^2 \text{ W} \end{aligned}$$

Remarque

Les expressions de \mathcal{P}_{mur} et $\mathcal{P}_{\text{toit}}$ montrent qu'il n'y a logiquement pas de fuite si $T_{\text{int}} = T_{\text{ext}}$, et que \mathcal{P}_{mur} et $\mathcal{P}_{\text{toit}} \propto S$ puisque plus la surface est grande plus il y a de fuite. Cela se retrouve dans l'unité donnée.

On doit partir pour une khôlle puis pour dîner, et on se demande s'il vaut mieux couper le chauffage ou le maintenir. On suppose alors qu'on arrête le chauffage à $t = 0$, et qu'on revient 3 h plus tard au temps t_1 .

- 4] En supposant qu'il n'y a pas de circulation d'air, appliquer le premier principe sous forme différentielle à l'air de la chambre et déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T_{\text{int}}(t)$ pour $t \in [0, t_1]$. On introduira un temps caractéristique τ que l'on calculera.

Réponse

On a encore $dV = 0 \Rightarrow \delta \mathcal{W}_p = 0$, et il n'y a que les pertes thermiques puisqu'on a coupé le chauffage. Ainsi,

$$\begin{aligned} dU &= \sum_i \delta Q_i \\ \Leftrightarrow C_V dT_{\text{int}} &= -(\mathcal{P}_{\text{toit}} + \mathcal{P}_{\text{mur}}) dt \\ \Leftrightarrow C_V \frac{dT_{\text{int}}}{dt} &= -(g_{\text{toit}} + g_{\text{mur}})S(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}) \\ \Leftrightarrow \frac{dT_{\text{int}}}{dt} + \frac{(g_{\text{toit}} + g_{\text{mur}})S}{C_V} T_{\text{int}} &= \frac{(g_{\text{toit}} + g_{\text{mur}})S}{C_V} T_{\text{ext}} \\ \Leftrightarrow \frac{dT_{\text{int}}}{dt} + \frac{T_{\text{int}}}{\tau} &= \frac{T_{\text{ext}}}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{C_V}{(g_{\text{toit}} + g_{\text{mur}})S} \Rightarrow \tau = 7,6 \times 10^2 \text{ s} \approx 13 \text{ min} \end{aligned}$$

- 5] Résoudre cette équation différentielle, puis tracer cette évolution au cours du temps, et déterminer la température $T_{\text{int},f}$ lors du retour dans la chambre.

Réponse

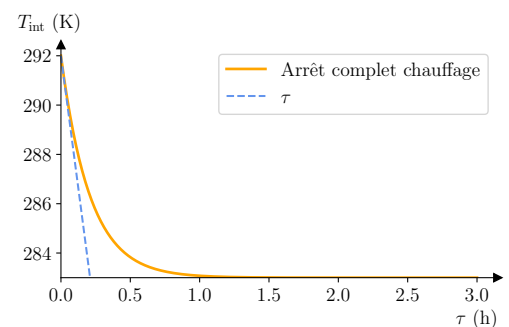
Solution particulière : $T_{\text{int},p} = T_{\text{ext}}$

Solution homogène : $T_{\text{int},h} = K e^{-t/\tau}$

Solution totale : $T_{\text{int}}(t) = T_{\text{int},p} + T_{\text{int},h} = T_{\text{ext}} + K e^{-t/\tau}$

Condition initiale : $T_{\text{int}}(0) = T_c$
 $\Leftrightarrow T_c = T_{\text{ext}} + K$
 $\Leftrightarrow K = T_c - T_{\text{ext}}$

Solution finale : $\Leftrightarrow T_{\text{int}}(t) = T_{\text{ext}} + (T_c - T_{\text{ext}})e^{-t/\tau}$



On a une exponentielle décroissante avec $\tau \approx 13$ min. Or, au bout de $t \approx 5\tau$ on sait que la solution particulière est atteinte, donc au bout de $t \approx 1$ h la chambre a complètement refroidi. Quand on revient après 3 h, il fait donc 10°C dans la chambre.

On souhaite retrouver la température de confort T_c . Pour y revenir rapidement, on pousse la puissance de chauffe à son maximum, $\mathcal{P}_{c,\max} = 2,0 \text{ kW}$.

- 6 Écrire la nouvelle équation différentielle satisfaite par $T_{\text{int}}(t)$. Résoudre cette équation en prenant t_1 comme origine du temps (on considère $t_1 = 0$) et $T_{\text{int},f}$ comme condition initiale, et exprimer la solution en fonction de T_{ext} , T_c , $\mathcal{P}_{c,\max}$, \mathcal{P}_c et τ .

Réponse

On rallume le chauffage, d'où

$$dU = \delta Q_{c,\max} + \sum_i \delta Q_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT_{\text{int}}}{dt} + \frac{T_{\text{int}}}{\tau} = \frac{T_{\text{ext}}}{\tau} + \frac{\mathcal{P}_{c,\max}}{C_V}$$

Pour résoudre, on prend $t = t_1$ comme origine des temps, donc on écrira la solution initiale $T_{\text{int}}(0) = T_{\text{ext}}$ au lieu de $T_{\text{int}}(t_1) = T_{\text{ext}}$.

