

# Actions mécaniques du champ magnétique

« Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse. »

Pierre-Simon LAPLACE à NAPOLÉON, circa 1800

## Sommaire

<b>I La force de LAPLACE</b> . . . . .	<b>2</b>
I/A Observations expérimentales . . . . .	2
I/B Densité linéique de la force de LAPLACE . . . . .	2
I/C Expression intégrale de la force de LAPLACE . . . . .	3
<b>II Actions de LAPLACE en rotation</b> . . . . .	<b>3</b>
II/A Couple de LAPLACE . . . . .	3
II/B Aspect énergétique . . . . .	6

## Capacités exigibles

- Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme
- Établir et citer l'expression de la résultante des forces de LAPLACE dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire.
- Exprimer la puissance des forces de LAPLACE.
- Établir et exploiter l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique.
- Exprimer la puissance des actions mécaniques de LAPLACE.

## L'essentiel

### Propriétés

- I2.1 : Force de LAPLACE infinitésimale . . . . . 2
- I2.2 : Force de LAPLACE . . . . . 3
- I2.3 : Couple de LAPLACE . . . . . 3
- I2.4 : Énergie potentielle magnétique . . . . . 6

### Démonstrations

- I2.1 : Force infinitésimale de LAPLACE . . . . . 2
- I2.2 : Force de LAPLACE . . . . . 3
- I2.3 : Couple de LAPLACE . . . . . 4
- I2.4 : Énergie potentielle magnétique . . . . . 6

### Implications

- I2.1 : Puissance de la force de LAPLACE . . . . . 3
- I2.2 : Puissance du couple de LAPLACE . . . . . 5

### Applications

- I2.1 : Oscillations d'un aimant . . . . . 5
- I2.2 : Oscillations par énergie . . . . . 6

### Outils

- I2.1 : Dérivée vectorielle rotation . . . . . 6

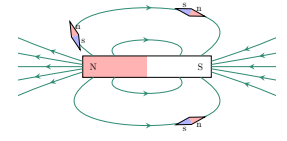
### Points importants

- I2.1 : Action d'un champ sur un aimant . . . . . 5

# I La force de LAPLACE

## I/A Observations expérimentales

Pour introduire la notion d'aimant et définir la boussole, nous avons dit qu'une petite aiguille aimantée s'alignait sur la direction du champ magnétique. Il y a donc une action mécanique entre aimant et champ. Une autre manifestation remarquable est celle des rails de LAPLACE :



### Expérience I2.1 : Rails de LAPLACE

On utilise un **aimant en U** pour créer un champ magnétique uniforme sur une assez grande partie d'un barreau métallique mobile, posé sur un bout de **circuit électrique**. Le **barreau** permet de **fermer le circuit**. On allume alors le courant (voir [cette vidéo](#)).

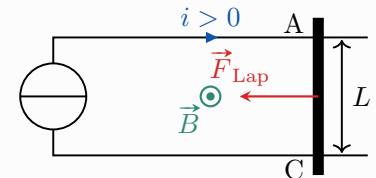


FIGURE I2.1

### Observation I2.1 : Rails de LAPLACE

- ◇ Lorsqu'on allume le courant, le barreau se met en mouvement **vers la gauche**.
- ◇ En retournant l'aimant **ou** le sens du courant, le mouvement **s'inverse**.
- ◇ En mettant  $\vec{B}$  dans le sens de la tige mobile, il n'y a pas de mouvement.

Cela suggère l'existence d'une **force** dépendant du **courant**, du **champ magnétique**, et de la **direction** du barreau.

## I/B Densité linéique de la force de LAPLACE

### ♥ Propriété I2.1 : Force de LAPLACE infinitésimale

Un élément de fil électrique de longueur  $d\ell$  parcouru par un courant  $i$  et plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  subit la force de LAPLACE :

$$d\vec{F}_{\text{LAPLACE}} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

avec  $d\vec{\ell}$  orienté **dans le sens du courant**.

### Rappel I2.1 : Force de LORENTZ

La force magnétique de LORENTZ subie par un électron de charge  $-e$  et de vitesse  $\vec{v}$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est donnée par :

$$\vec{F}_{\text{Lor}} = -e (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

### Démonstration I2.1 : Force infinitésimale de LAPLACE

#### Hypothèses

- ◇ Les électrons ont la **même vitesse moyenne**  $\vec{v} = v \vec{u}_x$ ;
- ◇ La **densité d'électrons**  $n$  (en  $\text{m}^{-3}$ ) est uniforme;
- ◇ Soit  $S$  sa section, constante, et  $d\ell$  sa longueur;
- ◇ On a donc  $dN = n S d\ell$  électrons dans cette section.

