

Analyse dimensionnelle et calcul numérique

Sommaire

I Système international	2
I/A Présentation	2
I/B Opérations sur les grandeurs	2
I/C Grandeurs dérivées	3
II Analyse dimensionnelle	3
II/A Rechercher des unités	4
II/B Détecter des erreurs	4
II/C Rechercher des lois physiques	4
III Calcul numérique	5
III/A Chiffres significatifs	5
III/B Présenter un résultat	6
III/C Calcul manuel	6

Capacités exigibles

☐ Conduire une analyse dimensionnelle.

L'essentiel

Définitions

- ☐ N2.1 : Grandeurs, dimensions, unités du SI . . . 2
- ☐ N2.2 : Grandeurs dérivées 3
- ☐ N2.3 : Ordre de grandeur 5

Propriétés

- ☐ N2.1 : Opérations 2

Outils

- ☐ N2.1 : Application numérique manuelle . . . 6

Points importants

- ☐ N2.1 : Homogénéité 3
- ☐ N2.2 : Règles de chiffres significatifs 5
- ☐ N2.3 : Règles d'application numérique 6

Applications

- ☐ N2.1 : Opérations 3
- ☐ N2.2 : Grandeurs dérivées 3
- ☐ N2.3 : Recherche d'unités 4
- ☐ N2.4 : Détecter des erreurs 4
- ☐ N2.5 : Recherche de loi 4
- ☐ N2.6 : Chiffres significatifs 5
- ☐ N2.7 : Changement d'unité 6
- ☐ N2.8 : Applications numériques manuelles . . 7

Erreurs communes

- ☐ N2.1 : Notations usuelles 2
- ☐ N2.2 : Limites implicites 4
- ☐ N2.3 : En pratique 5
- ☐ N2.4 : Notations de multiplication 6
- ☐ N2.5 : Mauvaises applications numériques . . 7

I Système international

I/A Présentation

En sciences physiques, il faut opérer la distinction entre :

- 1) **Le phénomène** : du domaine de la sensation (« il fait chaud ») ou de l'observation (« une lumière blanche traversant un prisme sort en arc-en-ciel ») ;
- 2) **La grandeur physico-chimique** : quantité mesurable (directement ou indirectement) et rendant compte du phénomène (par exemple, la température). Elle est représentée par un **symbole** (T dans le même exemple) qui intervient dans les équations mathématiques caractérisant le phénomène physique, et est caractérisée par sa **dimension** traduisant sa nature ;
- 3) **La valeur** de la grandeur : résultant d'une mesure et associée à une **unité** (K ou $^{\circ}C$) ; la valeur change selon l'unité utilisée et contient un certain nombre de **chiffres significatifs**.

Les grandeurs physiques sont **reliées** entre elles, soit par des **définitions** (surface d'un carré = carré d'un côté) soit par des **lois** physiques ($U = RI$ en électronique). Par souci de concision, il est pratique de **choisir des grandeurs de base** à partir desquelles nous exprimerons toutes les autres : en mécanique par exemple, nous utilisons la longueur, la masse et le temps. Ce choix n'est pas unique mais pratique.

À partir de grandeurs de base choisies, nous leur associons donc des unités « de base ». Le bureau international des poids et mesures (BIPM¹) a défini le **système international (SI)**, et se réunit tous les 4 ans pour discuter de leurs définitions et de leurs choix.

Définition N2.1 : Grandeurs, dimensions, unités du SI

Grandeur	Dimension	Unité	Symbole de l'unité
Longueur			
Masse			
Temps			
Intensité électrique			
Température			
Quantité de matière			
Intensité lumineuse			

Notation N2.1 : Notation

On utilisera $\dim(X)$ pour dénoter la dimension de X , et $[X]$ son unité. « USI » ou « SI » à la place d'une unité signifie que l'on exprime la grandeur dans les unités du système international ; par exemple $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ SI}$ à la place de $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ (ou même $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, cf. unités dérivées).

