

CINÉMATIQUE DU SOLIDE

PARTIE 1 : MODÉLISATION ET GÉOMÉTRIE DES MÉCANISMES

COURS

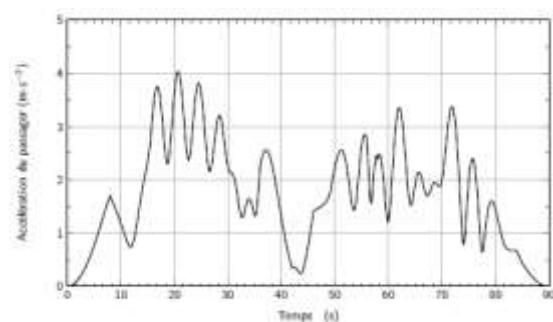
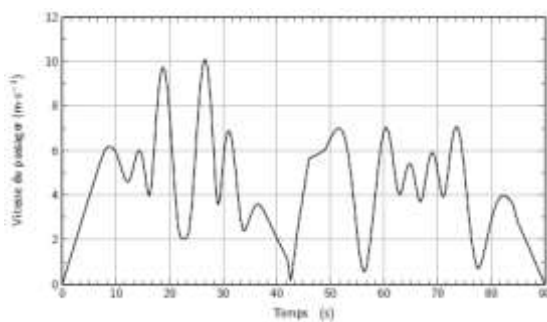
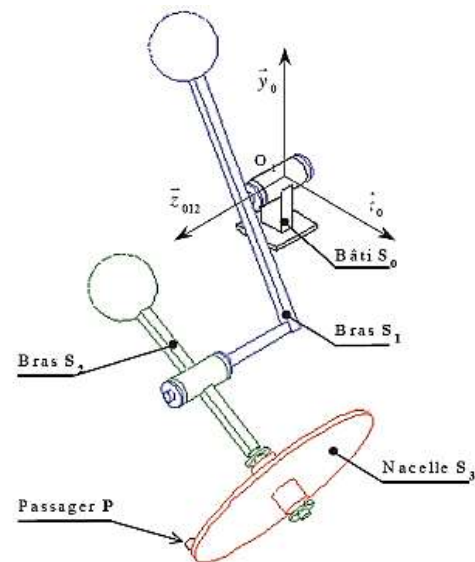
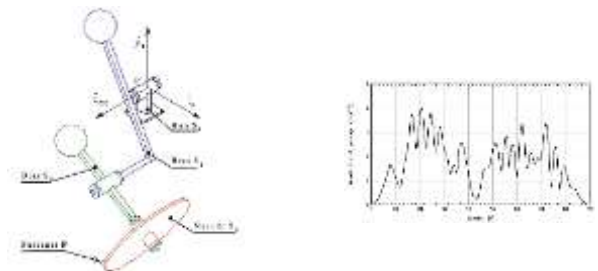


Table des matières

1. PRÉAMBULE	3
2. HYPOTHESES - DEFINITIONS	3
2.1. Notion de solide indéformable	3
2.2. Degrés de liberté autorisés par un contact.....	4
2.2.1. Les deux types de mouvement	4
2.2.2. Les degrés de liberté	6
2.3. Les types de contact.....	7
2.4. Liaisons normalisées	8
3. MODELISATION CINEMATIQUE D'UN MECANISME.....	11
3.1. Classes d'équivalence (ou groupe cinématiquement équivalent).....	11
3.2. Graphe des liaisons (ou graphe de structure).....	13
3.2.1. Définition et exemple.....	13
3.2.2. Les trois types de chaînes de solide	14
4. REPRESENTATION D'UN MODÈLE : LE SCHÉMA CINÉMATIQUE.....	14
4.1. Définition	14
4.2. Exemple	14
5. MOUVEMENT PLAN SUR PLAN – MÉCANISME PLAN.....	15
6. ANALYSE GEOMETRIQUE D'UN MECANISME – LOI ENTRÉE SORTIE.....	16
6.1. Construction géométrique.....	16
6.2. Paramétrage	17
6.3. Définition de la loi entrée-sortie géométrique d'un mécanisme	18
6.4. Calcul de la loi entrée-sortie géométrique d'un mécanisme – Méthode	18
6.5. Lois entrée-sortie particulières : engrenages et vis/écrou.....	21

Illustration 1^{ère} de couverture

L'attraction foraine « Magic Arms » permet de procurer de fortes sensations à un public averti. Son modèle cinématique suivi d'une étude analytique, puis numérique permet de tracer les vitesses et accélérations subies par le passager (courbes).



1. PRÉAMBULE – NOTION DE MODÈLE

Notion de modèle : un modèle est une abstraction simplifiée de la réalité qui lui ressemble suffisamment pour pouvoir l'étudier.

Toute démarche scientifique est liée à la démarche de modélisation... quel que soit le domaine scientifique (physique, chimie, sciences de l'ingénieur, mais aussi les sciences humaines, économiques...). La démarche de modélisation utilise très souvent la représentation mathématique.

La complexité d'un mécanisme nécessite une modélisation. Un mécanisme c'est avant tout du mouvement entre pièces. Les surfaces de contact entre pièces autorisent ou interdisent ces mouvements. L'outil mathématique utilisé dans le présent cours va donc être en partie géométrique, en plus d'être calculatoire.

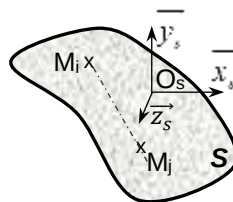
Le solide indéformable est un modèle sur lequel on va s'appuyer pour différentes études : cinématique, statique, dynamique.

2. HYPOTHESES - DEFINITIONS

2.1. Notion de solide indéformable

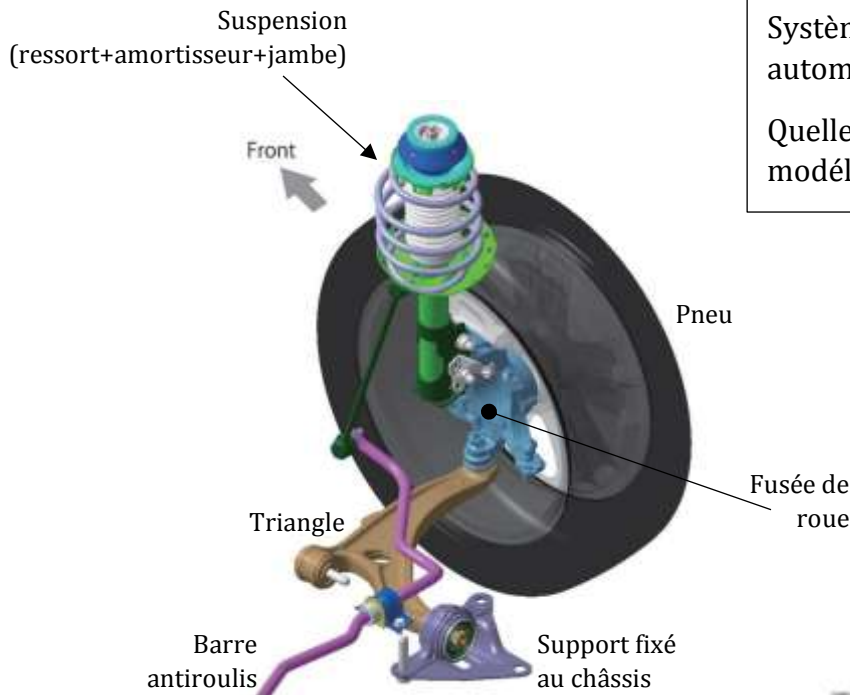
Un solide indéformable (S) est un ensemble de points matériels $\{M_i\}$, dont les distances relatives sont constantes dans le temps : $M_i M_j = \text{constante}$.