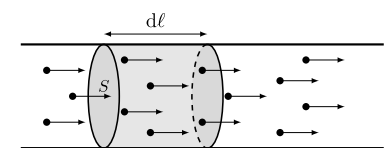


FIGURE I2.2

#### Calcul

$$d\vec{F}_{\text{Lap}} = dN \vec{F}_{\text{Lor}} = -e dN \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Or,  $i = \frac{dq}{dt} = -e \frac{dN}{dt} \Leftrightarrow -e dN = i dt$

Soit  $\vec{v} dt = \vec{OM}$   $\Leftrightarrow d\vec{F}_{\text{Lap}} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$

**I/C** Expression intégrale de la force de LAPLACE

**♥ Propriété I2.2 : Force de LAPLACE**

La force de LAPLACE sur une barre conductrice de longueur  $L$  traversée par un courant  $i$  et placée dans un champ magnétique **uniforme** et **stationnaire**  $\vec{B}$  :

- 1) s'applique **en son milieu** ;
- 2) s'exprime

$$\vec{F}_{\text{LAPLACE}} = i\vec{L} \wedge \vec{B}$$

avec  $\vec{L}$  dans le sens de  $i$ .

**Démonstration I2.2 : Force de LAPLACE**

On **intègre** sur la longueur :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{Lap}} &= \int_A^C d\vec{F}_{\text{Lap}} = \int_A^C i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{Lap}} &= i \left( \int_A^C d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{Lap}} &= i\vec{L} \wedge \vec{B} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \vec{B} \text{ uniforme}$$

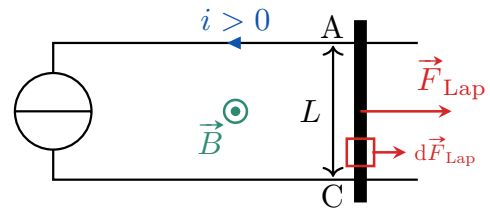


FIGURE I2.3 – Schéma rails.

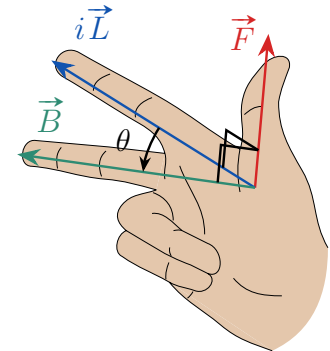
**Remarque I2.1 : Force de LAPLACE**

- 1) Elle respecte la règle de la main droite, version « trois doigts » :
  - ◇ la force sur le pouce (« le pouce pousse ») ;
  - ◇ l'intensité sur l'index ;
  - ◇ le champ magnétique sur le majeur.
- 2) On obtient alors la dimension de  $B$  en fonction des dimensions SI :

$$B = \frac{F}{li} \Leftrightarrow \dim(B) = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L \cdot I} = M \cdot T^{-2} \cdot I^{-1}$$

- 3) Pour un fil de 5 cm dans un champ de 0,1 T parcouru par une intensité de 1 A, on trouve :

$$\|\vec{F}_{\text{Lap}}\| = ilB = 5 \text{ mN}$$



**♥ Implication I2.1 : Puissance de la force de LAPLACE**

La puissance de la force de LAPLACE correspondante est :

$$\mathcal{P}_{L,v} \triangleq \vec{F}_{\text{Lap}} \cdot \vec{v} = (i\vec{L} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} \neq 0$$

Ainsi, alors que la force de magnétique de LORENTZ était de puissance nulle sur **1 électron**, ça n'est pas le cas de la force de LAPLACE qui s'applique sur un solide conducteur : dans ce cas, **un champ magnétique peut accélérer le système**.

**II** Actions de LAPLACE en rotation

**II/A** Couple de LAPLACE

**♥ Propriété I2.3 : Couple de LAPLACE**

Un **circuit** ou un **aimant** de moment magnétique  $\vec{\mu}$  plongé dans un champ **uniforme** et **stationnaire**  $\vec{B}$  subit un **couple magnétique**, issu du moment des forces de LAPLACE tel que :

$$\vec{\Gamma}_{\text{Lap}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

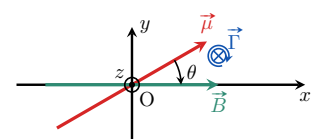
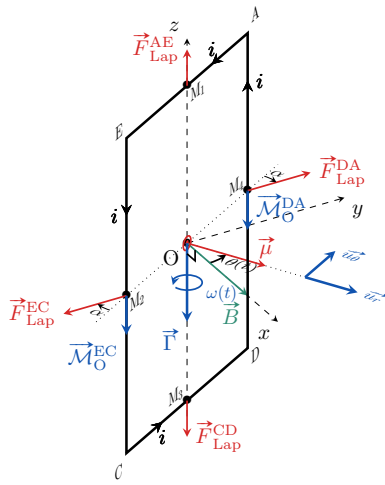


