Correction du TD d'application

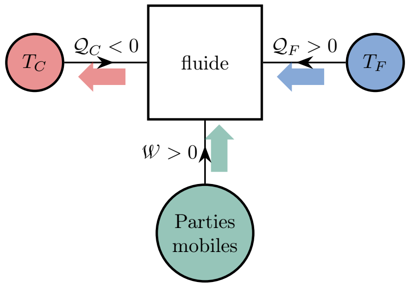
I Pompe à chaleur domestique

On veut maintenir la température d'une maison à $T_1 = 20\,°\mathrm{C}$ alors que la température extérieure est égale à $T_2 = 5\,°\mathrm{C}$, en utilisant une pompe à chaleur. L'isolation thermique de la maison est telle qu'il faut lui fournir un transfert thermique égal à $200\,\mathrm{kJ}$ par heure pour cet effet.

1 Rappeler le schéma de principe d'une pompe à chaleur ditherme et le sens réel des échanges d'énergie du fluide caloporteur.

Réponse

Une pompe à chaleur reçoit un transfert thermique de la source froide ($\mathcal{Q}_F = \mathcal{Q}_2 > 0$) et cède un transfert thermique à la source chaude ($\mathcal{Q}_C = \mathcal{Q}_1 < 0$). Cela nécessite de lui apporter un travail ($\mathcal{W} > 0$).



2 Quel doit être le cycle thermodynamique suivi par le fluide pour que l'efficacité de la pompe à chaleur soit maximale ?

Réponse

Le cycle d'efficacité maximale est le **cycle de Carnot**, composé de deux isothermes aux températures des sources et de deux adiabatiques réversibles.

3 Démontrer et calculer l'efficacité théorique maximale de la pompe dans ces conditions. Montrer qu'elle ne dépend que de la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur. Quel est le sens physique de l'efficacité ?

Réponse

Premier principe : $$\Delta \mathcal{U}_{\text{cycle}} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{W} + \mathcal{Q}_F + \mathcal{Q}_C = 0 \Leftrightarrow \boxed{-\mathcal{W} = \mathcal{Q}_F + \mathcal{Q}_C}$$

Second principe réversible : $$\Delta \mathcal{S}_{\text{cycle}} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{S}_{\text{ech}} + \underbrace{\mathcal{S}_{\text{cr}}}_{=0} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathcal{Q}_F}{T_F} + \frac{\mathcal{Q}_C}{T_C} = 0}$$

$$e^{\text{PAC}} = \frac{-\mathcal{Q}_C}{\mathcal{W}} \overset{1^{\text{er}}\text{ ppe.}}{=} \frac{\mathcal{Q}_C}{\mathcal{Q}_C + \mathcal{Q}_F} = \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{Q}_F}{\mathcal{Q}_C}}$$

Or, $$\frac{\mathcal{Q}_F}{T_F} \overset{2^{\text{d}}\text{ ppe.}}{=} -\frac{\mathcal{Q}_C}{T_C} \Leftrightarrow 1 + \frac{\mathcal{Q}_F}{\mathcal{Q}_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C} \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{Q}_F}{\mathcal{Q}_C}} = \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

Ainsi, $$\boxed{e_C^{\text{PAC}} = \frac{T_C}{T_C - T_F}} \quad \text{A.N. : } \underline{e_C^{\text{PAC}} = 20}$$

L'efficacité quantifie la performance énergétique de la PAC : pour $1\,\mathrm{J}$ d'énergie électrique fournie au moteur, on récupère e joules de transfert thermique cédé à la source chaude.

4 En déduire la puissance électrique minimale consommée par la pompe à chaleur.

Réponse

On nous a donné la puissance thermique à fournir à la PAC, soit $\mathcal{P}_{\text{th}} = |\mathcal{Q}_C|/\Delta t$. Par définition, s'il faut fournir un travail $\mathcal{W}$ à la PAC pendant une durée Δt, alors la puissance électrique minimale qu'elle consomme vaut

$$\mathcal{P}_{\text{élec}} = \frac{\mathcal{W}}{\Delta t} = \underbrace{\frac{|\mathcal{Q}_C|}{\Delta t}}_{=\mathcal{P}_{\text{th}}} \times \frac{1}{e^{\text{PAC}}} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{P}_{\text{élec}} \geq \frac{\mathcal{P}_{\text{th}}}{e_C^{\text{PAC}}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathcal{P}_{\text{th}} = 200\,\mathrm{kJ{\cdot}h^{-1}} \approx 55{,}6\,\mathrm{W} \\ e_C^{\text{PAC}} = 20 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{\mathcal{P}_{\text{élec}} \gtrsim 2{,}8\,\mathrm{W}}$$

5 En supposant la température intérieure imposée, pour quelle température extérieure l'efficacité est-elle maximale ?

Réponse

L'efficacité de la PAC augmente lorsque la différence de témpérature entre les soures décroît, elle est optimale lorsque les deux sources ont la même température… mais alors il n'y a plus besoin de chauffer ! En tout état de cause, il vaut mieux utiliser une PAC avec un chauffage au sol plutôt que par radiateurs car l'eau de chauffage y est moins chaude (35 °C contre 60 °C).

◇

II Rafraîchir sa cuisine en ouvrant son frigo

Un réfrigérateur est une machine thermique à écoulement, dans laquelle un fluide subit une série de transformations thermodynamiques cyclique. À chaque cycle, le fluide extrait de l'intérieur du frigo un transfert thermique $|\mathcal{Q}_{\text{int}}|$, cède un transfert thermique $|\mathcal{Q}_{\text{ext}}|$ à la pièce dans laquelle se trouve le frigo et reçoit un travail $|\mathcal{W}|$ fourni par un moteur électrique.

On fait l'hypothèse que l'intérieur du réfrigérateur et l'air ambiant constituent deux thermostats aux températures respectives $T_{\text{int}} = 268\,\text{K}$ et $T_{\text{ext}} = 293\,\text{K}$, et qu'en dehors des échanges avec ces thermostats les transformations sont adiabatiques.

1 Quel est le signe des énergies échangées ?

Réponse

Un frigo est une machine réceptrice, qui prélève du transfert thermique à la source froide ($\mathcal{Q}_{\text{int}} > 0$ car le transfert thermique est fourni au fluide) pour le céder à la source chaude ($\mathcal{Q}_{\text{ext}} < 0$). Cela demande de fournir de l'énergie sous forme de travail ($\mathcal{W} > 0$).