Si un repère $R_s(O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ est lié au solide, on peut définir le solide indéformable de la manière suivante : $\left[\frac{d\vec{M_i M_j}}{dt} \right]_{B_s} = \vec{0}$, où $B_s(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ est la base du repère R_s attaché au solide (S).



Remarque 1 : Le solide indéformable est un modèle c'est-à-dire une représentation simplifiée du réel. En fait, les solides se déforment à cœur quand ils subissent des efforts, et en surface au contact d'autres solides à cause de la pression de contact. Ces deux types de déformations ne sont donc pas considérés en mécanique du solide indéformable.

Remarque 2 : En revanche, il ne serait pas pertinent d'appliquer le modèle du solide indéformable à certains solides dont l'objectif est de se déformer (ressort par exemple).



Système de suspension de roue avant automobile (type Mac Pherson) :

Quelles pièces peut-on raisonnablement modéliser par des solides indéformables ?

2.2. Degrés de liberté autorisés par un contact

2.2.1. Les deux types de mouvement

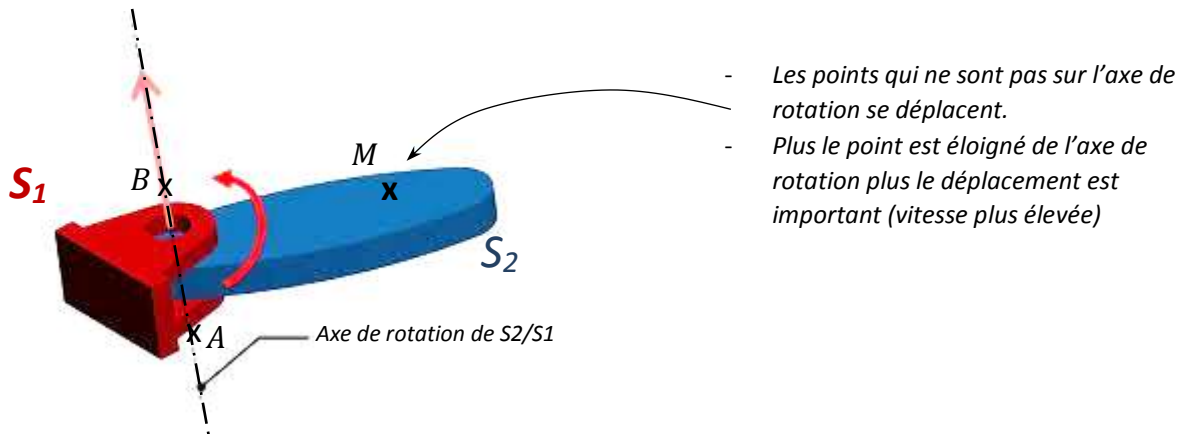
2.2.1.1. Mouvement de rotation d'un solide S_1 par rapport à un solide S_2

Un solide S_1 est en rotation par rapport à un solide S_2 , si au moins deux points de S_2 , A et B ne se déplacent pas par rapport à S_1 . Ceci implique que l'ensemble des points de la droite (AB) de S_2 sont fixes par rapport à S_1 . La droite (AB) est appelée axe de rotation de S_2/S_1 .

☞ On parle de rotation de S_2/S_1 d'axe (AB).

Exemples : roue de vélo/cadre, porte/mur, guidon de moto/cadre

Illustration du mouvement de rotation



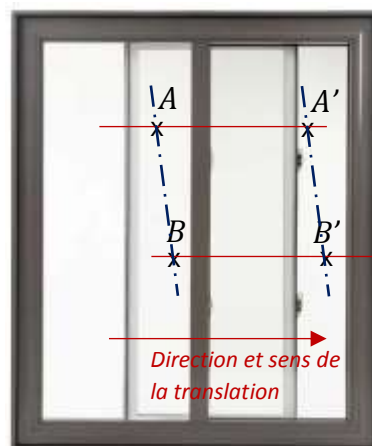
2.2.1.2. Mouvement de translation d'un solide S1 par rapport à un solide S2

Un solide S1 est en translation par rapport à un solide S2 si pour deux points A et B de S2, l'image (A'B') de (AB) au cours du mouvement est telle que (A'B') // (AB). On dit grossièrement que le solide S2 reste parallèle à lui-même au cours du mouvement par rapport à S1. Contrairement au mouvement de rotation aucun point n'est fixe.

Exemples : tiroir/meuble, fenêtre coulissante/mur, tiroir CD/châssis, etc.

☞ On parle de translation de S2/S1 de **direction** (AA').

Illustration de la translation



- Tous les points se déplacent
- La distance de déplacement est identique pour tous les points
- $A'B' \parallel AB \parallel A''B'' \dots$
- $AA' =$ direction de la translation

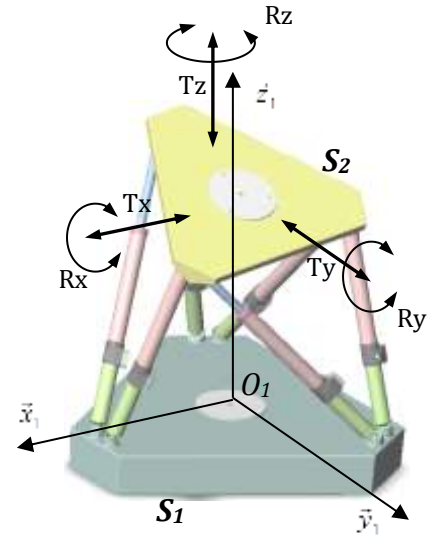
2.2.2. Les degrés de liberté

On attache aux solides S_1 et S_2 des repères orthonormés R_1 et R_2 .

Définition : Soient deux solides S_1 et S_2 . Les degrés de libertés sont les mouvements relatifs **indépendants** possibles de S_1 par rapport à S_2 . Les six degrés de libertés sont :

- 3 **rotations** R_x, R_y, R_z , autour d'axes parallèles aux vecteurs du repère R_1
- 3 **translations** T_x, T_y, T_z selon les directions des axes du repère R_1 .

Le nombre de degrés de liberté possibles entre deux solides est donc 0 au minimum (encastrement), 6 au maximum (liaison « libre » = une non liaison quoi !).

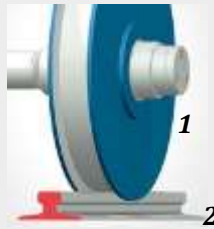


On peut les lister dans un tableau comme cela :

$$\begin{bmatrix} R_x & T_x \\ R_y & T_y \\ R_z & T_z \end{bmatrix}$$

🦋 Je me teste

- Pour chaque couple de solides suivants 1 et 2, mettez en place deux bases d'étude B_1, B_2 .
- Enoncer les degrés de liberté possibles de 1 par rapport à 2 en les nommant $R_x, R_y...$
- Donner le nbr de degrés de liberté de 1 par rapport à 2.



- Mat de planche à voile 1/planche 2
- Roue de train 1/rail 2
- Châssis de trottinette 1/sol 2
- Votre stylo 1 par rapport à la table 2
- Vis de serre joint 1 par rapport au corps 2
- Bille de roulement 1 qui roule dans le chemin de la bague de roulement 2

2.3. Les types de contact

Il existe trois types de contact entre deux solides 1 et 2 :

- Contact ponctuel : l'intersection entre 1 et 2 est un point
- Contact linéique : l'intersection entre 1 et 2 est une ligne
- Contact surfacique : l'intersection entre 1 et 2 est une surface

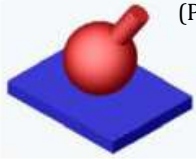
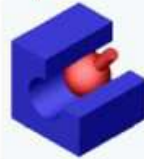
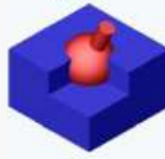
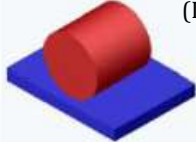
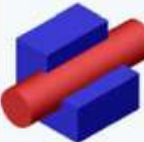
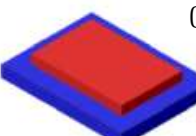
L'obtention de ces trois types contacts de contact est modélisée par la mise en contact de trois surfaces mathématiques fondamentales :

- Plan
- Cylindre
- Sphère

Le tableau ci-dessous présente le choix de mise en contact retenu. Il s'agit d'un choix, car par exemple, le contact ponctuel peut être aussi obtenu en mettant en contact deux cylindres comme illustré ci-contre.



