

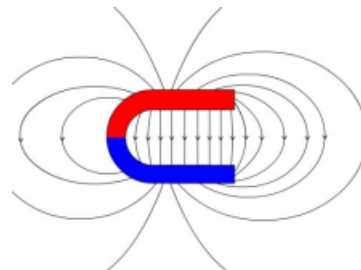
Correction du TD d'application



I Lectures de cartes

1 On donne ci-contre la carte de champ d'un aimant en U.

- 1) Donner l'emplacement des pôles, les zones de champ fort et faible.
- 2) Indiquer la zone où le champ est uniforme.
- 3) Préciser la direction du champ magnétique dans l'entrefer.
- 4) Donner deux autres moyens de créer un champ uniforme.



Réponse

Voir Figure I1.1. Les LdC sortent par le Nord, entrent par le Sud. Le champ est fort là où les LdC sont serrées, faible là où elles sont éloignées. Il est uniforme là où les LdC sont parallèles et régulièrement espacées. Dans l'entrefer (**dans le métal**), le champ va du Sud au Nord.

On peut créer des champs uniformes dans un solénoïde, et au milieu d'une bobine de HELMOLTZ, constituée de deux bobines plates de même rayon R et espacées de R , parcourues par la même intensité dans le même sens.

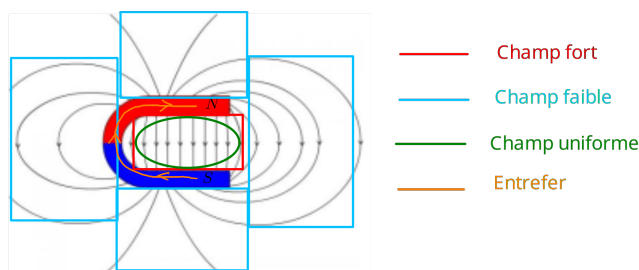
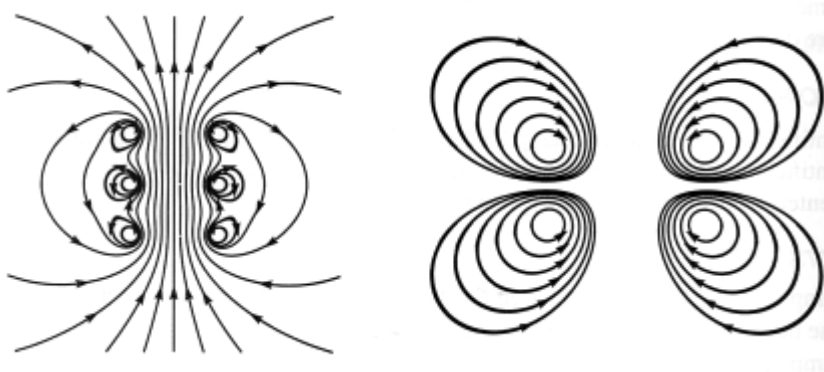


FIGURE I1.1 – Correction aimant en U.

2 Dans les cartes de champ magnétique suivantes, où le champ est-il le plus intense? Où sont placées les spires à l'origine de ces champs? Indiquer pour chacune le sens de parcours du courant.



Réponse

Voir Figure I1.2.

- ◇ Le champ est le plus intense là où les LdC sont très rapprochées, et faible là où il y a peu de LdC.
- ◇ Les LdC s'enroulent autour des sources, qui sont donc situées au niveau des points noirs de chaque figure. Il y en a six sur la figure de gauche, et 4 sur la figure de droite. Comme on nous indique que ce sont des spires, on a **3 spires** à gauche et **2 spires** à droite.
- ◇ Connaissant l'enroulement des LdC, le sens du courant dans les fils se déduit de la règle de la main droite (l'enroulement des doigts donne le sens des LdC, le pouce donne le sens du courant). Dans tous les cas, le courant est perpendiculaire au plan de la feuille.

Sur la carte de gauche, le courant sort du plan de la feuille \odot pour les 3 sources de gauche, et rentrent dans le plan de la feuille \otimes pour les 3 sources de droite.

Sur la carte de droite, le courant sort du plan de la feuille \odot en haut à droite et en bas à gauche, et rentre \otimes en haut à gauche et en bas à droite.