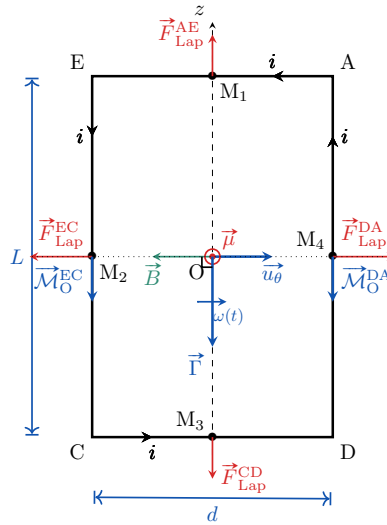
FIGURE I2.4

### ♥ Démonstration I2.3 : Couple de LAPLACE

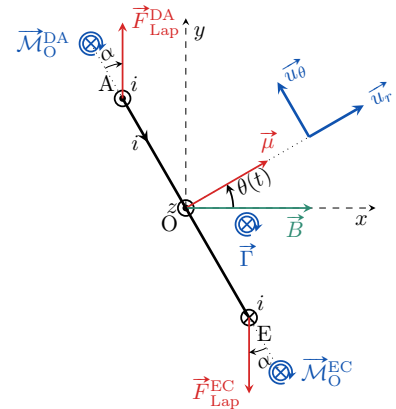
- ◇ Soit un cadre rectangulaire AECD parcouru par un courant  $i$  pouvant tourner autour de l'axe  $(Oz)$ .
- ◇ On impose un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{u}_x$ . On note  $\theta$  l'angle orienté entre  $\vec{B}$  et  $\vec{\mu} = i\vec{S}$ .
- ◇ On utilise un repère cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  avec  $\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{u}_y - \sin(\theta)\vec{u}_x$  et  $\vec{\mu} = iS\vec{u}_r$ .



Vue 3D



Vue de face



Vue du dessus

#### Résultante des forces

$$\vec{F}_{\text{Lap,tot}} = i \oint_c d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \quad \text{or, } \vec{B} \text{ uniforme donc } \vec{F}_{\text{Lap,tot}} = i \underbrace{\left( \oint_c d\vec{\ell} \right)}_{=\vec{0}} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

#### Moment des forces

- ◇ AE :

#### Force

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{AE}} &= i\vec{AE} \wedge \vec{B} = -id\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_x \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{AE}} &= -idB(-\cos(\theta)\vec{u}_z) \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{AE}} &= idB \cos(\theta)\vec{u}_z \end{aligned}$$

#### Moment

Elle s'applique en  $M_1 \in (Oz)$ , soit

$$\vec{M}_O(\vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{AE}}) = \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{AE}} = \vec{0}$$

- ◇ EC :

#### Force

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{EC}} &= i\vec{EC} \wedge \vec{B} \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{EC}} &= i(-L\vec{u}_z) \wedge B\vec{u}_x \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{EC}} &= -iLB\vec{u}_y \end{aligned}$$

#### Moment

$$\begin{aligned} \text{en } M_2 : \quad \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{EC}}) &= \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{EC}} = -\frac{d}{2}\vec{u}_\theta \wedge -iLB\vec{u}_y \\ \Leftrightarrow \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{EC}}) &= -iLB\frac{d}{2} \sin\theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

- ◇ CD : La force agissant sur le côté  $\overline{CD}$  s'applique en  $M_3$ , qui est sur l'axe de rotation, donc immédiatement :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{CD}}) = \vec{0}$$

- ◇ DA : De manière analogue au côté  $\overline{EC}$  (on vérifie avec la règle de la main droite) :

$$\text{Force } \vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{DA}} = iLB\vec{u}_y \text{ en } M_4$$

#### Moment

$$\vec{M}_O(\vec{F}_{\text{Lap}}^{\text{DA}}) = -iL\frac{d}{2}B \sin\theta \vec{u}_z$$

#### Couple des forces

En sommant tous ces moments, on trouve :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{\text{Lap}} &= \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{Lap},i}) \\ \Leftrightarrow \vec{\Gamma}_{\text{Lap}} &= -iLdB \sin\theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