Géométrie retenue pour la modélisation cinématique des contacts entre solides,
et type de contact : P=ponctuel, L=linéique, S=surfacique

	Plan	Cylindre	Sphère
Sphère	 (P)	 (L)	 (S)
Cylindre	 (L)	 (S)	
Plan	 (S)		

Conclusion :

- **six liaisons élémentaires** fondamentales conséquences des contacts détaillés ci-dessus. Ces six liaisons élémentaires (Liaisons pivot glissant, sphérique, appui plan, cylindre plan, sphère cylindre, sphère plan) sont répertoriées dans le tableau ci-après.
- **quatre liaisons composées** (Liaisons pivot, glissière, sphérique à doigt, hélicoïdale).

2.4. Liaisons normalisées

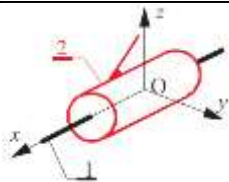
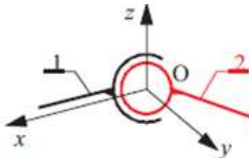
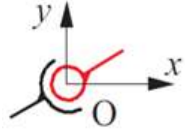
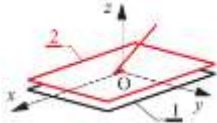
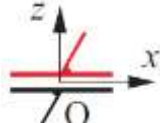
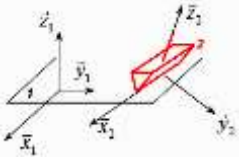
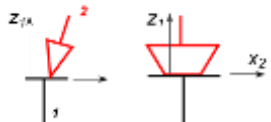
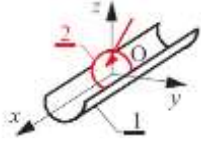
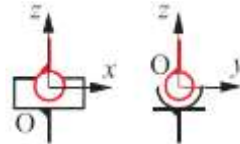
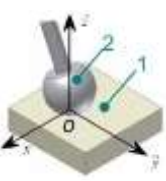
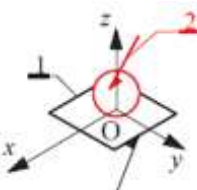
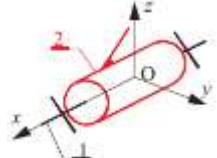
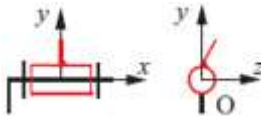
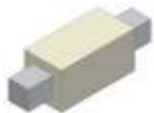
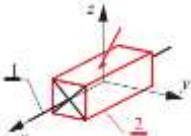
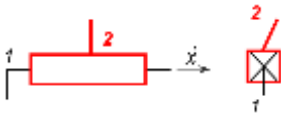
On modélise l'assemblage mobile entre deux solides par **une liaison**.

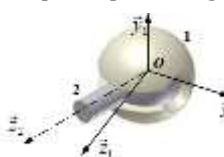
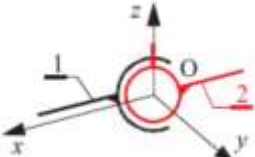
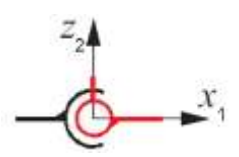
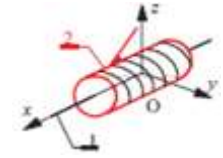
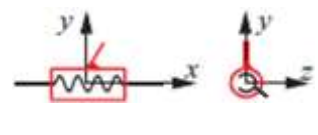
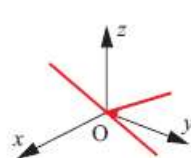
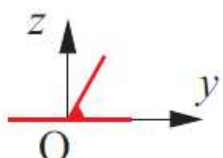
Une liaison se modélise par la mise en contact de deux surfaces de types différents. Une liaison autorise certains degrés de libertés et en interdit d'autres.

Définition de la liaison parfaite

Le modèle « liaison parfaite » entre deux solides est tel que :

- Les surfaces de contact sont géométriquement parfaites (plan, cylindre, sphère)
- Le jeu de fonctionnement est supposé nul
- Le contact s'effectue sans adhérence ni frottement

Liaison : nom et illustration	Caractéristique géométrique	Nbr de degrés de liberté	Schéma spatial (3D)	Schéma plan (2D)	Détail des degrés de liberté
$\mathcal{L}$ pivot glissant 	Axe $(O, \vec{x})$	2			$\left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]$
$\mathcal{L}$ sphérique 	Centre O	3			$\left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]$
$\mathcal{L}$ appui plan 	Normale $\vec{z}$	3			$\left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]$
$\mathcal{L}$ cylindre plan 	- Normale $\vec{z}$ - Axe $(O, \vec{x})$	4			$\left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]$
$\mathcal{L}$ sphère cylindre 	- Centre O - Axe $(O, \vec{x})$	4			$\left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]$
$\mathcal{L}$ sphère plan 	- Centre O - Normale $\vec{z}$	5			$\left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]$
$\mathcal{L}$ pivot 	Axe $(O, \vec{x})$	1			$\left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]$
$\mathcal{L}$ glissière 	Direction $\vec{x}$	1			$\left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]$

$\mathcal{L}$ sphérique à doigt 	- centre O - plan de normale $\vec{y}_1$ - axe de doigt $(O, \vec{z}_2)$	2			$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]$
$\mathcal{L}$ hélicoïdale 	Axe $(O, \vec{x})$	1			$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]$ R_x et T_x dépendants l'un de l'autre
$\mathcal{L}$ encastrement 		0			$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]$

Remarque générale

Le sens du déplacement n'intervient pas dans la notion de degré de liberté quand on modélise une liaison. Dit autrement : quand un degré de liberté est supprimé il l'est dans les deux sens. Il n'y a jamais « rupture de la liaison » (sinon elle n'existe plus !). C'est l'exemple classique de la liaison sphère plan.

Chacune des représentations ci-dessous indique la suppression de la translation dans le sens $+\vec{z}$ et $-\vec{z}$, quel que soit « le sens » de la représentation choisi. Les deux modèles ci-dessous sont strictement identiques :

$$\vec{z} \leftarrow \bigcirc \mid = \vec{z} \leftarrow \mid \bigcirc$$

Remarque sur la liaison **hélicoïdale**

Les deux mouvements possibles R_x et T_x sont **dépendant** l'un de l'autre, donc même si deux mouvements sont observables, la liaison hélicoïdale ne possède qu'un degré de liberté. La relation entre rotation et translation est donnée plus loin dans le présent document de cours (lois entrée-sortie particulières).

🔪 Je me teste

- a. Proposer une liaison pour les assemblages entre les solides suivants (vus précédemment) :
- Mat de planche à voile 1/planche 2
 - Roue de train 1/rail 2
 - Châssis de trottinette 1/sol 2
 - Votre stylo 1 par rapport à la table 2
 - Roue de train 1 par rapport à son rail 2
 - Vis de serre joint 1 par rapport au corps 2
 - Bille de roulement 1 qui roule dans le chemin de la bague de roulement 2

- b. Voici d'autres exemples plus ou moins courants. Proposez une liaison.

Livre posé à plat sur une table, règle sur la table selon son bord tranchant, jumelles touristiques/socle, chaise/sol, bille dans un tube, deux dents d'engrenage qui se touchent, canne de baby-foot/châssis, coulisse d'un trombone à coulisse, attache de remorque de voiture, joint de transmission de Cardan, tire-bouchon dans bouchon, tige de vérin/corps.