◇

2 Lorsqu'il fait très chaud en été, est-ce une bonne idée d'ouvrir la porte de son frigo pour refroidir sa cuisine ? Pourquoi ?

Réponse

Pour pouvoir refroidir sa cuisine en ouvrant son frigo, il faudrait que globalement le transfert thermique prélevé à l'intérieur du frigo $|\mathcal{Q}_{\text{int}}|$ (qui serait finalement prélevé à l'air de la cuisine, puisque la porte est ouverte) soit **plus grand** que celui cédé à la source chaude $|\mathcal{Q}_{\text{ext}}|$, qui n'est autre que l'air de la cuisine. Or, avec le premier principe,

$$\mathcal{W} + |\mathcal{Q}_{\text{int}}| - |\mathcal{Q}_{\text{ext}}| = 0 \Leftrightarrow |\mathcal{Q}_{\text{int}}| - |\mathcal{Q}_{\text{ext}}| = -\mathcal{W} < 0$$

On en déduit qu'il est **impossible** d'avoir $|\mathcal{Q}_{\text{int}}| > |\mathcal{Q}_{\text{ext}}|$ comme on l'aurait aimé : laisser son frigo ouvert **ne peut que conduire à réchauffer l'air de la cuisine**.

◇

3 Quelle est la différence avec un climatiseur ?

Réponse

Un climatiseur est relié à l'**extérieur** de la maison, qui joue le rôle de source chaude. Ainsi, quand on climatise sa maison ou sa voiture par une journée de canicule, on réchauffe l'air extérieur.

◇

III Moteur à explosion – cycle de Beau de Rochas

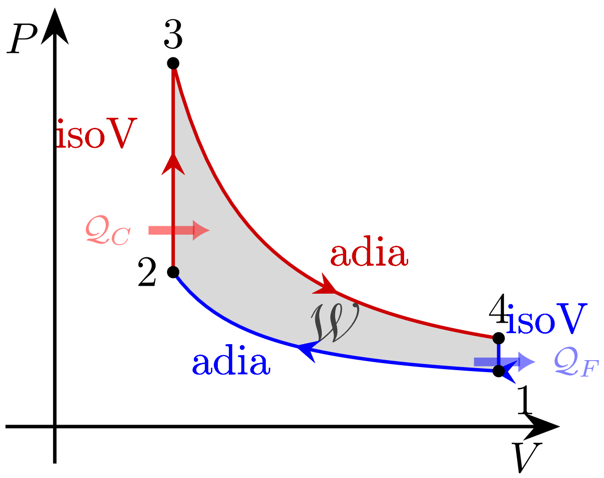
Dans un moteur à explosion, n moles de gaz parfait subit le cycle de Beau de Rochas, composé de deux adiabatiques et de deux isochores :

- ◇ compression adiabatique de l'état (P_1,V_1,T_1) à l'état (P_2,V_2,T_2) ;
- ◇ échauffement isochore de l'état (P_2,V_2,T_2) à l'état (P_3,V_3,T_3) ;
- ◇ détente adiabatique de l'état (P_3,V_3,T_3) à l'état (P_4,V_4,T_4) ;
- ◇ refroidissement isochore qui ramène le fluide à l'état initial.

Les transformations sont supposées quasi-statiques.

1 Représenter le cycle dans un diagramme de Watt (P,V).

Réponse



---

2 Exprimer les travaux et transferts thermiques au cours des différentes étapes en fonction n,R,γ et des températures. En déduire le rendement théorique r de ce cycle en fonction des températures T_1, T_2, T_3 et T_4.

Réponse

Pour les adiabatiques, $\mathcal{Q} = 0$, et pour les isochores, $\mathcal{W} = 0$. De plus, $\Delta\mathcal{U} = C_V \Delta T$ et $C_V = \frac{nR}{\gamma-1}$.

◇ $1 \to 2$:
$$\mathcal{Q}_{12} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{W}_{12} = \Delta\mathcal{U}_{12} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1)}$$

◇ $2 \to 3$:
$$\mathcal{W}_{23} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{Q}_{23} = \Delta\mathcal{U}_{23} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_2)}$$

◇ $3 \to 4$:
$$\mathcal{Q}_{34} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{W}_{34} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_4 - T_3)}$$

◇ $4 \to 1$:
$$\mathcal{W}_{41} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{Q}_{41} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_4)}$$

Pour un moteur, $$r = -\frac{\mathcal{W}_{\text{tot}}}{\mathcal{Q}_C} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_C = \mathcal{Q}_{23} \quad \text{et} \quad -\mathcal{W}_{\text{tot}} = \mathcal{Q}_{23} + \mathcal{Q}_{41}$$

car $\mathcal{Q}_{23} > 0$ et $\mathcal{Q}_{41} < 0$. Ainsi,
$$r = \frac{\cancel{nR/(\gamma-1)}}{\cancel{nR/(\gamma-1)}} \frac{T_3 - T_2 + T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{r = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}}$$

---

3 En déduire l'expression de r en fonction du rapport volumétrique $x = \frac{V_1}{V_2}$ et du coefficient adiabatique $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ du fluide.

Réponse

Sur les adiabatiques quasi-statiques du gaz parfait, on a des transformations isentropiques donc on applique la loi de LAPLACE : $PV^\gamma = \text{cte} \Leftrightarrow TV^{\gamma-1} = \text{cte}$:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{T_2 = T_1 x^{\gamma-1}}$$

$$T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$$
$$\Leftrightarrow T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1} \quad \text{Isochores}$$
$$\Leftrightarrow T_3 = T_4 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad x = \frac{V_1}{V_2}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{T_3 = T_4 x^{\gamma-1}}$$

Ainsi,
$$r = 1 + \frac{T_1 - T_4}{(T_4 - T_1) x^{\gamma-1}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{r = 1 - x^{1-\gamma}}$$

---

4 Le piston du cylindre où évolue l'air ($\gamma = 1{,}4$) a une course $\ell = 10\,\mathrm{cm}$, une section $S = 50\,\mathrm{cm}^2$ et emprisonne un volume d'air de $100\,\mathrm{cm}^3$ en fin de compression. Calculer :

a – le rendement théorique du cycle ;

Réponse

On a $V_{\text{tot}} = S\ell = 500\,\mathrm{cm}^3 = V_1$, et $V_{\min} = 100\,\mathrm{cm}^3 = V_2$. Ainsi, $\underline{r = 47{,}5\,\%}$

◇

b – le travail fourni au cours d'un cycle, si l'air est admis à une pression de 1 bar et à 300 K et si la température maximale est de 900 K.