Attention N2.1 : Notations usuelles

Je me base sur le BIPM, mais la plupart des professeur-es et notamment au concours, $[X]$ est utilisé pour la dimension ! **Écrivez explicitement votre convention au début de la question pertinente.**

I/B Opérations sur les grandeurs

D'une manière générale, vous étudierez les dimensions de vos équations directement *via* les opérateurs qui la composent. Il faut donc savoir déduire les dimensions dans les cas suivants :

♥ Propriété N2.1 : Opérations

- 1) **Dérivation** :
- 2) **Intégration** :
- 3) **Fonction transcendantes²** :

1. <https://www.bipm.org/fr/measurement-units/>

2. Fonctions type exponentielle, logarithme, cosinus.

Application N2.1 : Opérations1) **Dérivation** :2) **Intégration** :3) **Fonctions transcendantes** :**I/C Grandeurs dérivées****♥ Définition N2.2 : Grandeurs dérivées**

Les grandeurs exprimées à partir des grandeurs de bases *via* des équations physiques sont appelées « grandeurs dérivées ». Leurs dimensions sont écrites sous la forme de produits de puissances des dimensions de base : d'une manière générique, une grandeur G a pour dimension

où les lettres grecques sont les **exposants dimensionnels**, qui peuvent être nuls. S'ils sont tous nuls, la grandeur est dite **adimensionnée**.

Application N2.2 : Grandeurs dérivées

Grandeurs dérivées	Équation utile	Dimension	Unités SI
Surface	$S =$	$\dim(S) =$	$[S] =$
Volume	$V =$	$\dim(V) =$	$[V] =$
Angle		$\dim(\alpha) =$	$[\alpha] =$
Vitesse	$\vec{v} =$	$\dim(v) =$	$[v] =$
Accélération	$\vec{a} =$	$\dim(a) =$	$[a] =$
Masse volumique	$\rho =$	$\dim(\rho) =$	$[\rho] =$
Force	$\vec{F} =$	$\dim(F) =$	$[F] =$
Énergie		$\dim(\mathcal{E}) =$	$[\mathcal{E}] =$
Charge électrique	$q =$	$\dim(q) =$	$[q] =$
Fréquence	$f =$	$\dim(f) =$	$[f] =$
Pulsation	$\omega =$	$\dim(\omega) =$	$[\omega] =$

Remarque N2.1 : Unités nommées

Certaines de ces unités dérivées portent des noms usuels : le newton N ($1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) pour la force, le coulomb C ($1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$) pour la charge électrique, ou l'énergie en joules J ($1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$) ; cf. F01.

II Analyse dimensionnelle

À l'aide de ces outils, nous pouvons effectuer des actions sur les équations-mêmes pour en extraire les dimensions. Pour qu'une équation mathématique ait un sens physique, elle doit suivre un principe fondamental et naturel : le **principe d'homogénéité**.

Important N2.1 : Homogénéité

Dans une équation ou dans l'expression d'une loi physique, les deux membres de chaque côté du signe égal doivent être de **même nature**³ et avoir la **même dimension**, quel que soit le système d'unités. Une telle formule est alors dite **homogène**.

♥ Corollaire N2.1 : Natures des équations

Il serait ainsi *barbare* d'égaliser un vecteur d'un côté avec un scalaire de l'autre, ou d'additionner ou soustraire des mètres à des secondes, etc.

3. Scalaire, vecteur, matrice, tenseur...

II/A



Application N2.3 : Recherche d'unités

La force de rappel élastique exercée par un ressort s'écrit

$$\vec{F}_{el} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$$

avec k la constante de raideur du ressort, et $\vec{u}_x$ un vecteur adimensionné. Quelle est la dimension de k ? son unité SI de base? Quelle serait une manière simple d'exprimer son unité avec une unité SI dérivée?