Trombone à coulisse



Cardan



Vérin

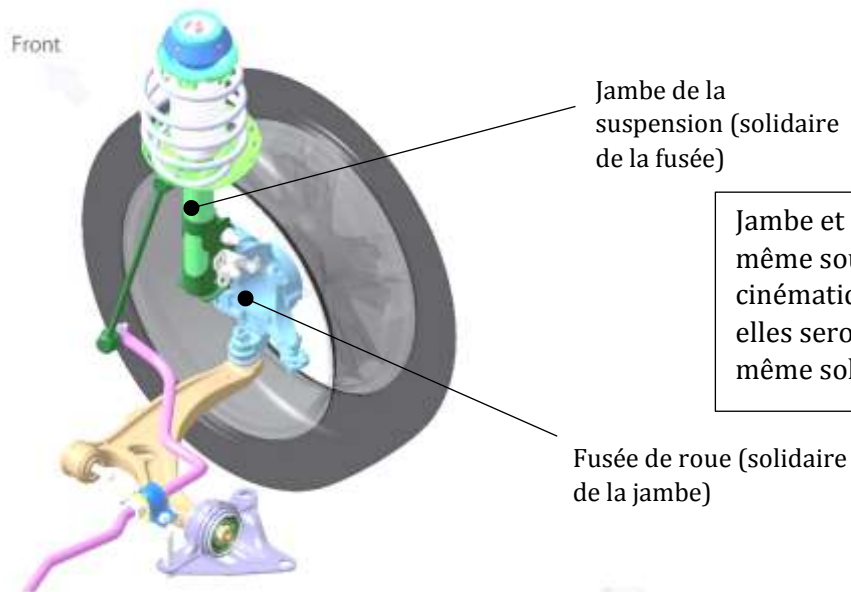
3. MODELISATION CINEMATIQUE D'UN MECANISME

3.1. Classes d'équivalence (ou groupe cinématiquement équivalent)

Définition

Une classe d'équivalence, ou groupe de pièces cinématiquement équivalentes, est un ensemble de pièces encastrées les unes avec les autres donc ne possédant pas de degrés de libertés entre elles. Les pièces d'une même classe d'équivalence possèdent donc le même mouvement.

En listant les classes d'équivalence on réduit donc le mécanisme à sa plus simple expression cinématique.



Jambe et fusée font partie d'un même sous ensemble de pièces cinématiquement équivalentes : elles seront donc modélisées par un même solide indéformable.

Exemple

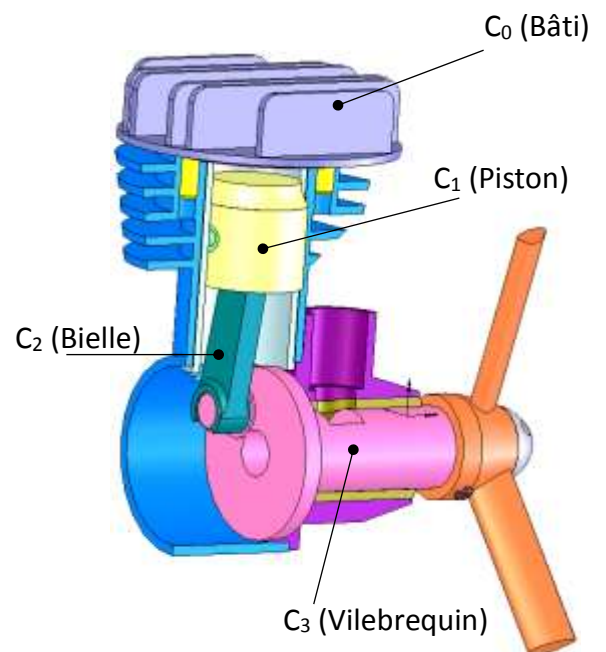
Le petit moteur à combustion dont la photo est donnée ci-dessous possède 35 pièces mais 4 groupes cinématiques. On choisit de donner à chacun de ces groupes de pièces le nom de la pièce la plus emblématique :

C_0 = corps = {corps, couvercle, vis, joints plats, culasse, bougie, raccords, coussinet...}

C_1 = piston = {piston, axe, anneau élastique, segment d'étanchéité...}

C_2 = bielle = {bielle, coussinets...}

C_3 = vilebrequin = {vilebrequin, axe rapporté, anneau élastique, clavette, hélice, écrou...}



Remarques

- les pièces qui se déforment (ressorts, amortisseurs caoutchouc...) ne sont pas prises en compte dans la modélisation des liaisons
- Les roulements font l'objet d'une modélisation particulière. La bonne détermination de la liaison requière la connaissance du type de roulement et l'analyse du montage de celui-ci. Bien souvent l'association de deux roulements conduit globalement à la liaison pivot d'un arbre dans son bâti.

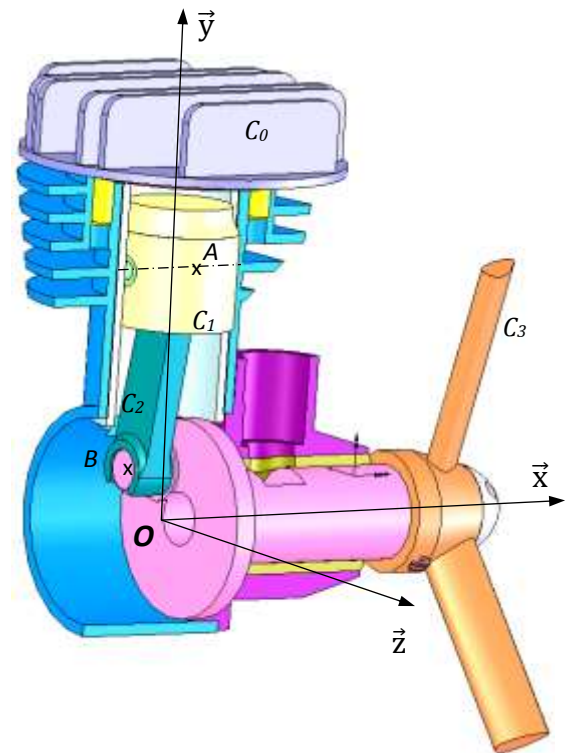
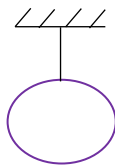


3.2. Graphe des liaisons (ou graphe de structure)

3.2.1. Définition et exemple

Le graphe des liaisons d'un mécanisme est une représentation qui traduit les liaisons entre les classes d'équivalence qui le constituent. C'est un outil descriptif qui fait le bilan des associations entre solides et des liaisons qui les relient.

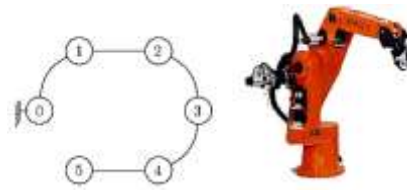
Une liaison est identifiée dès qu'il y a contact entre deux classes d'équivalence.



3.2.2. Les trois types de chaînes de solide

Chaîne ouverte :

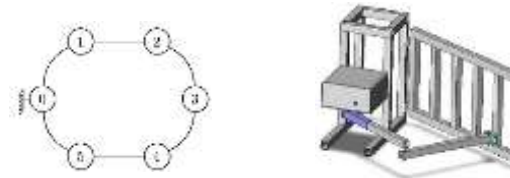
Robot série.



Chaîne fermée :

Perceuse, ponceuse, Maxpid, ouvre portail

Existence d'une loi entrée-sortie.



Chaîne complexe :

Pompe à pistons axiaux, robot parallèle.

Existence d'une loi entrée-sortie.