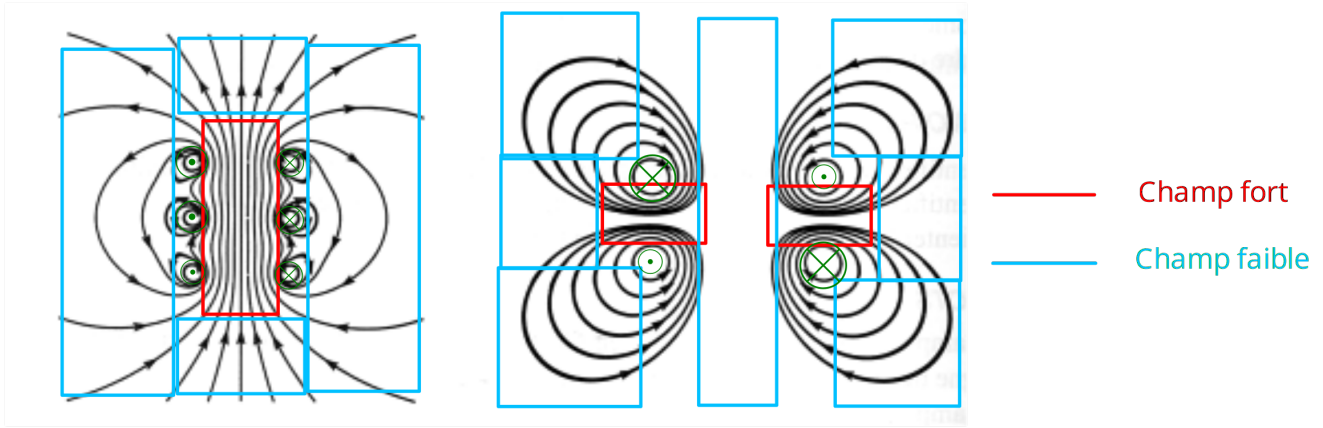


FIGURE II.2 – Correction cartes de champ.



II Aimantation d'un matériau

Matériau	Aimantation ($\text{kA}\cdot\text{m}^{-1}$)
AlNiCo 200	600
Ferrite 1000	1700
NdFeB	3000
SmCo 17	4000

Le tableau ci-contre indique les ordres de grandeur d'aimantation de plusieurs matériaux magnétiques permettant de fabriquer des aimants permanents. L'aimantation d'un matériau est définie comme le **moment magnétique volumique**, c'est-à-dire le moment magnétique d'un échantillon de ce matériau divisé par son volume.

- 1 Rappeler la dimension d'un moment magnétique, et vérifier l'unité de l'aimantation donnée dans le tableau.

Réponse

Le moment magnétique d'une spire plane d'aide S et parcourue par un courant I a pour norme $\|\vec{\mu}\| = SI$. On en déduit qu'un moment magnétique a une dimension $\text{I}\cdot\text{L}^2$. En divisant par un volume en L^3 , on obtient bien des $\text{I}\cdot\text{L}^{-1}$, c'est-à-dire des $\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$.



- 2 Les matériaux pour fabriquer des aimants permanents doivent-ils posséder une aimantation forte ou faible ?

Réponse

Un aimant est d'autant meilleur que son moment magnétique est élevé et son volume faible : un bon aimant doit donc être fait d'un matériau qui possède une **forte aimantation**.



- 3 Considérons un aimant cylindrique NdFeB (néodyme, fer, bore), d'épaisseur $e = 1$ mm et de rayon $R = 5$ mm. Calculer son moment magnétique.

Réponse

Pour une aimantation $M = 3,000 \times 10^6 \text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$, le moment magnétique de l'aimant en question vaut

$$\mu_{\text{aimant}} = M \times \pi R^2 e = 0,24 \text{ A}\cdot\text{m}^2$$



- 4 Combien de spires de même rayon R et parcourues par un courant d'intensité $I = 100$ mA faudrait-il bobiner pour obtenir le même moment magnétique ?

Réponse

Le moment magnétique d'un ensemble de N spires juxtaposées montées en série vaut $\mu_{\text{spires}} = NI\pi R^2$. Pour avoir le même moment que l'aimant précédent, on doit avoir

$$\mu_{\text{aimant}} = \mu_{\text{spires}} \Leftrightarrow M\pi R^2 e = NI\pi R^2 \quad \text{soit} \quad N = \frac{Me}{I} = 3,1 \times 10^4$$

c'est-à-dire 31 000 spires ! On retiendra qualitativement que le magnétisme de la matière est bien plus fort que le magnétisme des courants.



III Symétries et invariances

Dans chacune des situations suivantes, déterminer la forme générale du champ magnétique $\vec{B}(M)$ en un point M quelconque de l'espace par une étude des symétries et invariances. Pour cela, on suivra la méthode suivante :