Solution particulière : $T_{\text{int},p} = T_{\text{ext}} + \frac{\tau}{C_V} \mathcal{P}_{c,\max} = T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\max}}{(g_{\text{toit}} + g_{\text{mur}})S} = T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\max}}{\mathcal{P}_c} (T_c - T_{\text{ext}})$

Solution homogène : $T_{\text{int},h} = K' e^{-t/\tau}$

Solution totale : $T_{\text{int}}(t) = T_{\text{int},p} + T_{\text{int},h} = T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\max}}{\mathcal{P}_c} (T_c - T_{\text{ext}}) + K' e^{-t/\tau}$

Condition initiale : $T_{\text{int}}(0) = T_{\text{ext}}$

$$\Leftrightarrow T_{\text{ext}} = T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\max}}{\mathcal{P}_c} (T_c - T_{\text{ext}}) + K'$$

$$\Leftrightarrow K' = -\frac{\mathcal{P}_{c,\max}}{\mathcal{P}_c} (T_c - T_{\text{ext}})$$

Solution finale : $\Leftrightarrow T_{\text{int}}(t) = T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\max}}{\mathcal{P}_c} (T_c - T_{\text{ext}}) (1 - e^{-t/\tau})$



- 7 Tracer la solution obtenue, puis calculer la durée nécessaire pour retrouver la température de confort T_c . On appelle cet instant t_2 .

Réponse

On trouve bien une exponentielle croissante. On trouve alors t_2 avec :

$$T_{\text{int}}(t_2) = T_c$$

$$\Leftrightarrow T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\max}}{\mathcal{P}_c} (T_c - T_{\text{ext}}) (1 - e^{-t_2/\tau}) = T_c$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathcal{P}_{c,\max}}{\mathcal{P}_c} (T_c - T_{\text{ext}}) (1 - e^{-t_2/\tau}) = (T_c - T_{\text{ext}})$$

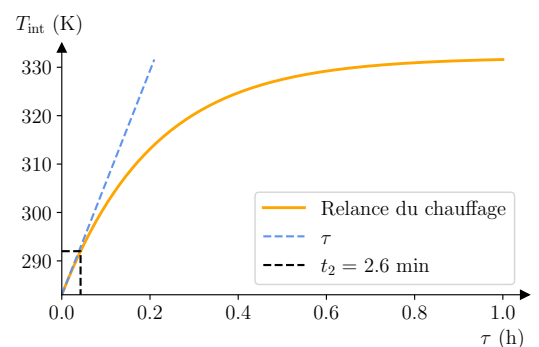
$$\Leftrightarrow 1 - e^{-t_2/\tau} = \frac{\mathcal{P}_c}{\mathcal{P}_{c,\max}}$$

$$\Leftrightarrow e^{-t_2/\tau} = 1 - \frac{\mathcal{P}_c}{\mathcal{P}_{c,\max}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t_2}{\tau} = \ln\left(\frac{\mathcal{P}_{c,\max} - \mathcal{P}_c}{\mathcal{P}_{c,\max}}\right)$$

$$\Leftrightarrow t_2 = \tau \ln\left(\frac{\mathcal{P}_{c,\max}}{\mathcal{P}_{c,\max} - \mathcal{P}_c}\right)$$

A.N. : $t_2 = 1,5 \times 10^2 \text{ s} = 2,6 \text{ min}$



- 8 Déterminer alors la différence d'énergie entre les deux situations :

- ◇ On garde le chauffage à la puissance \mathcal{P}_c de $t = 0$ à t_2 ;
- ◇ On a éteint le chauffage de $t = 0$ à t_1 , mais on le rallume de t_1 à t_2 avec $\mathcal{P}_{c,\max}$.

On suppose que l'énergie électrique est parfaitement convertie en chaleur. Sachant que pour l'électricité on a $1 \text{ kWh} \approx 0,20 \text{ €}$ en avril 2025, déterminer l'écart financier entre ces deux méthodes. Commenter.

Réponse

◇ **On garde le chauffage** : pendant $\Delta t_{02} \approx 3 \text{ h} = 1,1 \times 10^4 \text{ s}$, on chauffe à la puissance $\mathcal{P}_c = 3,7 \times 10^2 \text{ W}$, soit

$$\boxed{Q_{\text{garde}} = \mathcal{P}_c \Delta t_{02}} \Rightarrow \underline{Q_{\text{garde}} = 4,0 \text{ MJ}} \Leftrightarrow \underline{Q_{\text{garde},\text{€}} = 0,22 \text{ €}}$$

◇ **On éteint puis on rallume au maximum** : on chauffe donc à $\mathcal{P}_{c,\text{max}} = 2,0 \text{ kW}$ pendant $\Delta t_{12} = 1,5 \times 10^2 \text{ s}$, soit

$$\boxed{Q_{\text{rechauffe}} = \mathcal{P}_{c,\text{max}} \Delta t_{12}} \Rightarrow \underline{Q_{\text{rechauffe}} = 3,1 \times 10^{-1} \text{ MJ}} \Leftrightarrow \underline{Q_{\text{rechauffe},\text{€}} = 0,017 \text{ €}}$$

Ainsi, pour une telle durée d'attente, il vaut mieux couper le chauffage!