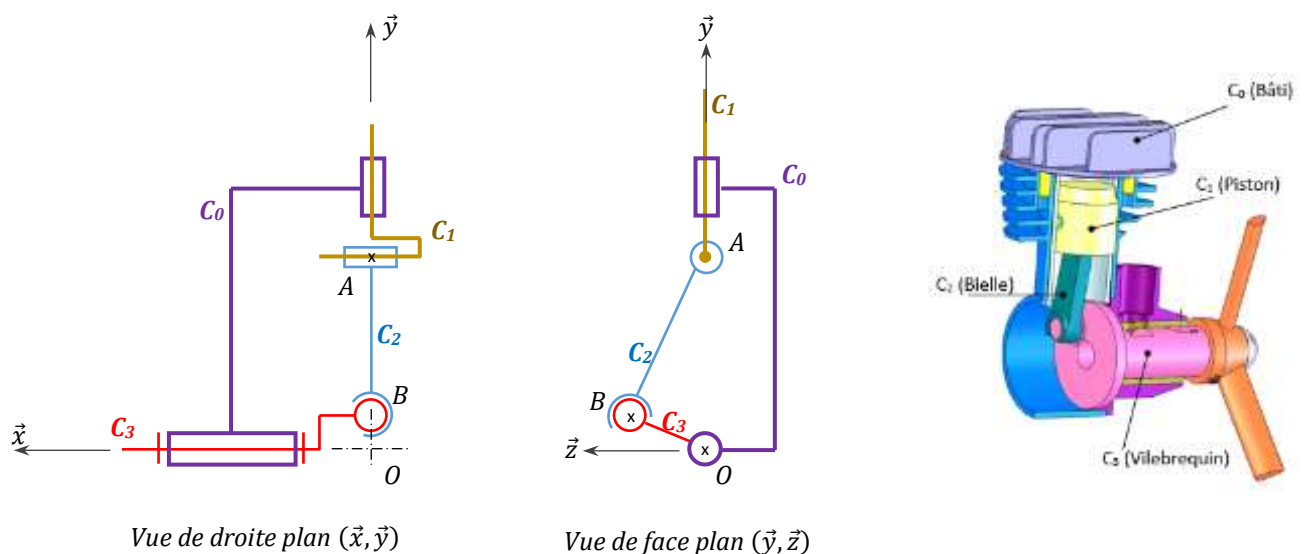
4. REPRESENTATION D'UN MODÈLE : LE SCHÉMA CINÉMATIQUE

4.1. Définition

Le schéma cinématique est un schéma minimal permettant la description des mouvements. Il met en place, agence, positionne, les liaisons conformément à leur position relative dans le mécanisme réel.

4.2. Exemple

Schéma cinématique plan en deux vues du mini moteur à combustion

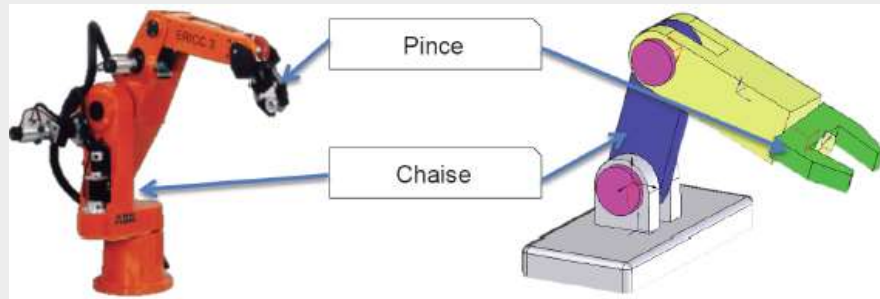


La rotation continue du vilebrequin C_3 (encore appelé manivelle), provoque la translation alternative du piston C_1 (encore appelé coulisseau). Ce système de transformation de mouvement couramment utilisé en mécanique, est appelé système bielle-manivelle.

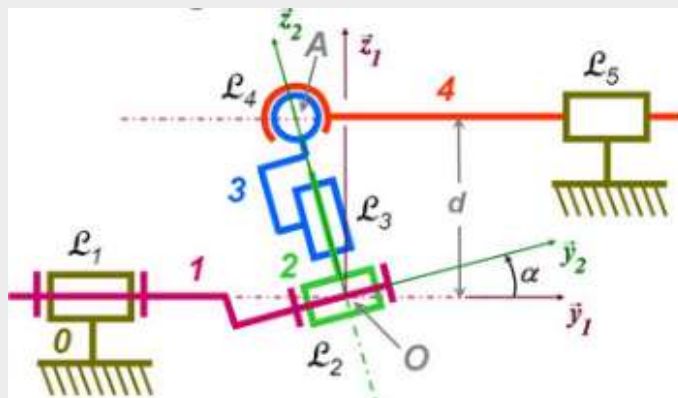
Je me teste sur le schéma cinématique



- I. Le robot dont la photo et une représentation 3D simplifiée sont données ci-dessous comporte quatre classes d'équivalence : socle 0, chaise 1, avant-bras 2, pince 3.
 - a. Définir les points et axes nécessaires.
 - b. Faire le graphe des liaisons
 - c. Dessiner le schéma cinématique



- II. Le mécanisme modélisé ci-dessous est totalement paramétré.
 - a. Coloriez-le.
 - b. Faites le graphe des liaisons.
 - c. Que provoque la rotation du solide 1 dans le bâti 0 ?



- III. Dessiner le schéma cinématique 3D du système bielle manivelle du micro moteur thermique.

5. MOUVEMENT PLAN SUR PLAN – MÉCANISME PLAN

Définition du mouvement plan

Le mouvement d'un solide S_2 par rapport à un solide S_1 est dit plan, s'il existe un plan P_2 lié à S_2 qui reste coïncident avec un plan P_1 lié à S_1 au cours du mouvement. On parle alors de mouvement plan sur plan de plan P_1 (ou P_2).

Définition d'un mécanisme plan

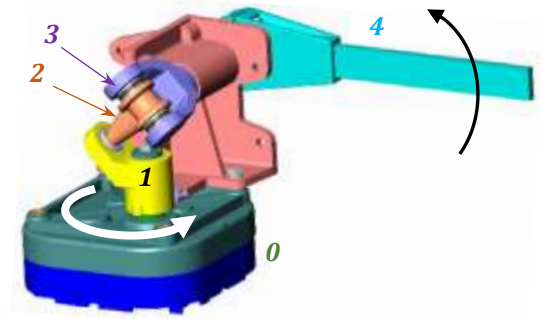
Si toutes les pièces d'un mécanisme sont en mouvement plan sur plan et de même plan P , alors le mécanisme est dit plan.

C'est le cas du micromoteur thermique étudié précédemment : mécanisme plan, de plan $(\vec{y}, \vec{z})$.

Exemple de mécanisme non plan

Lève barrière Sinusmatic : la rotation de l'équerre 1 entraîne le croisillon 2 qui entraîne le croisillon 3 solidaire de la lisse 4.

La rotation continue de 1 provoque la rotation alternative de 4 ($\pm 90^\circ$). Les rotations de 4 et 1 sont d'axes orthogonaux (pivot 4/0 et 1/0 d'axes orthogonaux) ce qui empêche tout caractère plan pour ce mécanisme.