[illegible]

II/B



Application N2.4 : Détecter des erreurs

En résolvant un exercice, vous trouvez l'expression suivante pour l'énergie potentielle d'une masse m accrochée à un ressort vertical de raideur k et sous pesanteur g :

$$\mathcal{E}_p(z) = \frac{1}{2}kz^2 + mgz^2$$

avec z la hauteur de la masse. Cette expression est-elle homogène?

[illegible]

II/C



Application N2.5 : Recherche de loi

Donnez, par analyse dimensionnelle, la période T des oscillations d'un pendule simple.

A blank sheet of graph paper with a grid pattern. The grid consists of small squares formed by thin gray lines. A thicker vertical line runs down the center of the page, dividing it into two equal halves. There are also thicker horizontal lines near the top and bottom edges, creating margins. The overall appearance is that of a standard piece of graph paper used for mathematics or science.

♥ Attention N2.2 : Limites implicites

Une loi trouvée par analyse dimensionnelle ne saurait permettre de donner les bons termes multiplicatifs!

III Calcul numérique

III/A Chiffres significatifs

Rappel N2.1 : Chiffres significatifs

Le nombre de chiffres significatifs correspond au nombre de chiffres utilisés, sans prendre en compte les zéros par lequel commence le nombre étudié : 0,0123 a 3 chiffres significatifs, 1,00 également.

L'écriture d'un nombre est porteuse de sens en sciences : **plus il y a de chiffres significatifs, plus la valeur est précise**. Or, la précision est limitée par de nombreux facteurs (cf. chapitre N3). Il faut donc donner un **nombre cohérent de chiffres significatifs**, et ne pas en inventer. On utilisera pour cela la notation scientifique, qui permet de ne garder que les chiffres significatifs et d'indiquer l'ordre de grandeur *via* des puissances de 10.

Important N2.2 : Règles de chiffres significatifs

- 1) Pour la **division et la multiplication**, le résultat doit avoir le même nombre de chiffres significatifs que la valeur ayant le **moins de chiffres significatifs**.

Exemple : $2,20 \times 1,6 = 3,5$

- 2) Pour l'**addition et la soustraction à virgule**, le résultat doit avoir le **plus petit nombre de chiffres après la virgule** parmi les valeurs utilisées.

Exemple : $1,25 + 0,022 = 1,27$

- 3) À la fin d'un calcul, on arrondit le dernier chiffre significatif au chiffre supérieur si le suivant est **supérieur ou égal à 5**.

Exemple : $1,25 + 0,025 = 1,28$

- 4) Les « vrais » nombres entiers sont considérés comme ayant une précision infinie, on ne prend pas en compte leurs chiffres significatifs.

Exemple : charge du noyau d'hélium avec 2 protons : $Q = 2 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} = 3,2 \times 10^{-19} \text{ C}$

Application N2.6 : Chiffres significatifs

Expression	Résultat
$3,4 + 3,5$	
$3,4 - 3,5$	
2×30 avec 2 entier	
2×30 avec 2 mesuré	

Expression	Résultat
$3,00 \times 10^3 \times 2,8888 \times 10^3$	
$3,00 \times 10^3 + 2,8888 \times 10^3$	
$3,00 \times 10^3 + 0,000\,000\,1$	
$3,00 \times 10^3 + 2,8888 \times 10^{-2}$	

Attention N2.3 : En pratique

Il faut **suivre les demandes explicites** des énoncés dans les concours s'il est fait mention spécifiquement d'utiliser 1 ou 2 chiffres significatifs par exemple.

Il arrive cependant que des énoncés donnent valeurs numériques avec un seul chiffre significatif, ce qui rendrait l'application trop imprécise : il faut savoir faire preuve de souplesse !