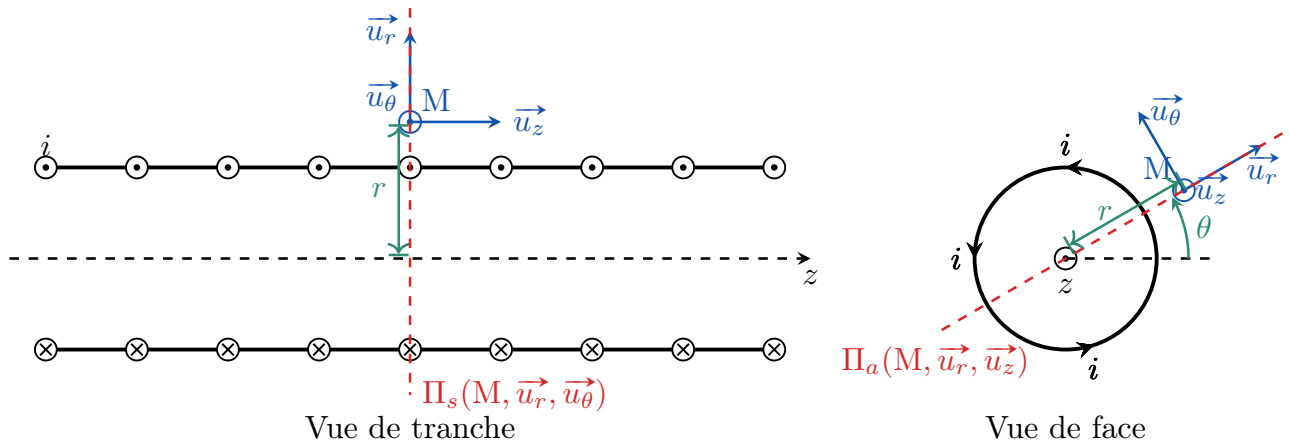
Méthode symétries et invariances

- Faire un schéma de la situation, choisir le système de coordonnées adapté et écrire la forme générale du champ magnétique $\vec{B}(M)$ en fonction des coordonnées choisies.
- Étudier les invariances de la distribution de courant, et en déduire les coordonnées dont dépend la norme du champ magnétique.
- Étudier les plans de symétrie et d'antisymétrie de la distribution de courant, et en déduire les composantes du champ magnétique. Pour cela :
 - ◇ Prendre un point M quelconque de l'espace.
 - ◇ Trouver un premier plan de la distribution de courant, et écrire la manière dont le champ magnétique se comporte par rapport à ce plan.
 - ◇ Barrer alors la ou les composantes nulle(s).
 - ◇ Recommencer pour chaque plan. À la fin, il ne reste qu'une composante (pour cet exercice).
- Combiner.

1 Une bobine longue infinie.

Réponse

a - On utilise des coordonnées cylindriques ; on a alors $\vec{B}(M) = B_r(M)\vec{u}_r + B_\theta(M)\vec{u}_\theta + B_z(M)\vec{u}_z$



- ◇ La distribution de courant est invariante par translation selon \vec{u}_z , donc $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de z : $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z)$.
 - ◇ La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe \vec{u}_z , donc $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de θ : $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta)$.
- ◇ $\Pi_a = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant ; le champ magnétique appartient à ce plan, donc sa composante selon \vec{u}_θ est nulle :

$$\vec{B}(M) = B_r(M)\vec{u}_r + B_\theta(M)\vec{u}_\theta + B_z(M)\vec{u}_z$$

- ◇ $\Pi_s = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant ; le champ magnétique est perpendiculaire par rapport à ce plan, donc ses composantes selon \vec{u}_r et \vec{u}_θ sont nulles :

$$\vec{B}(M) = B_r(M)\vec{u}_r + B_z(M)\vec{u}_z$$

Ainsi, le champ magnétique n'est porté que par \vec{u}_z :