6. ANALYSE GEOMETRIQUE D'UN MECANISME – LOI ENTRÉE SORTIE

6.1. Construction géométrique

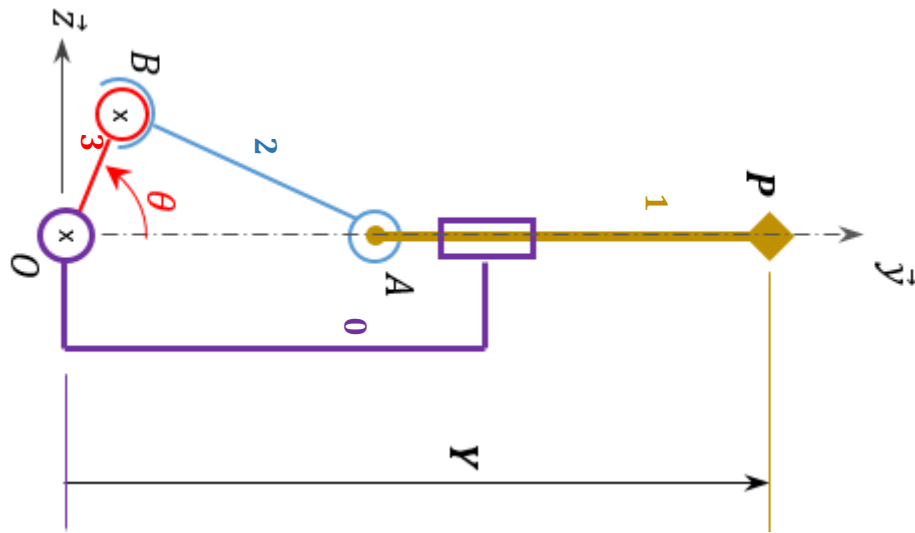
En utilisant l'hypothèse de solides indéformables et les degrés de liberté des liaisons, le modèle cinématique établi permet de construire le mécanisme dans différentes configurations. Cela permet de déterminer le débattement angulaire d'une pièce, la course d'un solide en translation...

On réalise ainsi une construction à la règle et au compas. Cette construction n'est possible que pour les mécanismes plans.

Exemple de construction graphique

Le schéma cinématique du système bielle-manivelle du micromoteur est rappelé ci-dessous. Par une construction à la règle et au compas, représentez-le quand l'angle θ vaut $+135^\circ$, puis 0° , puis -45° .

Déduire de cette observation la relation mathématique entre la course totale du point P et la longueur OB.



6.2. Paramétrage

Un mécanisme possède un mouvement d'entrée et un mouvement de sortie. Il est très souvent nécessaire de connaître la loi reliant le paramètre de position de la pièce d'entrée au paramètre de la pièce de sortie.

Pour cela il est nécessaire de définir un paramétrage :

- à chaque solide, on associe une base
- définition des distances constantes entre les points particuliers de chaque solide (entre-axe pivot d'une bielle par exemple).
- Paramétrage des liaisons : 1 paramètre par degrés de liberté.

Exemples:

- Liaison pivot : un paramètre angulaire entre deux bases ;
- Liaison glissière : un paramètre de distance entre deux points.

6.3. Définition de la loi entrée-sortie géométrique d'un mécanisme

Soit un mécanisme d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$. Les paramètres $e(t)$ et $s(t)$ sont, chacun, soit une distance (m) soit un angle (rad, °, tr).

La loi entrée-sortie est la relation entre s et e : $f(s, e) = 0$.

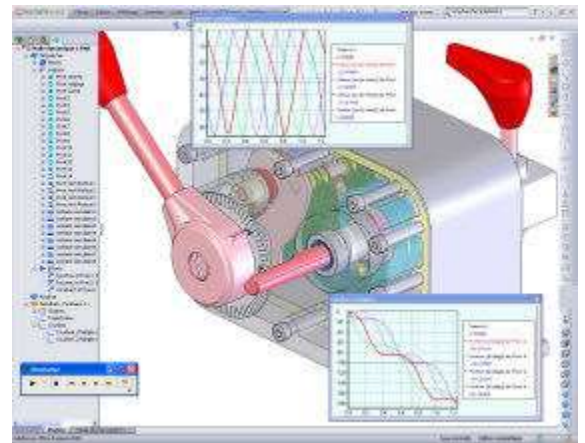
Si le solide d'entrée (E) et le solide de sortie (S) ont un mouvement de :	Les paramètres e, s sont :	Exemple de notation	Unité
Rotation	Un angle	$\alpha, \theta, \varphi, \beta, \gamma$	m, mm
Translation	Une distance	$x, y, z, \varepsilon, \lambda$	$rad, ^\circ, tr$

Remarque sur les unités d'angle : $1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi}^\circ$ $1 \text{ tr} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$

Il n'est pas toujours possible ou pertinent de trouver s en fonction de e : $s(e)$. Le système d'équations conséquence du modèle cinématique étant parfois lourd à résoudre, voire non résoluble.

On se contente alors d'une relation entre s et e , puis un solveur numérique termine la résolution, souvent graphique, avec le tracé (s, e) .

L'utilisation d'un logiciel de simulation mécanique (Méca3D associé à SolidWorks par exemple), permet, après saisie du modèle 3D du mécanisme, d'obtenir facilement la loi e-s.



6.4. Calcul de la loi entrée-sortie géométrique d'un mécanisme – Méthode

Le paramétrage du modèle cinématique étant réalisé, la méthode de calcul de la loi entrée-sortie géométrique est systématique : effectuer la fermeture géométrique passant par les centres des liaisons.

Cela se traduit mathématiquement par l'écriture de la relation de Chasles.

Ensuite il ne s'agit plus que d'une résolution mathématique.

Exemple du système bielle manivelle du micromoteur

Définition des bases

Problème plan de normale $\vec{x}_0$: les vecteurs de bases $\vec{x}_i$ sont tels que $\vec{x}_i = \vec{x}_0$.

$B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ attaché au bâti 0

$B_2(\vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ attaché à la bielle 2

$B_3(\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ attaché à la manivelle 3

Paramétrage

Dimensions constantes :

Excentration (ou longueur manivelle) = $\overrightarrow{OB} = e \cdot \vec{y}_3$

Longueur bielle = $\overrightarrow{BA} = L \cdot \vec{y}_2$

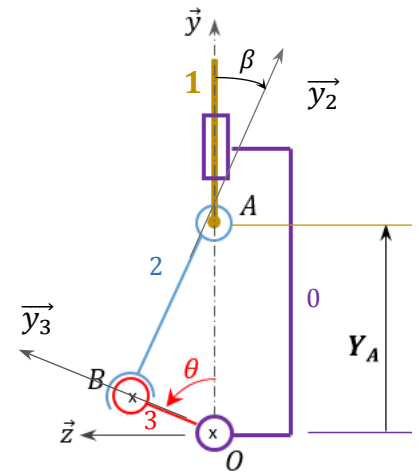
Variables :

Entrée (angle manivelle) = $\theta(t) = \dots$

Sortie (position piston) = $\overrightarrow{OA} = Y_A(t) \cdot \vec{y}$

Orientation bielle : $\beta(t) = \dots$

Figures géométrales (représentations planes des rotations)



Objectif : trouver une relation entre θ et Y_A . L'idéal serait d'obtenir Y_A en fonction de θ .

Fermeture géométrique (O, B, A, O) : relation vectorielle

On écrit la relation de Chasles entre les centres de liaison O, A, B, O.

Projection dans la base fixe B_0 : deux relations scalaires

Elimination de la variable indésirable entre les équations scalaires (2) et (3)

Parmi les trois variables θ, β, Y_A : β est une variable intermédiaire. Les deux autres sont l'entrée et la sortie. Il faut éliminer β entre (2) et (3).

On peut extraire la sortie Y_A en fonction de θ en résolvant l'équation du deuxième degré.

$$Y_A = e \cdot \cos \theta \pm \sqrt{L^2 - e^2 \cdot \sin^2 \theta} \quad \text{avec } L^2 - e^2 \cdot \sin^2 \theta > 0 \text{ sinon mouvement impossible.}$$

La solution $Y_A = e \cdot \cos \theta - \sqrt{L^2 - e^2 \cdot \sin^2 \theta}$ mène à des valeurs de Y_A négatives. Ce qui est manifestement faux vu le paramétrage du mécanisme et l'amplitude possible du piston.