Réponse

$$\mathcal{W}_{\text{tot}} = -r\mathcal{Q}_C = -r\frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_2)$$

Or, $\begin{cases} T_2 = T_1 x^{\gamma-1} \\ nR = \frac{P_1V_1}{T_1} \end{cases}$ avec $\begin{cases} T_1 = 300\,\mathrm{K} \\ P_1 = 1\,\mathrm{bar} = 1\times10^5\,\mathrm{Pa} \\ V_1 = 500\,\mathrm{cm}^3 = 500\times10^{-6}\,\mathrm{m}^3 \end{cases}$

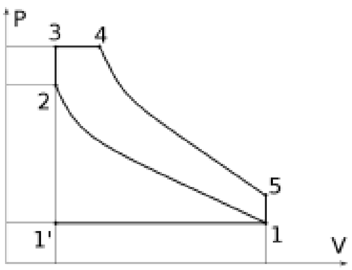
Soit $\boxed{\mathcal{W}_{\text{tot}} = \left(\frac{x^{1-\gamma}-1}{\gamma-1}\right)\frac{P_1V_1}{T_1}(T_3 - T_1x^{\gamma-1})}$ avec $\begin{cases} x = 5 \\ \gamma = 1{,}4 \\ T_3 = 900\,\mathrm{K} \end{cases}$

A.N. : $\underline{\mathcal{W}_{\text{tot}} = -65{,}1\,\mathrm{J}}$

◇

IV Moteur Diesel à double combustion

Dans les moteurs Diesel à double combustion, le cycle décrit par le mélange air-carburant est modélisable par celui d'un système fermé représenté en coordonnées de Watt ci-après.



Après la phase d'admission $1' \to 1$ qui amène le mélange au point 1 du cycle, celui-ci subit une compression adiabatique supposée réversible jusqu'au point 2. Après injection du carburant en 2, la combustion s'effectue d'abord de façon isochore de 2 à 3 puis se poursuit de façon isobare de 3 à 4. La phase de combustion est suivie d'une détente adiabatique à nouveau prise réversible de 4 à 5, puis d'une phase d'échappement isochore $5 \to 1$ puis isobare $1 \to 1'$.

Au point 1 du cycle, la pression $p_m = 1{,}0\,\mathrm{bar}$ et la température $T_m = 293\,\mathrm{K}$ sont minimales. La pression maximale, aux points 3 et 4, est $p_M = 60\,\mathrm{bar}$ et la température maximale, au point 4, vaut $T_M = 2073\,\mathrm{K}$. Le rapport volumétrique de compression vaut $\beta = V_M/V_m = 17$.

On suppose que le mélange air-carburant se comporte exactement comme l'air, c'est-à-dire comme un gaz parfait diatomique de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, et de capacités thermiques respectives C_P et C_V.

1 Exprimer les températures T_2, T_3 et T_5 en fonction de p_m, p_M, T_m, T_M et β. Calculer les valeurs numériques.

Réponse

La transformation $1 \to 2$ est une adiabatique réversible (donc isentropique) d'un gaz parfait ; d'après la loi de Laplace en température et volume $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$, on a

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow \boxed{T_2 = \beta^{\gamma-1}T_m} \Rightarrow \underline{T_2 = 9{,}1\times10^2\,\mathrm{K}}$$

La transformation $2 \to 3$ est isochore, d'où par l'équation d'état

$$\frac{P_3}{T_3} = \frac{P_2}{T_2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T_2 = \beta^{\gamma-1}T_m \\ P_3 = P_m \\ P_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} P_1 = \beta^{\gamma}P_m \end{cases}$$

A.N. : $\boxed{T_3 = \frac{P_M}{\beta P_m}T_m} \Rightarrow \underline{T_3 = 1{,}0\times10^3\,\mathrm{K}}$

Enfin, la loi de Laplace appliquée sur $4 \to 5$ qui est isentropique donne

$$T_5 = \left(\frac{V_4}{V_5}\right)^{\gamma} T_4 \quad \text{or} \quad \frac{V_4}{T_4} \overset{\text{isoP}}{=} \frac{V_3}{T_3}$$

$$\Rightarrow T_5 = \left(\frac{V_3}{V_5}\frac{T_4}{T_3}\right)^\gamma T_4 = \left(\frac{1}{\beta}\frac{T_M}{T_m}\frac{\beta P_m}{P_M}\right)^\gamma T_M$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_5 = \left(\frac{T_M P_m}{T_m P_M}\right)^\gamma T_M} \Rightarrow \underline{T_5 = 8{,}8 \times 10^2\,\mathrm{K}}$$

◇

2 Calculer le transfert thermique massique q_C reçu par l'air au cours de la phase de combustion $2 \to 4$.

Réponse

Notons n la quantité de matière de gaz du mélange. Le transfert thermique $\mathcal{Q}_C$ est fourni au cours des étapes $2 \to 3$ est $3 \to 4$. En utilisant d'une part le bilan d'énergie (premier principe) sur $2 \to 3$ isochore et le fait que le système soit un gaz parfait, on trouve

$$\Delta \mathcal{U}_{23} \overset{1^{\text{er}}\text{ ppe.}}{=} \underbrace{\mathcal{W}_{23}}_{=0} + \mathcal{Q}_{23} \quad \text{et} \quad \Delta \mathcal{U}_{23} \overset{\text{G.P.}}{=} C_V \Delta T_{23} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_2)$$

De même, pour $3 \to 4$ qui est isobare donc pour laquelle on applique le premier principe enthalpique,

$$\Delta \mathcal{H}_{34} \overset{1^{\text{er}}\text{ ppe.}}{=} \underbrace{\mathcal{W}_{u,34}}_{=0} + \mathcal{Q}_{34} \quad \text{et} \quad \Delta \mathcal{H}_{34} \overset{\text{G.P.}}{=} C_P \Delta T_{34} = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1}(T_4 - T_3)$$