$$\vec{B}(M) = B_z(M)\vec{u}_z$$

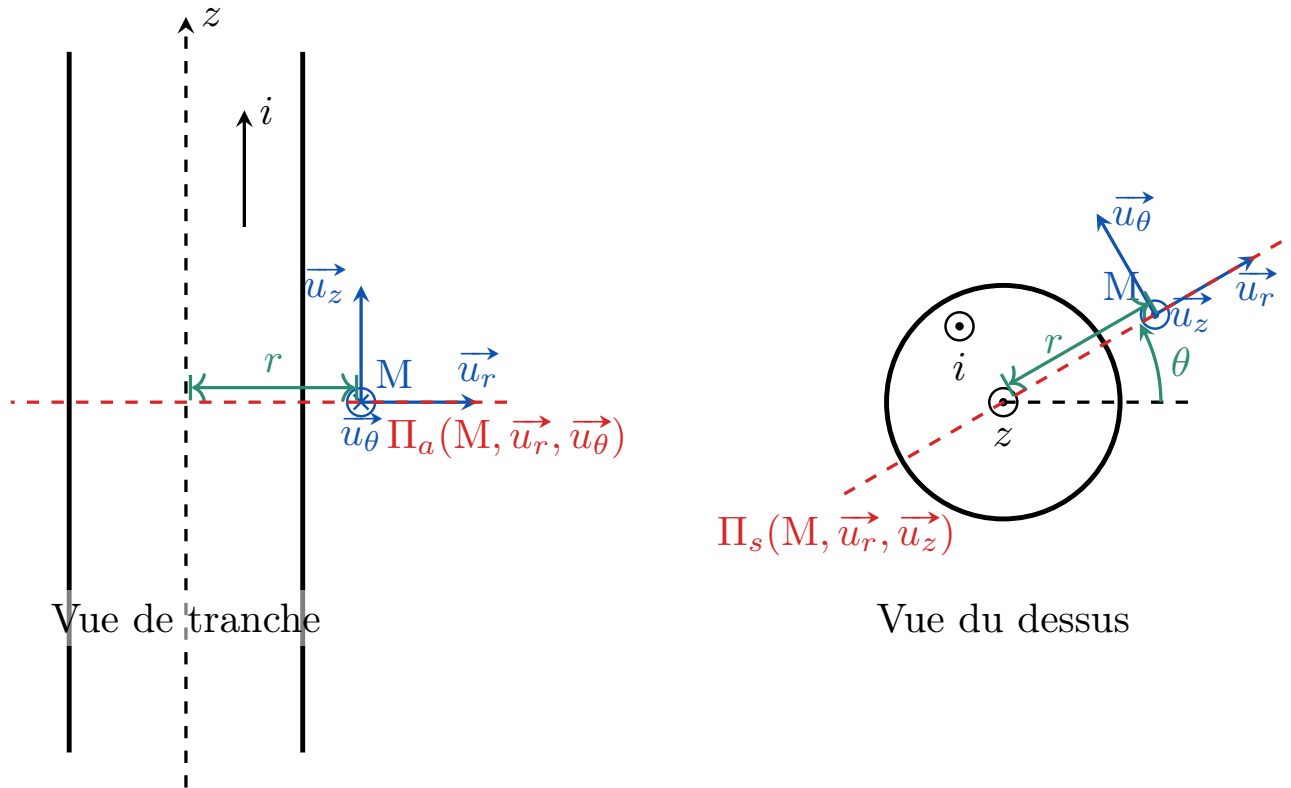
d - Ainsi

$$\vec{B}(M) = B_z(r)\vec{u}_z$$

- 2 Un câble cylindrique rectiligne de rayon R parcouru uniformément en volume par des courants colinéaires à l'axe du câble.

Réponse

a – On utilise des coordonnées cylindriques ; on a alors $\vec{B}(M) = B_r(M)\vec{u}_r + B_\theta(M)\vec{u}_\theta + B_z(M)\vec{u}_z$



- b – \diamond La distribution de courant est invariante par translation selon \vec{u}_z , donc $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de z : $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z)$.
- \diamond La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe \vec{u}_z , donc $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de θ : $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta)$.
- c – \diamond $\Pi_a = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant ; le champ magnétique appartient à ce plan, donc sa composante selon \vec{u}_z est nulle :

$$\vec{B}(M) = B_r(M)\vec{u}_r + B_\theta(M)\vec{u}_\theta + \underline{B_z(M)\vec{u}_z}$$

- \diamond $\Pi_s = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant ; le champ magnétique est perpendiculaire par rapport à ce plan, donc ses composantes selon \vec{u}_r et \vec{u}_z sont nulles :

$$\vec{B}(M) = \underline{B_r(M)\vec{u}_r} + B_\theta(M)\vec{u}_\theta$$

Ainsi, le champ magnétique n'est porté que par \vec{u}_θ :

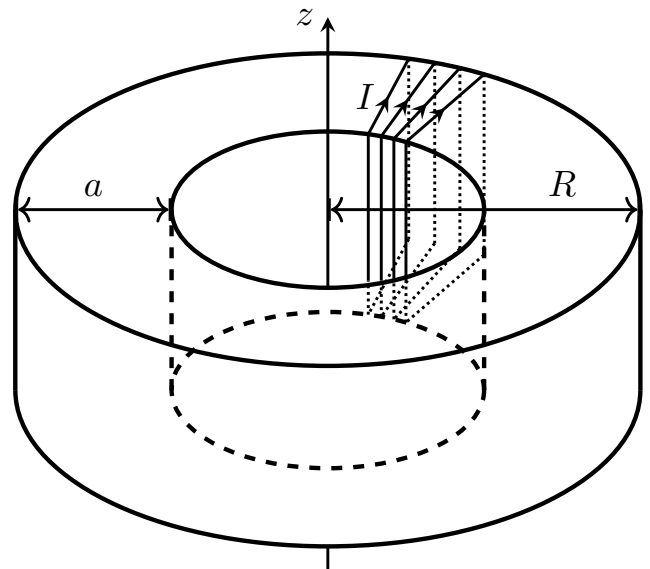
$$\vec{B}(M) = B_\theta(M)\vec{u}_\theta$$

d – Ainsi

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{u}_\theta$$

3

Une bobine torique, formée d'un enroulement de fil conducteur autour d'un solide, de section carrée et refermé sur lui-même.