On cherche maintenant à savoir s'il existe une durée t_1 telle que les deux méthodes soient similaires.

- 9 Reprendre la résolution de la seconde équation différentielle (réchauffage à $\mathcal{P}_{c,\text{max}}$), avec pour condition initiale $T_{\text{int}}(t_1)$ la solution de la première équation différentielle (arrêt du chauffage) : **on ne considère plus $t_1 = 0$ et $T_{\text{int},f}$ comme conditions initiales.**

Réponse

Solution particulière :
$$T_{\text{int},p} = T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} (T_c - T_{\text{ext}})$$

Solution homogène :
$$T_{\text{int},h} = K'' e^{-t/\tau}$$

Solution totale :
$$T_{\text{int}}(t) = T_{\text{int},p} + T_{\text{int},h} = T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} (T_c - T_{\text{ext}}) + K'' e^{-t/\tau}$$

Condition initiale :
$$T_{\text{int}}(t_1) = T_{\text{ext}} + (T_c - T_{\text{ext}}) e^{-t_1/\tau}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{T_{\text{ext}}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} (T_c - T_{\text{ext}}) + K'' e^{-t_1/\tau} = \cancel{T_{\text{ext}}} + (T_c - T_{\text{ext}}) e^{-t_1/\tau}$$

$$\Leftrightarrow K'' e^{-t_1/\tau} = (T_c - T_{\text{ext}}) \left[e^{-t_1/\tau} - \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} \right]$$

$$\Leftrightarrow K'' = (T_c - T_{\text{ext}}) \left[1 - \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} e^{t_1/\tau} \right]$$

Solution finale :

$$\Leftrightarrow \boxed{T_{\text{int}}(t) = T_{\text{ext}} + (T_c - T_{\text{ext}}) \left[\frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} + e^{-t/\tau} \left(1 - \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} e^{t_1/\tau} \right) \right]}$$



- 10 Déterminer alors t_2 pour retrouver T_c , en fonction de τ , \mathcal{P}_c , $\mathcal{P}_{c,\text{max}}$ et t_1 .

Réponse

$$T_{\text{int}}(t_2) = T_c$$

$$\Leftrightarrow T_{\text{ext}} + (T_c - T_{\text{ext}}) \left[\frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} + e^{-t_2/\tau} \left(1 - \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} e^{t_1/\tau} \right) \right] = T_c$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(T_c - T_{\text{ext}})} \left[\frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} + e^{-t_2/\tau} \left(1 - \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} e^{t_1/\tau} \right) \right] = \cancel{(T_c - T_{\text{ext}})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} + e^{-t_2/\tau} \left(1 - \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} e^{t_1/\tau} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}_{c,\text{max}} + e^{-t_2/\tau} (\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\text{max}} e^{t_1/\tau}) = \mathcal{P}_c$$

$$\Leftrightarrow e^{-t_2/\tau} (\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\text{max}} e^{t_1/\tau}) = \mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\text{max}}$$

$$\Leftrightarrow e^{-t_2/\tau} = \frac{\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\text{max}} e^{t_1/\tau}}$$

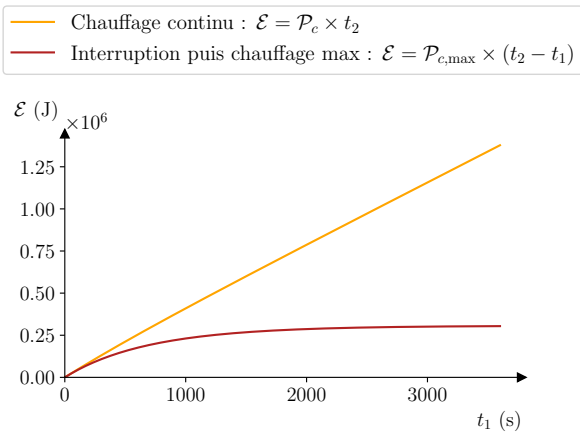
$$\Leftrightarrow -\frac{t_2}{\tau} = \ln \left(\frac{\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\text{max}} e^{t_1/\tau}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t_2 = \tau \ln \left(\frac{\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\text{max}} e^{t_1/\tau}}{\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\text{max}}} \right)}$$



- 11 Tracer alors la consommation énergétique des deux méthodes en fonction de t_1 . Conclure.

Réponse



On observe que la méthode de **maintenir le chauffage** est **toujours pire** que le fait de l'arrêter, même si c'est pour le relancer avec une plus grande puissance. Il n'y a que pour $t_1 \rightarrow 0$ que les deux méthodes sont semblables. Ainsi, **il vaut toujours mieux couper le chauffage en sortant !**