Puis en introduisant m *via* $n = m/M$:

$$\mathcal{Q}_C = \mathcal{Q}_{23} + \mathcal{Q}_{34} = \Delta \mathcal{U}_{23} + \Delta \mathcal{H}_{34} \quad \text{soit} \quad \mathcal{Q}_C = \frac{mR}{M(\gamma - 1)}[T_3 - T_2 + \gamma(T_4 - T_3)]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{q_C = \frac{R}{M(\gamma-1)}[T_3 - T_2 + \gamma(T_4 - T_3)]} \Rightarrow \underline{q_C = 1{,}1 \times 10^3\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}}$$

◇

3 Calculer le transfert thermique massique q_F échangé avec le milieu extérieur entre les points 5 et 1.

Réponse

Comme $5 \to 1$ est isochore d'un gaz parfait, on a

$$\Delta \mathcal{U}_{5\to1} \overset{1^{\text{er}}\text{ ppe.}}{=} \mathcal{Q}_{51} \quad \text{et} \quad \Delta \mathcal{U}_{5\to1} \overset{\text{G.P.}}{=} \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_5)$$

$$\Rightarrow \boxed{q_F = \frac{R}{M(\gamma - 1)}(T_1 - T_5)} \Rightarrow \underline{q_F = -4{,}2 \times 10^2\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}}$$

◇

4 En déduire le travail massique w échangé au cours d'un cycle.

Réponse

D'après le premier principe appliqué à l'ensemble du cycle,

$$\mathcal{W} = -\mathcal{Q}_F - \mathcal{Q}_C \Leftrightarrow \boxed{w = -q_F - q_C} \Rightarrow \underline{w = -7{,}1 \times 10^2\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}}$$

◇

5 Définir et calculer le rendement de ce moteur. Commenter la valeur trouvée.

Réponse

Le rendement du moteur est défini par

$$\boxed{\eta = \left|\frac{w}{q_C}\right| = -\frac{w}{q_C}} \Rightarrow \underline{\eta = 63\,\%}$$

C'est une valeur élevée, mais qui a été obtenue avec une modélisation très idéalisée des transformations. En pratique, l'ordre de grandeur du rendement d'un moteur diesel est plutôt de 40 ; 45%.

◇

Correction du TD d'entraînement

I Coût énergétique d'un goûter

Pour préparer le goûter de fin d'année avec vos professeures, vous achetez six bouteilles de 1 L de différents jus que vous rangez dans votre réfrigérateur. Une heure plus tard, elles sont à la température du frigo.

Données

◇ L'efficacité thermodynamique du réfrigérateur vaut 70% de l'efficacité de Carnot ;

◇ L'isolation imparfaite du réfrigérateur se traduit par des fuites thermiques de puissance 10 W ;

◇ Tarifs électricité : 1 kWh coûte 0,20 €.

1 Combien vous coûte ce refroidissement ?

Réponse

Supposons que les bouteilles de jus de fruit sont à température initiale $T_I = 25\,°\mathrm{C}$, et que la température finale (celle du frigo) vaut $T_F = 5\,°\mathrm{C}$. Commençons par calculer l'énergie nécessaire au refroidissement.

◇ **Système** : {contenu du frigo}

◇ **Bilan des échanges** :

▷ Transfert thermique reçu de la part du fluide frigorigène : $\mathcal{Q}_{\text{frigo}} < 0$ que l'on cherche à déterminer ;

▷ transfert thermique de fuite : $\mathcal{Q}_{\text{fuite}} = +\mathcal{P}_{\text{fuite}}\Delta t > 0$ avec $P_{\text{fuite}} = 10\,\mathrm{W}$ et $\Delta t = 1\,\mathrm{h} = 3{,}6 \times 10^3\,\mathrm{s}$: **attention au signe**, compte-tenu de la différence de température, c'est le **contenu du frigo** qui reçoit effectivement de l'énergie.

◇ **Variation d'énergie interne** : on assimile les jus à de l'eau du point de vue thermique, soit

$$\Delta\mathcal{U} = m_{\text{jus}}c_{\text{eau}}(T_F - T_I) = \mathcal{Q}_{\text{frigo}} + \mathcal{Q}_{\text{fuite}}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{Q}_{\text{frigo}} = m_{\text{jus}}c_{\text{eau}}(T_F - T_I) - \mathcal{P}_{\text{fuite}}\Delta t = -5{,}4 \times 10^5\,\mathrm{J}$$

Calculons maintenant le coût en énergie électrique du refroidissement. On fait l'hypothèse que l'énergie électrique fournie au frigo ne sert qu'à faire tourner le moteur. Par définition de l'efficacité d'un frigo, $e = \frac{|\mathcal{Q}_{\text{froid}}|}{\mathcal{W}}$ où les échanges sont ceux du fluide. Ici, on a donc

$$e = \frac{|\mathcal{Q}_{\text{frigo}}|}{\mathcal{E}_{\text{élec}}} \quad \text{or} \quad e_C = \frac{T_{\text{frigo}}}{T_{\text{ext}} - T_{\text{frigo}}}$$

En combinant, on en déduit
$$e = \frac{|\mathcal{Q}_{\text{frigo}}|}{\mathcal{E}_{\text{élec}}} = 0{,}7\frac{T_{\text{frigo}}}{T_{\text{ext}} - T_{\text{frigo}}} \approx 10$$

donc
$$\mathcal{E}_{\text{élec}} = \frac{|\mathcal{Q}_{\text{frigo}}|}{e} = 5 \times 10^4\,\mathrm{J}$$

Enfin, calculons le prix en euros de cette énergie. Sachant que $1\,\mathrm{kWh} = 1 \times 10^3\,\mathrm{W} \times 3{,}6 \times 10^3\,\mathrm{s} = 3{,}6 \times 10^6\,\mathrm{J}$:

$$\underline{p = \frac{5 \times 10^4\,\mathrm{J}}{3{,}6 \times 10^6\,\mathrm{J}} \times 0{,}20\,€ \approx 2{,}8 \times 10^{-3}\,€}$$