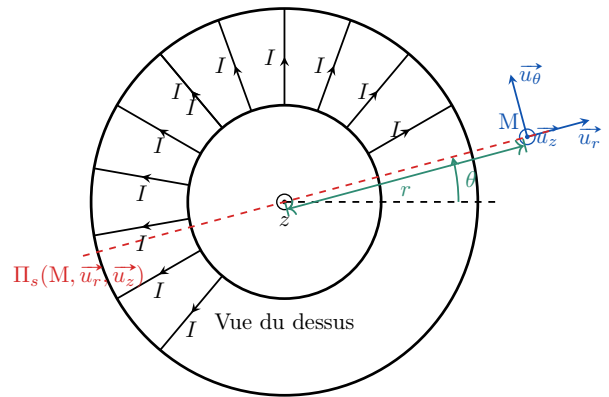


Réponse

a -

On utilise des coordonnées cylindriques ; on a alors

$$\vec{B}(M) = B_r(M)\vec{u}_r + B_\theta(M)\vec{u}_\theta + B_z(M)\vec{u}_z$$



b - \diamond La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe \vec{u}_z , donc $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de θ :
 $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z)$.

c - \diamond $\Pi_s = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant ; le champ magnétique est perpendiculaire par rapport à ce plan, donc ses composantes selon \vec{u}_r et \vec{u}_z sont nulles :

$$\vec{B}(M) = \underline{B_r(M)}\vec{u}_r + B_\theta(M)\vec{u}_\theta + \underline{B_z(M)}\vec{u}_z$$

Ainsi, le champ magnétique n'est porté que par \vec{u}_θ :

$$\vec{B}(M) = B_\theta(M)\vec{u}_\theta$$

d - Ainsi

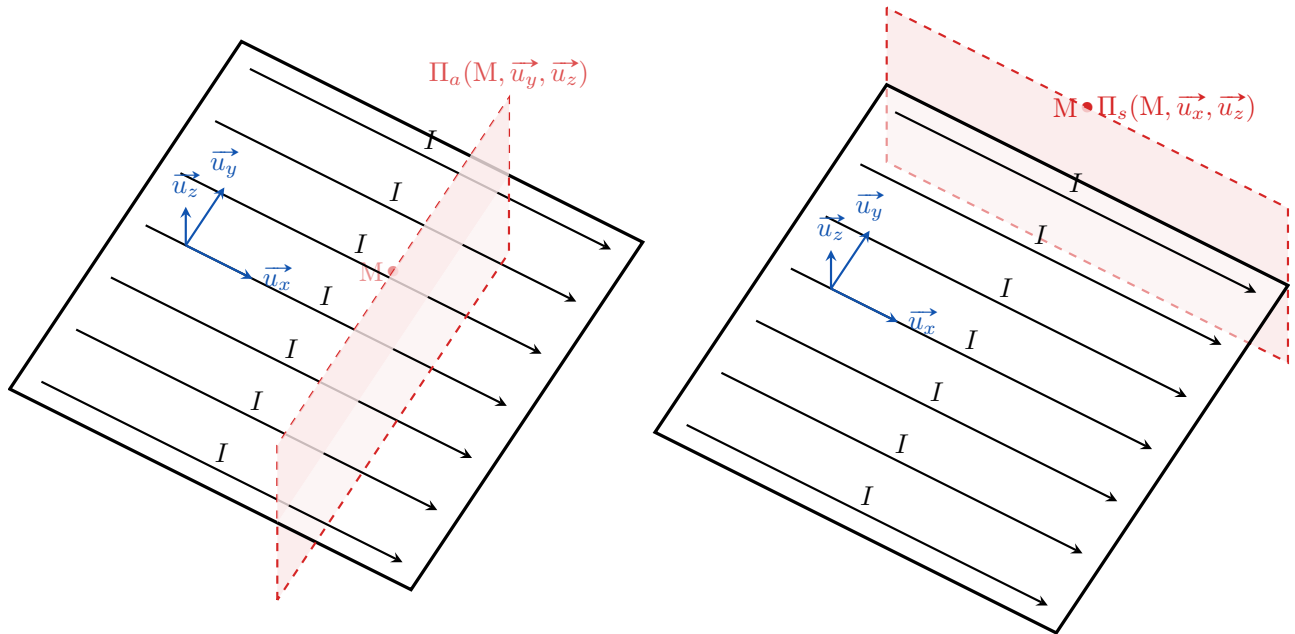
$$\vec{B}(M) = B_\theta(r, z)\vec{u}_\theta$$



4 Un plan infini (Oxy) parcouru par des courants de surfaces uniformes, portés par $+\vec{u}_x$. Comment sont les champs magnétiques en deux points symétriques par rapport au plan (Oxy) ?