Exemple N2.1 : Souplesse sur chiffres significatifs

- 1) Une boîte mesure $\ell = 11 \text{ cm}$ par $L = 10 \text{ cm}$ par $h = 9 \text{ cm}$. Son volume est donc de $V = \ell L h = 990 \text{ cm}^3 = 1 \times 10^3 \text{ cm}^3$. Ça ne pose pas de problème car l'erreur relative n'est que de $\frac{10}{990} = 1\%$.
- 2) Un cube de côté $a = 5 \text{ cm}$ a pour volume $V = a^3 = 125 \text{ cm}^3$. Avec 1 chiffre significatif, on aurait $V = 1 \times 10^2 \text{ cm}^3$, ce qui est une erreur relative de $\frac{25}{125} = 20\%$: il faut donc garder 2 chiffres significatifs : $V = 1,3 \times 10^2 \text{ cm}^3$.

Définition N2.3 : Ordre de grandeur

On demande parfois, ou il est utile même sans demande explicite, d'avoir un ordre de grandeur d'une valeur numérique. Cela correspond à la **puissance de dix la plus proche**. Par exemple, $c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, donc en ordre de grandeur, $c \approx 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. L'intérêt est de vérifier rapidement la cohérence physique d'une valeur numérique, et de pouvoir la comparer à d'autres valeurs.

III/B Présenter un résultat

Un objectif récurrent des sujets de physique-chimie est d'obtenir la **valeur numérique** d'une grandeur physico-chimique. Elle découle alors d'une équation, forcément homogène, mais doit également être calculée avec les bonnes unités au sein des dimensions. Ainsi, **tout résultat numérique** devra être rédigé sous la forme suivante :

Important N2.3 : Règles d'application numérique

littéral

$$n = \frac{PV}{RT}$$

avec

données + conversion

$$\begin{cases} p = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \\ T = 300 \text{ K} \end{cases}$$

A.N. : $n = \frac{1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \times 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{8,314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \times 300 \text{ K}}$

$\Leftrightarrow n \approx \frac{1,0 \times 10^2 \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{m}^3}{25 \times 10^2 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}} \approx \frac{1}{25} \text{ mol}$

$\Leftrightarrow \underbrace{n \approx 0,040 \text{ mol}}_{\text{numérique}}$

Encadrer littéral

Encadrer implique d'avoir vérifié :

- 1) La cohérence mathématique ;
- 2) L'homogénéité de la formule proposée.

Souligner numérique

Souligner implique d'avoir vérifié :

- 1) La cohérence physique de la grandeur ;
- 2) Les chiffres significatifs à utiliser.

Attention N2.4 : Notations de multiplication

Pour éviter la confusion entre les $\times$ et des lettres de grandeurs comme x , X voire α , on utilise soit **rien** pour un produit simple, (PV) soit $\cdot$ pour un produit scalaire $(\vec{v} \cdot \vec{u})$. En revanche, il **faut** utiliser $\times$ pour la multiplication entre nombres.

♥ Astuce : effectuer un changement d'unités

Il est très commun de se tromper d'unité lors d'une conversion, et ce pour deux raisons : à cause d'une unité mise à une puissance, ou à cause d'un rapport de deux grandeurs. Il faut appliquer le processus suivant :

- 1) Écrire la valeur numérique actuelle de la grandeur avec son unité sous forme de **fraction explicite** ;
- 2) Convertir les unités concernées **en y mettant des parenthèses** pour les puissances ;
- 3) Recondenser le calcul.

Application N2.7 : Changement d'unité

III/C Calcul manuel

Outils N2.1 : Application numérique manuelle

- ◇ Connaître les unités, savoir les manipuler et les faire apparaître dans les calculs. Notamment,

$$[\mathcal{W}] = [\mathcal{E}] = \text{J} \quad (= \text{N}\cdot\text{m} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2})$$

c'est-à-dire, ne répondez pas qu'une énergie vaut 1000 newtons-mètres, mais plutôt 1000 joules : cf. F01.