◇

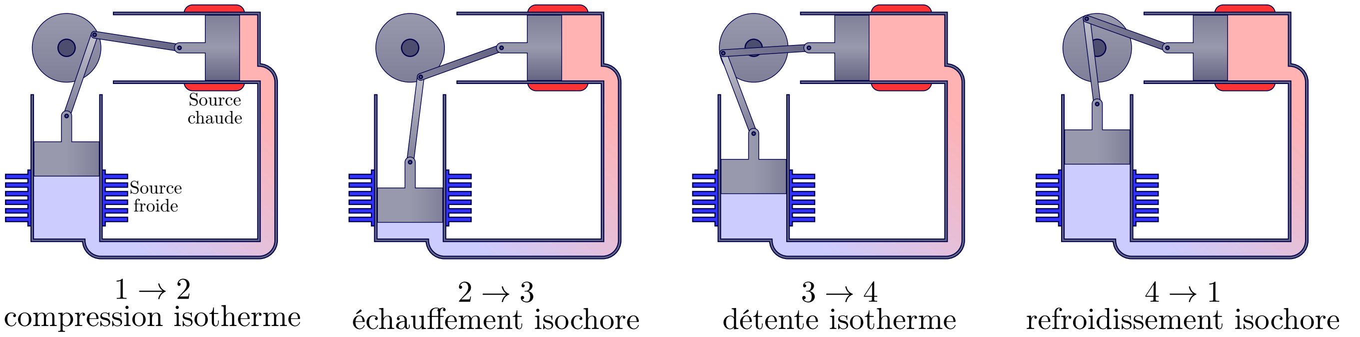
II Étude d'un moteur de Stirling

Le moteur de Stirling est constitué de deux chambres, une chaude et une froide, reliées par un régénérateur de volume constant pouvant être constitué de fils de cuivre tressés. Le gaz, en circuit fermé, reçoit un transfert thermique d'une source chaude (par exemple une chaudière à combustion) et cède un transfert thermique à la source froide (par exemple l'atmosphère).

Le rôle du régénérateur, base de l'invention de Robert Stirling, est fondamental pour obtenir une bonne efficacité. Dans son brevet original de 1816, Stirling explique que le gaz chaud entre dans la partie chaude du régénérateur et est progressivement refroidi durant son parcours pour ressortir par l'autre extrémité à une température presque identique à la température de la source froide.

Dans le parcours inverse, le gaz est progressivement réchauffé. Cette astuce technologique permet d'avoir une partie des échanges thermiques internes au moteur. On considérera le cycle parcouru par $n = 40\,\text{mmol}$ d'air, considéré comme un gaz parfait de rapport isentropique $\gamma = 1{,}4$.

Dans un premier temps, on néglige le régénérateur : les deux chambres ne font qu'une. Le cycle de STIRLING est alors modélisable par la succession de deux isothermes et deux isochores à partir d'un état 1 ($P_1 = 1\,\text{bar}$, $T_1 = 300\,\text{K}$). Il est décrit comme suit :



◇ $1 \to 2$: compression isotherme réversible à $T_F = T_1$ jusqu'à l'état 2, où $V_2 = V_1/10$;

◇ $2 \to 3$: échauffement isochore au contact de la source chaude à $T_C = 600\,\text{K}$ jusqu'à l'état 3 de température $T_3 = T_C$;

◇ $3 \to 4$: détente isotherme réversible au contact de la source chaude à T_C, jusqu'à l'état 4 de volume $V_4 = V_1$;

◇ $4 \to 1$: refroidissement isochore au contact de la source froide jusqu'à revenir à l'état 1.

$\boxed{1}$ Calculer les valeurs numériques de P,V,T pour chacun des quatre états.

Réponse

En utilisant les informations de l'énoncé et l'équation d'état du gaz parfait, on obtient les valeurs suivantes :

État 1	**État 2**	**État 3**	**État 4**
$P_1 = 1\,\text{bar}$	$P_2 = 10P_1 = 10\,\text{bar}$	$P_3 = \frac{T_3}{T_2}P_2 = \frac{T_C}{T_F}P_2 = 20\,\text{bar}$	$P_4 = \frac{V_2}{V_1}P_3 = 2\,\text{bar}$
$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = 0{,}98\,\text{L}$	$V_2 = \frac{V_1}{10} = 0{,}098\,\text{L}$	$V_3 = V_2$	$V_1 = V_1$
$T_1 = T_F = 300\,\text{K}$	$T_2 = T_1$	$T_3 = T_C = 600\,\text{K}$	$T_4 = T_3$

◇

$\boxed{2}$ Représenter ce cycle dans un diagramme de WATT (P,V). Justifier alors sans calculer que ce cycle est moteur.

Réponse

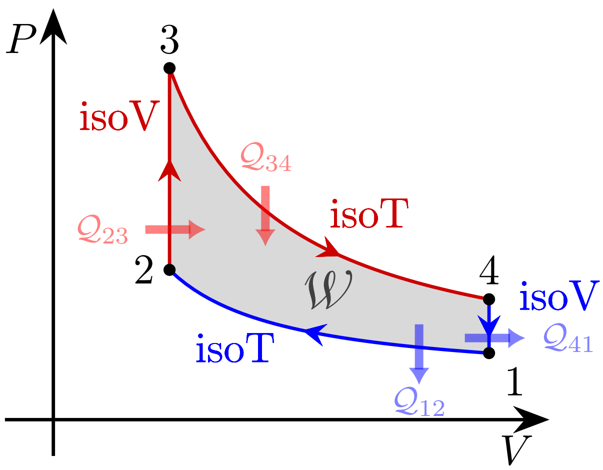


FIGURE T6.1 – Cycle de STIRLING. Sens horaire ⇒ cycle **moteur**.

◇

$\boxed{3}$ Calculer pour chaque étape le travail et le transfert thermique reçus par le gaz. Commenter ces résultats : a-t-on bien un cycle moteur ?