Réponse

a - On utilise des coordonnées cartésiennes ; on a alors $\vec{B}(M) = B_x(M)\vec{u}_x + B_y(M)\vec{u}_y + B_z(M)\vec{u}_z$



- b – \diamond La distribution de courant est invariante par translation selon \vec{u}_x , donc $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de x : $\vec{B}(M) = \vec{B}(x, y, z)$.
- \diamond La distribution de courant est invariante par translation selon \vec{u}_y , donc $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de y : $\vec{B}(M) = \vec{B}(y, z)$.
- c – \diamond $\Pi_a = (M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant ; le champ magnétique appartient à ce plan, donc sa composante selon \vec{u}_x est nulle :

$$\vec{B}(M) = \underline{B_x(M)}\vec{u}_x + B_y(M)\vec{u}_y + B_z(M)\vec{u}_z$$

- \diamond $\Pi_s = (M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant ; le champ magnétique est perpendiculaire par rapport à ce plan, donc ses composantes selon \vec{u}_x et \vec{u}_z sont nulles :

$$\vec{B}(M) = B_y(M)\vec{u}_y + \underline{B_z(M)}\vec{u}_z$$

Ainsi, le champ magnétique n'est porté que par \vec{u}_y :

$$\vec{B}(M) = B_y(M)\vec{u}_y$$

d – Ainsi

$$\vec{B}(M) = B_y(z)\vec{u}_y$$

- e – Le plan spécifique (Oxy) est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique est antisymétrique par rapport à ce plan : ainsi, en deux points symétriques par rapport au plan (Oxy) , le champ magnétique est opposé :

$$\vec{B}(M) = -\vec{B}(M')$$

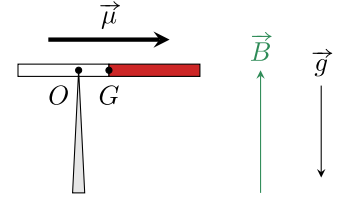


Correction du TD d'entraînement



I Équilibre d'un aimant

- 1 Un aimant très fin, de moment magnétique $\vec{\mu}$ et de masse m , repose en équilibre sur une pointe en O. Il est soumis à l'action d'un champ magnétique uniforme \vec{B} et au champ de pesanteur terrestre \vec{g} . On appelle G le centre d'inertie de l'aimant. Exprimer la distance $d = OG$ pour que l'aimant reste en équilibre horizontal.



Réponse

- ◇ **Système :** {aimant} de masse m de moment magnétique $\vec{\mu}$ dans un champ \vec{B} .
- ◇ **Schéma :**
- ◇ **Modélisation :**
 - ▷ Repère : cartésien, \vec{u}_y direction de \vec{B} soit $\vec{B} = B\vec{u}_y$, \vec{u}_x direction de $\vec{\mu}$ soit $\vec{\mu} = \mu\vec{u}_x$.
 - ▷ Instant initial : l'aimant est parallèle au sol.

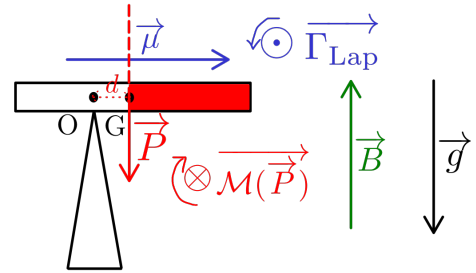


FIGURE I2.1 – Forces et moments sur l'aimant.

◇ **BdF :**

Poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$
Réaction du support passe par O

- ◇ **BdM :** On s'intéresse au moment des forces s'appliquant sur le système. On obtient directement le couple magnétique avec la formule démontrée dans le cours entre un moment magnétique $\vec{\mu}$ et un champ magnétique \vec{B} . Pour le poids, on utilise le bras de levier :
 - ▷ On prolonge la droite d'action, c'est-à-dire la flèche représentant le poids ;
 - ▷ On cherche le projeté orthogonal de l'axe de rotation sur cette droite d'action, en prenant une droite perpendiculaire à la droite d'action et en trouvant quand elle passe par l'axe ;
 - ▷ La distance obtenue correspond au **bras de levier**, qu'on appelle d ici.

On a alors

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = \pm d mg$$

avec \pm selon que le poids fasse tourner le système dans le sens direct (+) ou horaire (-). Ici, le poids a tendance à faire tourner le système dans le sens horaire, donc $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -d mg$.

Pour le couple magnétique, **un moment magnétique tend à s'aligner sur le champ magnétique**, donc ici tend à faire tourner l'aimant dans le sens direct pour s'aligner sur \vec{B} .

Pour la réaction du support, elle passe par O donc son moment est nul (pour rappel, mathématiquement $\mathcal{M}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$, donc si la force passe par l'axe de rotation on a un moment nul. Équivalent à avoir un bras de levier nul). Ainsi,

Moment du poids $\mathcal{M}(\vec{P}) = -d mg$
Moment de la réaction $\mathcal{M}(\vec{R}) = \vec{0}$
Couple magnétique $\Gamma_{z,\text{Lap}} = (\vec{\mu} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z$
 $\Leftrightarrow \Gamma_{z,\text{Lap}} = +\mu B$

◇ **TMC à l'équilibre :**

$$\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} = 0 = \sum_i \mathcal{M}_i$$

$$\Leftrightarrow 0 = \Gamma_{z,\text{Lap}} + \mathcal{M}_z(\vec{P})$$

$$\Leftrightarrow 0 = \mu B - dm g$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{\mu B}{mg}$$

II Mesure du champ magnétique terrestre

Dans un laboratoire situé à Paris, on souhaite déterminer la norme $\|\vec{B}_h\|$ de la composante horizontale locale \vec{B}_h (dont le sens et la direction sont donnés sur la Figure I2.2) grâce à un dispositif d'ERSTED (Figure I2.3). Ce dernier est constitué d'une aiguille aimantée libre de pivoter sans frottement sur son axe, fixé à un socle transparent et un fil de cuivre relié à deux bornes de sécurité fixées au même socle transparent, de courant admissible 5 A.