Or,  $\vec{\mu} = iS\vec{u}_r$ , donc :

$$\begin{aligned} \vec{\mu} \wedge \vec{B} &= iS(\cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y) \wedge B\vec{u}_x \\ \Leftrightarrow \vec{\mu} \wedge \vec{B} &= -iSB \sin(\theta)\vec{u}_z \\ \Leftrightarrow \vec{\mu} \wedge \vec{B} &= -iLdB \sin(\theta)\vec{u}_z = \vec{\Gamma}_{\text{Lap}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

♥ **Implication I2.2 : Puissance du couple de LAPLACE**

D'où la puissance du couple de LAPLACE :

$$\mathcal{P}_{L,\omega} = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{\omega}$$

avec  $\vec{\omega}$  la vitesse angulaire de rotation.

Pour un circuit de vitesse de translation  $\vec{v}$  et de vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ , on aura

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} + \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{\omega}$$

**Application I2.1 : Oscillations d'un aimant**

- 1) Exprimer le couple de LAPLACE subit par  $\vec{\mu}$  en fonction de  $\theta$ .
- 2) En déduire les positions d'équilibre de  $\vec{\mu}$ .
- 3) Étudier la stabilité de ces positions d'équilibre à l'aide de 2 schémas.
- 4) Déterminer l'équation du mouvement de l'aimant et donner sa période autour de l'équilibre stable.

1)  $\vec{\mu} = \mu (\cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y)$  et  $\vec{B} = B\vec{u}_x \Rightarrow \vec{\Gamma} = -\mu_0 \sin(\theta) \vec{u}_z$

2)  $\vec{\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \sin \theta_{\text{eq}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_{\text{eq}} = 0 \\ \text{ou} \\ \theta_{\text{eq}} = \pi \end{cases}$

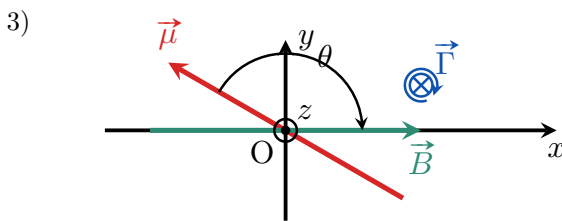


FIGURE I2.5

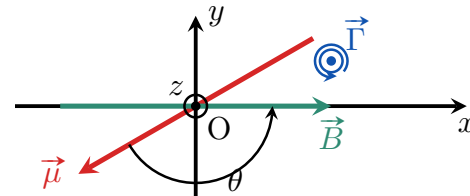


FIGURE I2.6

◇ En  $\theta_{\text{eq}} = \pi$ , une déviation vers le haut force une rotation en sens horaire et inversement vers le bas, qui écarte donc l'aimant de sa position d'équilibre : elle est **instable**.

◇ De même, en  $\theta_{\text{eq}} = 0$ , une petite déviation vers le haut donne un mouvement de rotation dans le sens horaire et inversement, le ramenant à sa position d'équilibre : elle est **stable**.

4)  $\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} \stackrel{\text{TMC}}{=} J\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_z = \Gamma \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\mu B}{J} \sin(\theta) = 0$

Pour  $\theta \approx 0 \Leftrightarrow \sin(\theta) \approx \theta$ ,  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$  avec  $\omega_0^2 = \frac{\mu B}{J} \Leftrightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mu B}}$

♥ **Important I2.1 : Action d'un champ sur un aimant**

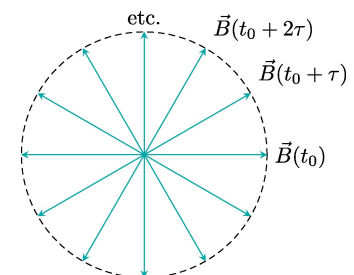
Du fait des petites vibrations (qui rendent la position  $\theta = \pi$  non durable) et des frottements qui arrêtent sa course, **un aimant tend à s'aligner sur le champ magnétique**, et ce d'autant plus vite que  $\vec{B}$  est intense.

Si un aimant a tendance à s'orienter sur un champ magnétique, on peut utiliser ce couple pour forcer la rotation continue d'un aimant grâce à un **champ tournant** : c'est le principe du **moteur synchrone**.

**Définition I2.1 : Champ magnétique tournant**

Un champ tournant est un champ de **norme constante**, mais dont la **direction tourne** à vitesse angulaire constante.

Par le couple de LAPLACE, un **aimant** soumis à ce champ tournera en régime stationnaire à la **même vitesse** angulaire  $\omega$ .