Réponse

◇ $1 \to 2$: réversible, donc forcément quasi-statique et $P_{\text{ext}} = P$. Ainsi,

$$\mathcal{W}_{12} = -\int_1^2 P\,\mathrm{d}V = -\int_1^2 nRT_F \frac{\mathrm{d}V}{V} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{W}_{12} = -nRT_F \ln\left(\frac{V_2}{V_2}\right)} \Rightarrow \underline{\mathcal{W}_{12} = 230\,\mathrm{J}}$$

IsoT $\Rightarrow$

$$\Delta\mathcal{U}_{12} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{Q}_{12} = -\mathcal{W}_{12} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{Q}_{12} = nRT_F \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \Rightarrow \underline{\mathcal{Q}_{12} = -230\,\mathrm{J}}$$

◇ $2 \to 3$: isochore, donc

$$\boxed{\mathcal{W}_{23} = 0}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{Q}_{23} = \Delta\mathcal{U}_{23} = C_V(T_3 - T_2) \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{Q}_{23} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_F)} \Rightarrow \underline{\mathcal{Q}_{23} = 249\,\mathrm{J}}$$

◇ $3 \to 4$: même raisonnement que $1 \to 2$:

$$\boxed{\mathcal{W}_{34} = -nRT_C \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)} \Rightarrow \underline{\mathcal{W}_{34} = -459\,\mathrm{J}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathcal{Q}_{34} = nRT_C \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)} \Rightarrow \underline{\mathcal{Q}_{34} = 459\,\mathrm{J}}$$

◇ $4 \to 1$: même raisonnement que $2 \to 3$:

$$\boxed{\mathcal{W}_{41} = 0} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathcal{Q}_{41} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_F - T_C)} \Rightarrow \underline{\mathcal{Q}_{41} = -249\,\mathrm{J}}$$

En sommant les travaux, on a

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{12} + \mathcal{W}_{34} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{W} = nR(T_C - T_F)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} < 0$$

c'est donc effectivement un moteur puisque le gaz **fournit en travail** en moyenne sur un cycle.

◇

4 Quel est, sur le plan énergétique, la production de ce système sur un cycle ? Quel est le coût énergétique ? En déduire l'expression du rendement en fonction de T_C, T_F, γ et le rapport V_1/V_2. Application numérique.

Réponse

La **production** énergétique est le **travail** $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{12} + \mathcal{W}_{34} < 0$ qu'il fournit. Le coût est le transfert thermique qu'il reçoit de la source chaude, $\mathcal{Q}_C = \mathcal{Q}_{23} + \mathcal{Q}_{34} > 0$. Le rendement est donc

$$\eta = \left|\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{Q}_C}\right| = -\frac{\mathcal{W}_{12} + \mathcal{W}_{34}}{\mathcal{Q}_{23} + \mathcal{Q}_{34}} \Leftrightarrow \boxed{\eta = \frac{(T_C - T_F)\ln\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)}{\dfrac{T_C - T_F}{\gamma - 1} + T_C \ln\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)}} \Rightarrow \underline{\eta = 0{,}32}$$

◇

5 Calculer l'entropie créée au sein du système au cours du cycle. Quel type d'irréversibilité entre en jeu ?

Réponse

Le bilan d'entropie sur le cycle complet s'écrit $\Delta\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{ech}} + \mathcal{S}_{\text{cr}} = 0$. Or,

$$\mathcal{S}_{\text{ech}} = \frac{\mathcal{Q}_{12} + \mathcal{Q}_{41}}{T_F} + \frac{\mathcal{Q}_{23} + \mathcal{Q}_{34}}{T_C} = \cancel{nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} + \frac{nR}{\gamma - 1}\frac{T_F - T_C}{T_F} - \frac{nR}{\gamma - 1}\frac{T_C - T_F}{T_C} + \cancel{nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} =$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{S}_{\text{ech}} = \frac{nR}{\gamma - 1}\left(\frac{T_F T_C - T_C^2 + T_C T_F - T_F^2}{T_C T_F}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{S}_{\text{ech}} = -\frac{nR}{\gamma - 1}\frac{(T_C - T_F)^2}{T_C T_F}}$$

Ainsi,

$$\mathcal{S}_{\text{cr}} = -\mathcal{S}_{\text{ech}} = \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{S}_{\text{cr}} = \frac{nR}{\gamma - 1}\frac{(T_C - T_F)^2}{T_C T_F}} \Rightarrow \underline{\mathcal{S}_{\text{cr}} = 0{,}42\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}} > 0$$

L'irréversibilité est d'origine thermique : pendant les deux isochores, le gaz n'est pas à la même température que le thermostat avec lequel il est en contact. Le transfert thermique s'accompagne donc de création d'entropie par inhomogénéité.

◇

L'invention du régénérateur par STIRLING a permis d'améliorer considérablement le rendement de la machine précédente. Son idée est de faire en sorte que le gaz échange du transfert thermique au cours des transformations $2 \to 3$ et $4 \to 1$ non pas avec les thermostats, mais avec un système qui n'échange de l'énergie qu'avec les gaz au cours de ces transformations.

6 Justifier la pertinence de l'idée de STIRLING.

Réponse

Le transfert thermique $\mathcal{Q}_{23}$, qui diminue le rendement, est exactement opposé au transfert thermique $\mathcal{Q}_{41}$. Plutôt que de perdre le transfert thermique $\mathcal{Q}_{41}$ en le cédant à la source froide, l'idée de STIRLING consiste à le céder au régénérateur pour qu'il le rende au gaz lors de l'étape $2 \to 3$. Le transfert thermique n'est alors **plus fourni par la source chaude**, ce qui est plus économique.

◇

7 Que vaut le rendement dans ces conditions ? Ce rendement peut-il être amélioré sans changer les sources ?

Réponse

Comme $\mathcal{Q}_{23}$ n'est plus fourni par la source chaude, il ne compte plus dans le rendement, qui devient

$$\eta = \left|\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{Q}_C}\right| = -\frac{\mathcal{W}_{12} + \mathcal{W}_{34}}{\mathcal{Q}_{34}} = \frac{T_C - T_F}{T_C} \Leftrightarrow \boxed{\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

On reconnaît alors le **rendement de CARNOT**, c'est-à-dire le meilleur rendement possible pour un moteur fonctionnant avec ces deux sources.

Important T6.1 : À retenir

Ce raisonnement de retenir une grandeur coûteuse (on parle de *récupération*) est très classique, il faut savoir intégrer ce type de réflexion à vos démarches de résolution de problèmes, *a minima* sur le moteur de STIRLING.