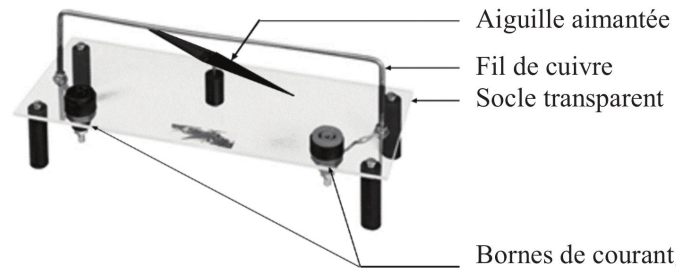
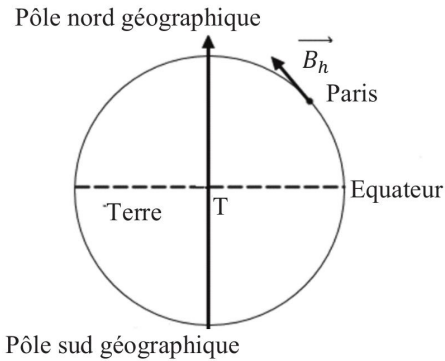


FIGURE I2.3 – Dispositif d'ERSTED

FIGURE I2.2 – Sens de la composante horizontale locale du champ magnétique terrestre à Paris.

Matériel

- ◇ un rapporteur ;
- ◇ une alimentation électrique stabilisée [0 ; 30] V/5 A ;
- ◇ des fils électriques ;
- ◇ un ampèremètre ;
- ◇ un interrupteur ;
- ◇ un teslamètre permettant la mesure de champs magnétiques entre [0,1 ; 100] mT.

Donnée

Le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant I s'exprime, dans un système de coordonnées cylindriques d'axe z orienté par le sens réel du courant, par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$. On admet que le champ créé par le fil du dispositif d'ERSTED est convenablement décrit par cette expression.

On souhaite établir un protocole permettant de mesurer la composante horizontale locale du champ magnétique terrestre à Paris en exploitant le principe de superposition des champs magnétiques.

- 1 Pour quelle raison ne peut-on pas se servir directement du teslamètre pour effectuer la mesure ?

Réponse

Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de $5 \times 10^{-5} \text{ T}$. Or, le teslamètre ne permet pas de mesurer des champs inférieurs à $1 \times 10^{-4} \text{ T}$.

- 2 On suppose que le fil est parcouru par un courant d'intensité $I = 1 \text{ A}$. Calculer la valeur du champ magnétique à $r = 2 \text{ cm}$ du fil.

Réponse

À partir de l'expression données, on trouve $B = 1 \times 10^{-5} \text{ T}$.

- 3 Décrire et schématiser l'expérience à réaliser en vous servant du matériel mis à votre disposition, exception faite du teslamètre.

Réponse

Placer le dispositif d'ERSTED selon une direction Nord-Sud, de telle sorte que l'aiguille soit parallèle au fil lorsqu'il

n'est parcouru par aucun courant. Relier le fil d'ERSTED à l'interrupteur et à l'alimentation stabilisée, de telle sorte qu'il puisse être alimenté par un courant constant. Placer le rapporteur de sorte à pouvoir mesurer la déviation de l'aiguille lorsque l'interrupteur est fermé, et inclure l'ampèremètre dans le circuit pour pouvoir mesurer l'intensité du courant. L'aiguille étant à une distance fixe du fil, on suppose que le champ créé est homogène. Le moment

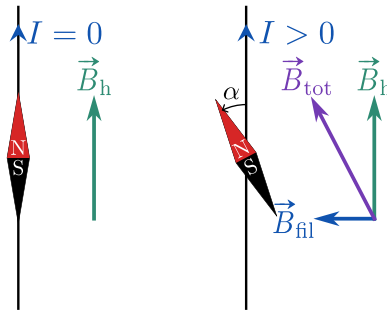


FIGURE I2.4 – Schéma de principe de l'expérience. Le sens de \vec{B}_{fil} est obtenu à partir de la règle de la main droite, en raisonnant en vue de dessus avec l'aiguille aimantée placée en-dessous du fil.

magnétique de l'aiguille va donc s'orienter sur ce champ, entrant en compétition avec le champ magnétique terrestre.

- 4 Préciser les mesures à réaliser, et la technique numérique à employer pour trouver la valeur.