La loi entrée-sortie est donc :

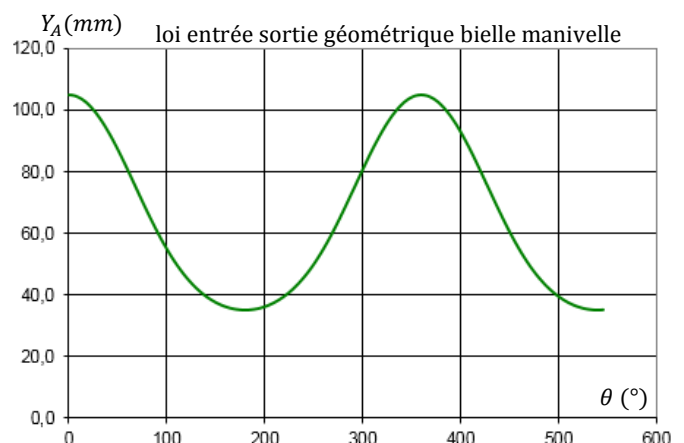
$$Y_A = e \cdot \cos \theta + \sqrt{L^2 - e^2 \cdot \sin^2 \theta}$$

Tracé de la loi $Y_A(\theta)$

Le tracé ci-contre est réalisé pour $e=35\text{mm}$, $L=70\text{mm}$.

La loi ressemble à une loi sinusoïdale mais ne l'est pas.

On choisit des unités pratiques qui ne sont pas les unités usi.



Attention à la confusion loi géométrique/loi cinématique :

On a cherché et trouvé la loi e-s **géométrique**, à ne pas confondre avec la loi e-s **cinématique** qui est la relation entre les vitesses d'entrée et sortie.

Une des méthodes permettant de calculer la loi e-s cinématique, est de dériver la loi e-s géométrique par rapport au temps.

Remarque, limite de la méthode : La méthode par fermeture géométrique donnée ci-dessus n'aboutit pas toujours. Il n'est parfois pas possible d'écrire la relation de Chasles si les liaisons ne sont pas définies par des centres (L. appui plan, L. glissière). Dans ce cas il faut souvent traduire une relation géométrique : angle constant, perpendicularité, en deux axes entraînant la nullité d'un produit scalaire entre deux vecteurs de base. C'est le cas typique de la transmission par joint de Cardan, ou du système Sinusmatic.

Quand on sort du cadre systématique de la fermeture géométrique, la recherche d'une loi e-s demande de la clairvoyance et du recul.

Je me teste

Reprendre la loi entrée-sortie géométrique du système bielle manivelle.

- Calculer $(Y_A)_{max}$ et $(Y_A)_{min}$. Déduire la course du piston ΔY_A .
- Calculer la loi e-s cinématique : vitesse du piston (point A) en fonction de la vitesse angulaire de la manivelle, soit $\frac{dY_A}{dt}$ en fonction de $\frac{d\theta}{dt}$, $\dot{Y}_A(\dot{\theta})$. Méthode : dérivation temporelle de la loi géométrique.
- Déduire la vitesse maxi $(\dot{Y}_A)_{max}$ atteinte par le piston et l'angle θ_M correspondant. Application numérique pour $\dot{\theta} = \omega = 100 \text{ rad/s}$ (955 tr/min).

6.5. Lois entrée-sortie particulières : engrenages et vis/écrou

a. Engrenage à axes parallèles

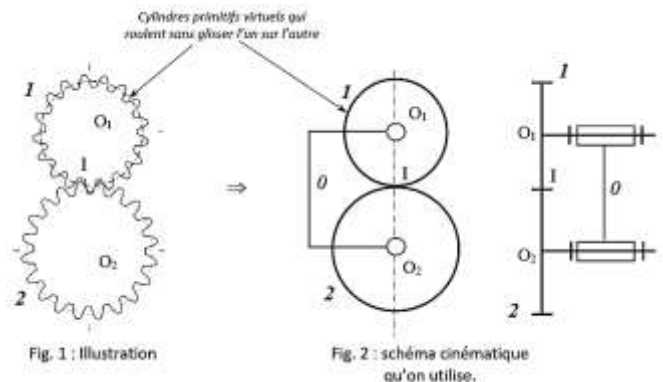
Pour deux roues dentées $\{1,2\}$ qui engrènent entre elles et sont en L. pivot dans un bâti 0, la loi entrée sortie géométrique est : $\theta_2 = k \cdot \theta_1$ si 2 est la sortie (roue menée) et 1 est l'entrée (roue menante). La constante k est le rapport de réduction.

$$k = \frac{\theta_{2/0}}{\theta_{1/0}} = \frac{\dot{\theta}_{2/0}}{\dot{\theta}_{1/0}} = \dots$$

D_i sont les diamètres des cylindres primitifs qui roulent sans glisser l'un contre l'autre.

Z_i sont les nombres de dents.

Les roues d'axes parallèles tournent en sens opposés, d'où le signe - .

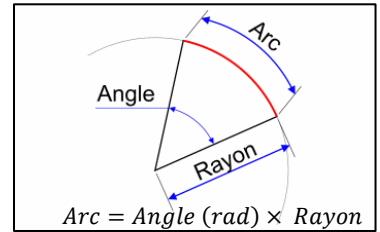


Démonstration (triviale)

Il y a, par définition même des surfaces primitives, roulement sans glissement des cercles primitifs de 1 et 2 en contact au point I. Entre deux instants les arcs qui s'enroulent l'un sur l'autre ont même longueur : $\overline{A_1 A'_1} = \overline{A_2 A'_2} \Leftrightarrow R_1 \cdot \theta_1 = -R_2 \cdot \theta_2 \Leftrightarrow \frac{\theta_2}{\theta_1} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{D_1}{D_2}$

Pour deux roues dentées qui engrènent le diamètre primitif est proportionnel au nombre dents : $\frac{D_1}{Z_1} = m = \frac{D_2}{Z_2}$. La dimension m est appelée module de l'engrenage. On a donc :

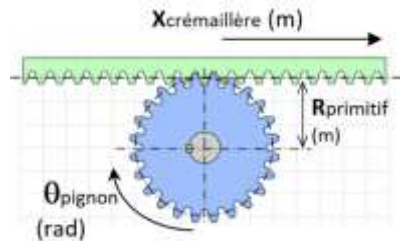
$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = -\frac{D_1}{D_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$



b. Engrenage pignon/crémaillère

Si X_c est le déplacement de la crémaillère et θ_c la rotation du pignon, la loi e-s est définie par : $X_{crém} = R_{prim} \cdot \theta_{pig}$

$$m \quad \quad \quad rad$$



Démonstration (triviale)

Il y a, par définition même des surfaces primitives, roulement sans glissement de la droite primitive de la crémaillère sur le cercle primitif du pignon.

Le déplacement de la ligne primitive est donc la longueur de l'arc du cercle primitif. La longueur de l'arc est le produit rayon $\times$ angle en radian.

c. Système vis/écrou

Modélisé par une liaison hélicoïdale, la loi e-s d'un système vis écrou est : $X = \pm p \cdot \theta$

Sortie : X = déplacement en m (mètre)

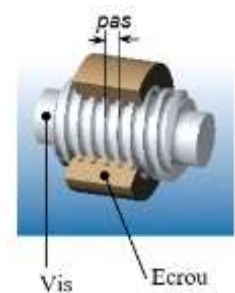
Entrée : θ = angle en tr (tour)

p = pas de la liaison hélicoïdale en m/tr (mètre par tour)

Signe $\pm$: dépend du sens de l'hélice et du repère.

L'hélice est à droite dans la majorité écrasante des cas rencontrés.

Si θ en radian : $X = \pm \frac{p}{2\pi} \cdot \theta$.



Deux définitions du pas :

- Avance de la vis pour une tour effectué
- Distance entre deux sommets d'un même filet de la vis (voir figure)

Je me teste

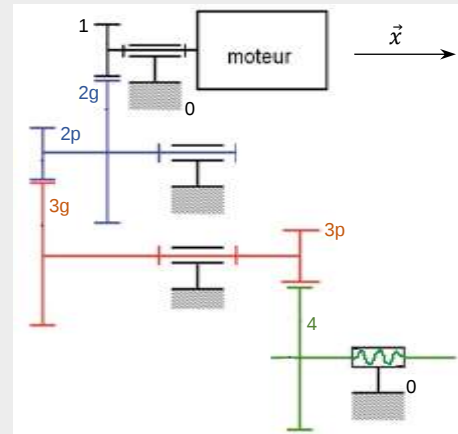
Un variateur de scooter possède la chaîne cinématique dont le schéma est donné ci-contre.