◇

III Cycle moteur de RANKINE

Un moteur fonctionne avec une masse m d'eau. Cette masse d'eau subit les transformations suivantes :

- ◇ AB : isotherme (A liquide saturant à T_1 et P_1 ; B à P_2) ;
- ◇ BC : échauffement réversible isobare qui amène l'eau à la température T_2 (C liquide saturant) ;
- ◇ CD : vaporisation totale sous la pression P_2 et à la température T_2 ;
- ◇ DE : détente adiabatique réversible jusqu'à la température T_1 ;
- ◇ EA : liquéfaction totale à la température T_1.

La capacité thermique massique de l'eau liquide vaut $c_{\text{liq}} = 4{,}18\,\text{kJ·K}^{-1}\text{·kg}^{-1}$. Dans le tableau suivant, on donne les caractéristiques des points se trouvant sur la courbe de saturation aux pressions P_1 et P_2.

	P (bar)	T (K)	v_ℓ ($\text{m}^3\text{·kg}^{-1}$)	v_g ($\text{m}^3\text{·kg}^{-1}$)	h_ℓ (kJ·kg^{-1})	h_g (kJ·kg^{-1})
P_1	0,250	338,15	$1{,}02 \times 10^{-3}$	6,202	272,02	2618,4
P_2	1,208	378,15	$1{,}05 \times 10^{-3}$	1,419	440,17	2683,7

La variation d'entropie massique d'un liquide pour une transformation d'une température T_A à une température T_B s'exprime

$$\Delta s_{\text{AB}} = s_{\text{B}} - s_{\text{A}} = c_{\text{liq}} \ln\left(\frac{T_{\text{B}}}{T_{\text{A}}}\right)$$

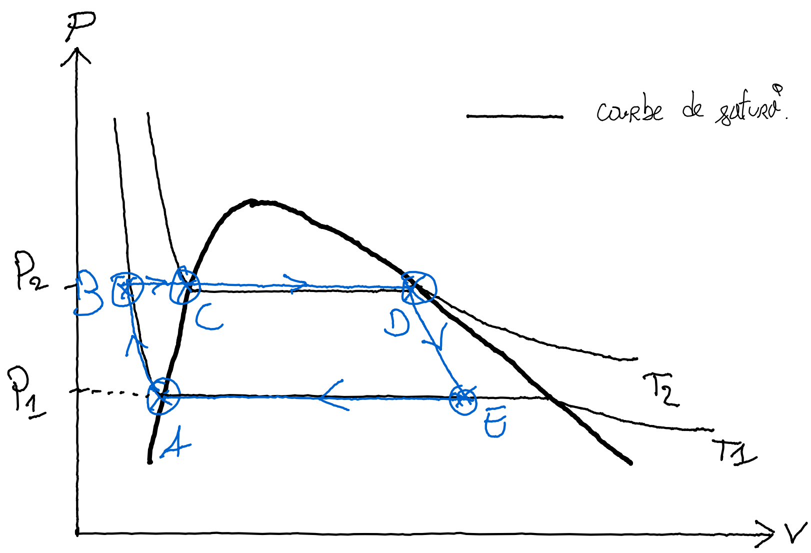
La variation d'entropie massique lors d'un changement d'état est :

$$\Delta s = \frac{\Delta h}{T}$$

avec Δh la variation d'enthalpie massique lors du changement d'état et T la température du changement d'état.

1 Tracer l'allure de deux isothermes d'ANDREWS dans le diagramme de CLAPEYRON. On fera apparaître la courbe de saturation. Dessiner l'allure du cycle sur ce même diagramme.

Réponse



[2] a – Montrer que la variation $s_\mathrm{B} - s_\mathrm{A}$ est nulle.

Réponse

$$\Delta s_\mathrm{AB} = c_\mathrm{liq} \ln\left(\frac{T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}}\right) \quad \text{or} \quad \text{AB isoT} \ \Rightarrow T_\mathrm{B} = T_\mathrm{A} \quad \text{donc} \quad \boxed{\Delta s_\mathrm{AB} = 0}$$

b – Exprimer $s_\mathrm{C} - s_\mathrm{B}$ en fonction de c_liq, T_1 et T_2.

Réponse

$$\Delta s_\mathrm{BC} = s_\mathrm{C} - s_\mathrm{B} = c_\mathrm{liq} \ln\left(\frac{T_\mathrm{C}}{T_\mathrm{B}}\right) \Leftrightarrow \boxed{s_\mathrm{C} - s_\mathrm{B} = c_\mathrm{liq} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}$$

c – Exprimer $s_\mathrm{D} - s_\mathrm{C}$ en fonction de $h_g(T_2)$, $h_\ell(T_2)$ et T_2.

Réponse

CD est une vaporisation totale, il y a donc transition de phase :

$$\Delta s_\mathrm{CD} = s_\mathrm{D} - s_\mathrm{C} = \frac{\Delta h_\mathrm{CD}}{T_2} \Leftrightarrow \boxed{s_\mathrm{D} - s_\mathrm{C} = \frac{h_g(T_2) - h_\ell(T_2)}{T_2}}$$

d – Calculer $s_\mathrm{E} - s_\mathrm{D}$.

Réponse

DE est adiabatique, soit $\mathcal{Q} = 0 \Rightarrow \mathcal{S}_\mathrm{ech,DE} = 0$ et réversible, soit $\mathcal{S}_\mathrm{cr,DE} = 0$: elle est donc **isentropique** :

$$\Delta s_\mathrm{DE} = \boxed{s_\mathrm{E} - s_\mathrm{D} = 0}$$

[2] Énoncer le théorème des moments.

Réponse

Sur un diagramme (P,v) de transition de phase liquide-vapeur, les titres massiques x_g et x_ℓ en gaz et liquide d'un équilibre diphasé se calculent par

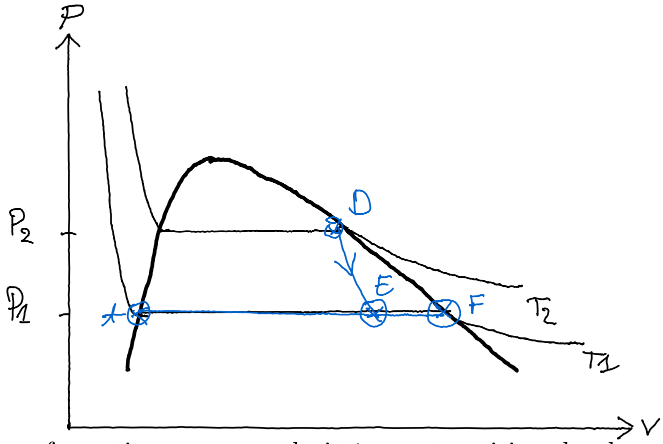
$$\boxed{x_\ell = \frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{LG}}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_g = \frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{LG}}}$$

avec M le point étudié de l'équilibre, L le liquide saturant correspondant et G la vapeur saturante correspondante.