- ◇ Savoir faire des divisions euclidiennes, mais également connaître des approximations numériques pour faire des calculs à la main, notamment tous les $\frac{1}{n}$ et $\sqrt{n}$, $n \in \llbracket 2; 9 \rrbracket$:

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{3} \approx 0,33$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{5} = 0,20$	$\frac{1}{6} \approx 0,17$	$\frac{1}{7} \approx 0,14$	$\frac{1}{8} = 0,125$	$\frac{1}{9} \approx 0,11$
$\sqrt{n}$	$\sqrt{2} \approx 1,41$	$\sqrt{3} \approx 1,73$	$\sqrt{4} \approx 2$	$\sqrt{5} \approx 2,23$	$\sqrt{6} \approx 2,45$	$\sqrt{7} \approx 2,64$	$\sqrt{8} \approx 2,83$	$\sqrt{9} \approx 3$

Attention N2.5 : Mauvaises applications numériques

- ◇ Calcul littéral non fini : $\frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}}$ avec $\begin{cases} \overline{OA'} = 15 \text{ cm} \\ \overline{OA} = 1 \text{ m} = 1 \times 10^2 \text{ cm} \end{cases}$
 A.N. : $\overline{OF'} = 17 \text{ cm}$
- ◇ Conversion non faite : $n = \frac{PV}{RT}$ A.N. : $n = \frac{1,0 \text{ bar} \times 1,0 \text{ L}}{8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 28^\circ \text{C}}$
- ◇ Manque d'unités sur l'AN : $n = \frac{10^5 \times 1}{8,31 \times 300} = 0,56$
- ◇ Grandeur non écrite : $n = \frac{PV}{RT}$ avec $\begin{cases} p = 1,0 \text{ bar} = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \text{ L} = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ T = 28^\circ \text{C} = 300 \text{ K} \end{cases}$
 A.N. : $0,040 \text{ mol}$
- ◇ Mauvais chiffres signif. : $n = \frac{PV}{RT}$ avec $\begin{cases} p = 1,0 \text{ bar} = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \text{ L} = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ T = 28^\circ \text{C} = 300 \text{ K} \end{cases}$
 A.N. : $n \approx 0,040093 \text{ mol}$

Application N2.8 : Applications numériques manuelles

- Donner l'ordre de grandeur du moment $\mathcal{M}_\Delta = dF$ pour $d = 80 \text{ cm}$ et $F = 120 \text{ N}$.
- Calculer la valeur de l'angle $\theta = \frac{\lambda}{a}$ pour $\lambda = 600 \text{ nm}$ et $a = 0,5 \text{ mm}$.
- On considère $n = 10 \text{ mol}$ de gaz parfait d'équation d'état $PV = nRT$. Calculer le volume V occupé pour $T = 28^\circ \text{C}$, $P = 1 \text{ bar}$ et $R = 8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, d'abord en m^3 puis en L.
 On rappelle que $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ et $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- Calculer le travail du poids $\mathcal{W}_{AB}(\vec{P}) = mg(H - h)$ sur un corps de masse $m = 50 \times 10^3 \text{ g}$, passant de l'altitude $H = 21,0 \text{ m}$ à $h = 1,0 \text{ m}$, avec $g = 10 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.
- Calculer le rapport $\frac{a}{v} = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \Omega^2}$, avec $\tau = 2,5 \text{ s}$ et $\Omega = 18 \text{ rad} \cdot \text{min}^{-1}$.
- La vitesse limite de la chute dans un fluide viscosité η s'écrit $v_l = \frac{\rho g D^2}{18\eta}$. Trouve la dimension de η puis son unité SI de base d'abord, puis son unité à l'aide des pascals Pa ensuite, avant d'effectuer l'application numérique. On donne $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $D = 10 \mu\text{m}$, et $\eta = 2 \times 10^{-5} \text{ SI}$. Vous donnerez la réponse en $\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Calculer l'ordre de grandeur de $\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_e L^2}$ en électrons-volts eV, sachant que $m_e \approx 10^{-30} \text{ kg}$, $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 3,3 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $L = 0,6 \times 10^{-9} \text{ nm}$ et $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