Un moteur électrique CC entraîne la roue dentée 1 en rotation. Une cascade d'engrenages à denture droite transmet ensuite la rotation à l'arbre 4.

On donne les nbr de dents des roues dentées :

$Z_1 = 13$	$Z_{3g} = 60$	$Z_{3p} = 14$
$Z_{2g} = 26$	$Z_{2p} = 20$	$Z_4 = 42$

Le pas de la liaison hélicoïdale 4/0 est $p=1,5$ mm.



1. Entourer les engrènements entre roues dentées. Combien ce mécanisme compte-t-il d'engrenages ?
2. Quel est le mouvement de l'arbre 4 par rapport au bâti ?
3. Le rotor moteur tourne dans le sens $+\vec{x}$. Quel est le sens de rotation de l'arbre 4 ?
4. Quel est le sens de déplacement de 4 ?
5. Calculer le rapport de réduction : $k = \frac{N_{40}}{N_{10}}$.
6. On veut piloter le déplacement de 4 sur une distance $X_4=10$ mm. Combien de tours θ doit effectuer le rotor du MCC ?
7. La vitesse angulaire du rotor est $N_{10}=900$ tr/min. Quelle est la vitesse de déplacement de 4/0, V_{40} ?

ANNEXE : PRODUIT SCALAIRE

1. Définition du produit scalaire

Opération externe de $\mathcal{V}^2$ dans $\mathfrak{R}$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est le nombre réel noté $\vec{U} \cdot \vec{V}$ tel que : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot \cos(\vec{U}, \vec{V})$

2. Interprétation géométrique du produit scalaire

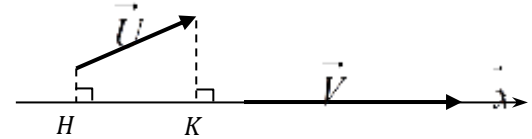
Soit $\vec{x}$ l'axe support de $\vec{V}$ et orienté dans le sens de $\vec{V}$.

Soit $\overline{HK}$ le projeté orthogonal de $\vec{U}$ sur $\vec{x}$.

Le produit scalaire est le produit des projections sur un des deux axes :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \overline{HK} \times \vec{V}$$

$\overline{HK}$ est une mesure algébrique : positive si $\overline{HK}$ est orienté dans le sens positif $+\vec{x}$, négative dans le cas contraire.



Cas particulier : si un des vecteur est un vecteur de base, $\vec{V} = \vec{x} \Rightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = \overline{HK}$

Conclusion : projeter un vecteur $\vec{U}$ sur une droite dont le vecteur de base directeur est $\vec{x}$ se fait en effectuant le produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{x}$.

3. Propriétés

Le produit scalaire détecteur de perpendicularité : $\vec{U} \perp \vec{V} \Leftrightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = 0$

Commutativité : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$

Distributivité : $\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$

Carré scalaire : $\vec{U}^2 = \vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2$

Elément absorbant : $\vec{0} \cdot \vec{U} = \vec{U} \cdot \vec{0} = 0$

Attention : le produit scalaire n'est pas associatif (si toutefois on peut parler d'associativité, puisqu'une des opérations dans ce cas n'est pas un produit scalaire, mais la multiplication par un réel). $(\vec{U} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{W} \neq \vec{U} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{W})$!

ANNEXE 3 : CHANGEMENT DE BASE

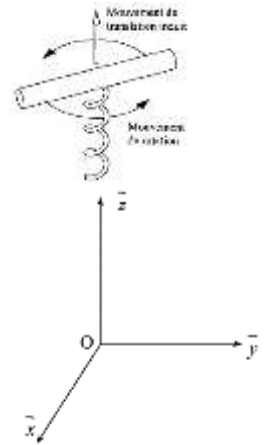
1. Préliminaire : base directe.

Toute base orthonormée $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ doit être directe : on construit le vecteur $\vec{z}$ à partir des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ déjà placés, de telle manière que le trièdre $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ soit direct.

Si le trièdre $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est direct alors, par permutation circulaire, les deux autres trièdres $(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y})$ et $(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x})$ le seront aussi.

Pratiquement, pour rendre un trièdre $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ direct : on oriente $\vec{z}$ selon la règle du tire-bouchon : quand on tourne le tire-bouchon de $\vec{x}$ vers $\vec{y}$ on obtient le sens de $\vec{z}$.

La règle des trois doigts de la main droite, est aussi possible.



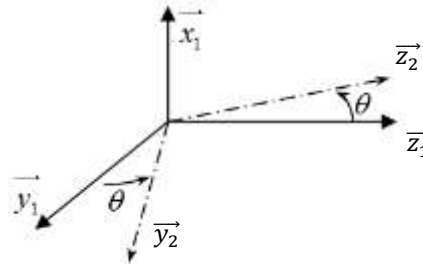
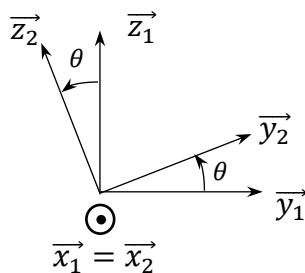
2. Changement de base par rotation autour d'un vecteur de base

Il s'agit d'effectuer un changement de base par rotation d'une base par rapport à l'autre autour d'un axe invariant commun aux deux bases.

$$B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$$

$$B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

B_2 est en rotation par rapport à B_1 autour du vecteur invariant $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$.



Les projections des nouveaux vecteurs dans l'ancienne base sont :

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_2$$

$$\vec{y}_2 = \cos \theta \vec{y}_1 + \sin \theta \vec{z}_1$$

$$\vec{z}_2 = -\sin \theta \vec{y}_1 + \cos \theta \vec{z}_1$$

3. Cas de deux rotations

Soit la base $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ image de $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par la composée de deux rotations.

$$B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\text{Rotation d'axe } \vec{z}_0 = \vec{z}_1 = \vec{z}_{01}} B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$$

$$B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \xrightarrow{\text{Rotation d'axe } \vec{y}_1 = \vec{y}_2 = \vec{y}_{12}} B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$



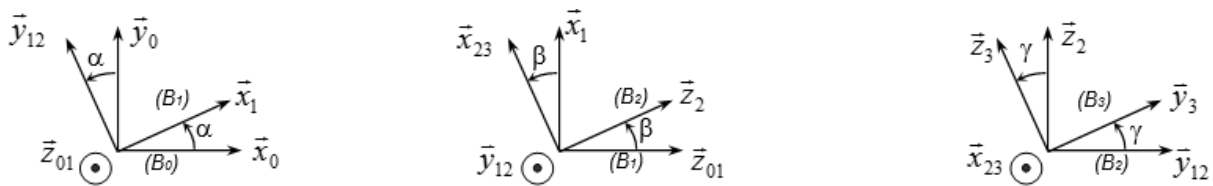
Soit à calculer la projection du vecteur $\vec{x}_2$ sur $\vec{y}_0$.

Il suffit de calculer le produit scalaire $\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_0$:

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_0 = (\cos \theta \vec{x}_1 - \sin \theta \vec{z}_{01}) \cdot \vec{y}_0 = \cos \theta \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0 = \cos \theta \sin \alpha$$

Pour vous entraîner, calculer la projection de $\vec{x}_2$ sur $\vec{x}_0$.

4. Cas de trois rotations



Le problème est identique au précédent.

Calculer : $\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_{12}$ et $\vec{y}_3 \cdot \vec{x}_1$