[3] Soit x la fraction massique de vapeur en E. On admet que l'on peut appliquer le théorème des moments pour l'entropie. Déterminer x littéralement puis numériquement.

Réponse

Pour appliquer le théorème des moments, on prend E le point équivalent à M, A est équivalent à L et F le point équivalent à G. On a donc $x = \dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF}}$.



Ainsi, $x = \dfrac{s_\mathrm{E} - s_\mathrm{A}}{s_\mathrm{F} - s_\mathrm{A}}$. Or, on sait d'après 2) d – que $s_\mathrm{E} = s_\mathrm{D}$, donc on peut réécrire

$$s_\mathrm{E} - s_\mathrm{A} = s_\mathrm{D} - s_\mathrm{A} = \underbrace{s_\mathrm{D} - s_\mathrm{C}}_{\frac{h_g(T_2) - h_\ell(T_2)}{T_2}} + \underbrace{s_\mathrm{C} - s_\mathrm{B}}_{c_\mathrm{liq} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)} + \underbrace{s_\mathrm{B} - s_\mathrm{A}}_{0}$$

$$\Leftrightarrow \Delta s_\mathrm{AE} = \frac{h_g(T_2) - h_\ell(T_2)}{T_2} + c_\mathrm{liq} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + 0$$

On ne connaît pas *a priori* $s_\mathrm{F} - s_\mathrm{A}$. Cependant, cette transformation correspondrait à une transition de phase complète de vapeur saturante à (T_1,P_1) en liquide saturant à (T_1,P_1), dont on connaît la variation d'enthalpie : $\Delta h_\mathrm{AF} = h_g(T_1) - h_\ell(T_1)$. On connaît donc la variation d'entropie :

$$\Delta s_\mathrm{AF} = s_\mathrm{F} - s_\mathrm{A} = \frac{h_g(T_1) - h_\ell(T_1)}{T_1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{T_1}{T_2} \frac{h_g(T_2) - h_\ell(T_2)}{h_g(T_1) - h_\ell(T_1)} + T_1 \frac{c_\mathrm{liq} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}{h_g(T_1) - h_\ell(T_1)}}$$

$$\text{avec} \begin{cases} T_1 = 338{,}15\,\mathrm{K} \quad ; \quad h_g(T_1) = 2{,}6184 \times 10^3\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}} \quad ; \quad h_\ell(T_1) = 272{,}02 \times 10^3\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}} \\ T_2 = 378{,}15\,\mathrm{K} \quad ; \quad h_g(T_2) = 2{,}6834 \times 10^6\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}} \quad ; \quad h_\ell(T_2) = 4{,}4017 \times 10^5\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{x = 0{,}922}$

Il y a donc 92,2 % de vapeur. On remonte ainsi à v_E par le théorème des moments :

$$x = \frac{v_\mathrm{E} - v_\ell}{v_g - v_\ell}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_\mathrm{E} = v_\ell + x(v_g - v_\ell)}$$

A.N. : $\underline{v_\mathrm{E} = 5{,}72\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}}}$

◇

4 Calculer les transferts thermiques massiques échangés lors des transformations BCD et EA.

Réponse

Entre B et C, la transformation est isobare donc

$$\Delta \mathcal{H}_\mathrm{BC} = \mathcal{Q}_\mathrm{BC}$$

$$\Leftrightarrow \Delta \mathcal{H}_\mathrm{BC} = m c_\mathrm{liq}(T_2 - T_1)$$

$$\Leftrightarrow q_\mathrm{BC} = c_\mathrm{liq}(T_2 - T_1)$$

$\div m$

Entre C et D, on a aussi une transformation isobare, donc

$$\Delta h_\mathrm{CD} = q_\mathrm{CD}$$

$$\Leftrightarrow h_g(T_2) - h_\ell(T_2) = q_\mathrm{CD}$$

On somme

$$\Leftrightarrow \boxed{q_\mathrm{BCD} = c_\mathrm{liq}(T_2 - T_1) + \underbrace{h_g(T_2) - h_\ell(T_2)}_{\Delta h_\mathrm{vap}(T_2)}}$$

A.N. : $\underline{q_\mathrm{BCD} = 2{,}41\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}}$

Entre E et A,

$$\Delta h_\mathrm{EA} = q_\mathrm{EA} = h_\mathrm{A} - h_\mathrm{E}$$

$h_\mathrm{A} = h_\ell(T_1)$
$h_\mathrm{E} = x h_g(T_1) + (1 - x) h_\ell(T_2)$

$$\Leftrightarrow \boxed{q_\mathrm{EA} = x\,\underbrace{(h_\ell(T_1) - h_g(T_1))}_{\Delta h_\mathrm{liq}(T_1)}}$$

A.N. : $\underline{q_\mathrm{EA} = -2{,}16\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}}$

Remarque

On **reçoit** bien de la chaleur lors de la vaporisation, on en **cède** lors de la liquéfaction.

5 Déterminer le rendement du cycle. Application numérique.

Réponse

Cycle dans le sens horaire donc **moteur** :

$$\eta = -\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{Q}_C}$$

$$w = \frac{\mathcal{W}}{m} = -\frac{\mathcal{Q}_C + \mathcal{Q}_F}{m}$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{q_C + q_F}{q_C}$$

$$q_C = q_{\text{BCD}} = \frac{\mathcal{Q}_C}{m}$$
$$q_F = q_{\text{EA}} = \frac{\mathcal{Q}_F}{m}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\eta = 1 + \frac{q_{\text{EA}}}{q_{\text{BCD}}}}$$

A.N. : $\underline{\eta = 0{,}102} \approx 10\,\%$