**Exemple I2.1 : Champ tournant**

Pour réaliser un champ tournant, on peut utiliser deux bobines identiques, de courants déphasés de  $\pi/2$  :

$$i_1(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad i_2(t) = I_0 \cos(\omega t - \pi/2) = I_0 \sin \omega t$$

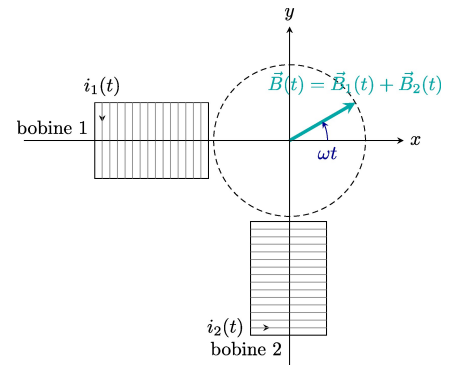
Ainsi, proche de l'axe des bobines on aura des champs

$$\vec{B}_1(t) = kI_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_2(t) = kI_0 \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

$$\text{Soit} \quad \boxed{\vec{B} = kI_0(\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y) = kI_0 \vec{u}_r}$$

qui est bien un champ tournant.

Il est également possible de faire un champ tournant à l'aide de trois bobines, décalées de  $2\pi/3$  : c'est ce qu'on appelle un courant **triphase**, et c'est ce qui est utilisé dans le transport d'électricité de manière industrielle.

**II/B Aspect énergétique****♥ Outils I2.1 : Dérivée vectorielle rotation**

Soit  $\vec{A}$  un vecteur uniforme en rotation autour d'un axe  $\vec{e}_z$  à vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$ ; alors :  $\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{A}}$

**Démonstration : Dérivée vectorielle rotation**

Soit, en toute généralité,  $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta$  un vecteur uniforme en coordonnées polaires. Alors :

**Dérivée explicite**

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= A_r \frac{d\vec{e}_r}{dt} + A_\theta \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} &= A_r \dot{\theta} \vec{e}_\theta - A_\theta \dot{\theta} \vec{e}_r \end{aligned}$$

**Produit vectoriel**

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \vec{A} &= \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge (A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta) \\ \Leftrightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{A} &= A_r \dot{\theta} \vec{e}_\theta - A_\theta \dot{\theta} \vec{e}_r = \frac{d\vec{A}}{dt} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**♥ Propriété I2.4 : Énergie potentielle magnétique**

Le couple de LAPLACE est **conservatif**, et s'associe à une énergie potentielle :  $\boxed{\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}}$

**Démonstration I2.4 : Énergie potentielle magnétique**

$$\begin{aligned} \delta W &\triangleq \mathcal{P}_{L,\omega} dt = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega} dt \\ \Leftrightarrow \delta W &= (\vec{\mu} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{\omega} dt \\ \Leftrightarrow \delta W &= \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \vec{\mu})}_{=\frac{d\vec{\mu}}{dt}} \cdot \vec{B} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Alternance du} \\ \text{produit mixte} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \delta W &= \frac{d\vec{\mu}}{dt} \cdot \vec{B} \\ \Leftrightarrow -d\mathcal{E}_p^{\text{mag}} &= d(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_p^{\text{mag}} &= -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Application I2.2 : Oscillations par énergie**

Retrouver les résultats de l'application I2.1 en utilisant l'énergie potentielle magnétique.

$$\text{On dérive } \mathcal{E}_p : \quad \mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos(\theta) \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_p^{\text{mag}}}{d\theta} = \mu B \sin(\theta) \Rightarrow \frac{d^2\mathcal{E}_p^{\text{mag}}}{d\theta^2} = \mu B \cos(\theta)$$

$$\text{Soit} \quad \left. \frac{d\mathcal{E}_p^{\text{mag}}}{d\theta} \right|_{\theta_{\text{eq}}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_{\text{eq}} = 0 \\ \text{ou} \\ \theta_{\text{eq}} = \pi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p^{\text{mag}}}{d\theta^2} \right|_{\theta_{\text{eq}}=0} = \mu B > 0 & \text{stable} \\ \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p^{\text{mag}}}{d\theta^2} \right|_{\theta_{\text{eq}}=\pi} = -\mu B < 0 & \text{instable} \end{cases} \quad \blacksquare$$

$$\text{De plus,} \quad \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - \mu B \cos(\theta) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow J \dot{\theta} \ddot{\theta} + \dot{\theta} \mu B \sin(\theta) = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta} \neq 0 \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\mu B}{J} \sin(\theta) = 0} \quad \blacksquare$$