Réponse

L'aiguille s'aligne sur le champ total, superposition du champ du fil et du champ terrestre. Le dispositif est monté de telle sorte que les deux champs soient orthogonaux, si bien qu'on peut relier directement

$$\tan \alpha = \frac{B_{\text{fil}}}{B_h}$$

En mesurant α pour différentes valeurs de I à partir desquelles on en déduit B_{fil} , on peut alors obtenir B_h par une régression linéaire. On peut par exemple représenter B_{fil} en fonction de $\tan \alpha$.

- 5 Donner un ordre de grandeur des grandeurs physiques à employer pour réaliser l'expérience.

Réponse

Compte-tenu de l'expression donnée et pour une aiguille située 2 cm sous le fil, il faudrait avoir $I = 5$ A pour que $B_{\text{fil}} = B_h$.



III Rails de LAPLACE inclinés

On reprend les rails de LAPLACE, mais en les inclinant : au lieu d'être horizontaux, ils forment un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale. Le champ magnétique est supposé stationnaire, uniforme, vertical dirigé vers le haut, de norme 150 mT. Le barreau mobile des rails de LAPLACE pèse 8,0 kg et est long de $\ell = 12$ cm. Les frottements sont négligés, de même que tout phénomène d'induction.

- 1 Faire un schéma du dispositif en représentant les différentes forces agissant sur le barreau mobile. Quel doit être le sens du courant dans le circuit pour que la force de LAPLACE retienne le barreau ?

Réponse

Le dispositif est représenté vu de côté et vu de dessus Figures I2.5 et I2.6. On prend les axes x et y dans le plan des rails, z perpendiculaire. Outre son poids et la force de LAPLACE, le barreau est également soumis à la réaction des rails, perpendiculaire aux rails car les frottements sont négligés.

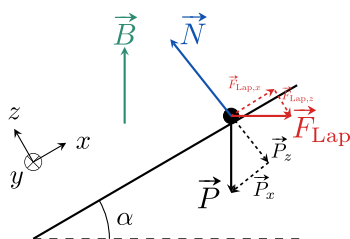


FIGURE I2.5 – Vue de côté.

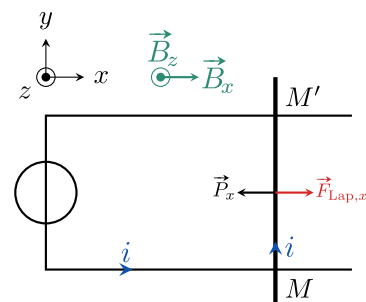


FIGURE I2.6 – Vue de dessus.

Pour que la force de LAPLACE puisse retenir le barreau mobile, il faut avoir vectoriellement $\vec{F}_L + \vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$. Sur \vec{u}_z on va trouver que la réaction compense \vec{P}_z et $\vec{F}_{L,z}$ les composantes sur \vec{u}_z du poids et de la force de LAPLACE, et sur \vec{u}_x on veut que $\vec{F}_{L,x}$ compense \vec{P}_x .

On cherche donc le sens de i qui va donner la force de LAPLACE avec une composante positive sur \vec{u}_x . Avec le sens indiqué sur le schéma, la force exercée sur le barreau MM' est

$$\vec{F}_L = i \overrightarrow{MM'} \wedge \vec{B}$$

et avec la règle de la main droite version 3 doigts, on trouve bien une force de LAPLACE vers la droite. Le courant doit donc effectivement être **dirigé de M à M'** pour retenir le barreau.



- 2 Déterminer l'intensité du courant permettant l'équilibre du barreau.

Réponse

Le poids du barreau mobile a pour norme mg , et la force de LAPLACE $i\ell B$. En projection sur \vec{u}_x , on trouve

$$i\ell B \cos(\alpha) = mg \sin(\alpha) \quad \text{soit} \quad i = \frac{mg \tan(\alpha)}{\ell B} = 2,5 \text{ A}$$



- 3 Partant de cette situation, on communique au barreau une vitesse initiale v_0 dirigée vers le haut. Déterminer son mouvement ultérieur.

Réponse

Si les frottements et l'induction sont négligés, alors le bilan des forces est exactement le même que précédemment : leur résultante est nulle. On garde donc le PFD à l'équilibre

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

mais cette fois $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$. On garde donc cette vitesse constante, et **le barreau aura un mouvement rectiligne uniforme vers le haut à la vitesse v_0** .



- 4 En raisonnant à partir de la loi de LENZ (chapitre suivant), indiquer qualitativement comment est modifiée la réponse à la question précédente lorsque l'on tient compte de l'induction.

Réponse

D'après la loi de LENZ, l'induction modère, par ses conséquences, les causes qui lui ont donné naissance.

Ici, c'est le mouvement du barreau parcouru par i et dans un champ \vec{B} qui causera l'induction, par modification de la surface du circuit (la surface qu'entoure l'intensité augmente). On aura donc *in fine* une force de LAPLACE induite qui s'opposera au mouvement du barreau, donc **le barreau va freiner jusqu'à son arrêt**, puisqu'alors la surface ne variera plus.

