Circuits du 1er ordre

Sommaire

I Circuit RC **2**
I/A Circuit RC série : charge 2
I/B Application : décharge d'un circuit RC 6
II Bobine et circuit RL **7**
II/A Circuit RL série : échelon montant 7
II/B Application : RL série descendant 9

Capacités exigibles

- ☐ Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.
- ☐ Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine.
- ☐ Réaliser un bilan énergétique.
- ☐ Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension.
- ☐ Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension
- ☐ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

L'essentiel

Définitions

☐ E3.1 : Échelon de tension 2
☐ E3.2 : Circuit RC en charge 2
☐ E3.3 : Temps de réponse 4
☐ E3.4 : Circuit RC en décharge 6
☐ E3.5 : Circuit RL échelon montant 7
☐ E3.6 : Circuit RL descendant 9

Propriétés

☐ E3.1 : Équa. diff. RC montant 2
☐ E3.2 : Tension RC montant 4
☐ E3.3 : Temps de réponse RC montant 4
☐ E3.4 : Intensité RC montant 5
☐ E3.5 : Puissances RC montant 5
☐ E3.6 : Bilan d'énergie RC montant 6
☐ E3.7 : Équa. diff. RL montant 8
☐ E3.8 : Intensité RL montant 8
☐ E3.9 : Tension RL montant 9
☐ E3.10 : Puissances RL montant 9

Applications

☐ E3.1 : Dimension de RC 3
☐ E3.2 : Intensité RC montant par ED 4
☐ E3.3 : Décharge RC série 6
☐ E3.4 : Tension RL montant par ED 8
☐ E3.5 : RL série descendant 10

Démonstrations

☐ E3.1 : Équa. diff. RC montant 2
☐ E3.2 : Tension RC série montant 3
☐ E3.3 : Temps de réponse RC montant 4
☐ E3.4 : Intensité RC montant (*via* u_C) 5
☐ E3.5 : Puissances RC montant 5
☐ E3.6 : Bilan d'énergie RC montant 5
☐ E3.7 : Équa. diff. RL montant 7
☐ E3.8 : Intensité RL montant 8
☐ E3.9 : Tension RL montant (*via* i) 9
☐ E3.10 : Puissances RL montant 9

Remarques

☐ E3.1 : Unité de L/R 8
☐ E3.2 : τ graphique et régime permanent . . . 8

Outils

☐ E3.1 : Détermination graphique τ RC montant 4
☐ E3.2 : Bilan de puissance en élec. 5

Points importants

☐ E3.1 : Résolution EDLCC 3

Erreurs communes

☐ E3.1 : Bilan d'énergie RL charge 9

On appelle **circuit linéaire du premier ordre** un circuit électrique dont l'évolution des grandeurs électriques est régie par des équations différentielles linéaires à coefficients constants et *du premier ordre*. On étudie ici leur réponse à un échelon de tension.

I Circuit RC

I/A Circuit RC série : charge

Définition E3.1 : Échelon de tension

Un échelon de tension est montant depuis t_0 s'il est de la forme

$$\begin{cases} u(t < t_0) = 0 \\ u(t \geq t_0) = E \end{cases} \quad \text{avec} \quad E \quad \text{la consigne montante}$$

Il est descendant depuis t_1 s'il est de la forme

$$\begin{cases} u(t < t_1) = E \\ u(t \geq t_1) = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad 0 \quad \text{la consigne descendante}$$

I/A) 1 Présentation

Définition E3.2 : Circuit RC en charge

◇ Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et un condensateur idéal.

◇ **On suppose le condensateur initialement déchargé.**

◇ À $t_0 = 0$, on ferme l'interrupteur.

Figure E3.1

I/A) 2 Équation différentielle du circuit

♥ Démonstration E3.1 : Équation différentielle RC échelon montant et CI

Équation différentielle

Loi des mailles pour $t \geq t_0$:

■

Conditions initiales

Figure E3.2 – En 0^-

Figure E3.3 – En 0^+

♥ Propriété E3.1 : Équation différentielle RC échelon montant

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC avec un échelon de tension montant E s'écrit

avec (E3.1)

ou, $\times C$:

Par **continuité de la tension aux bornes d'un condensateur**, on trouve la condition initiale

ou

Application E3.1 : Dimension de RC

Montrer, par analyse dimensionnelle, que RC est homogène à un temps.

Analyse directe

Analyse indirecte

I/A) 3 Résolution de l'équation différentielle

Important E3.1 : Résolution EDLCC

Se référer à la fiche 5.

1. On recherche une **solution particulière constante de l'équation générale**, de la forme $y_p = \lambda$.
2. On écrit l'**équation homogène** associée à l'équation différentielle obtenue.
3. On **injecte la forme générique** $y_h(t) = Ke^{rt}$, $K \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{C}$ dans l'équation homogène.
4. On trouve et résout le **polynôme caractéristique**.
5. On écrit alors la **forme homogène** $y_h(t)$.
6. On écrit la **solution générale**, somme de la forme homogène et de la solution particulière : $y(t) = y_h(t) + y_p$
7. On détermine la/les constante(s) à l'aide des **conditions initiales**.
8. Conclusion.

♥ Démonstration E3.2 : Tension RC série montant

1. Solution particulière : (E3.2)
2. Équation homogène : (E3.3)
3. Forme générique :
4. Polynôme caractéristique :
5. Solution homogène : (E3.4)
6. Solution générale : (E3.5)
7. Conditions initiales :
8. Conclusion :

■

Propriété E3.2 : Tension RC montant

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit RC soumis à un échelon de tension E avec $u_C(0) = 0$ est

ou

et $u_C(t)$ est continue. Quand $t \to +\infty$, $u_C(t) = E$. On est alors en **régime permanent** : $u_C(t)$ ne varie plus. La vitesse à laquelle ce régime est atteint dépend de la valeur de τ la constante de temps.

FIGURE E3.4

I/A) 4 Constante de temps, régime transitoire

Outils E3.1 : Détermination graphique τ RC montant

◇

◇ Soit $y_0(t)$ la tangente à la courbe en $t = 0$. On a :

FIGURE E3.5

Définition E3.3 : Temps de réponse

Le **temps de réponse** d'un circuit d'ordre 1 est le temps à partir duquel on peut considérer la **consigne** de tension ou de courant **atteinte**, c'est-à-dire qu'on est en **régime permanent**.

Pour cela, on se fixe un **seuil arbitraire** à partir duquel on considère le régime permanent atteint, ici 99%.

Démonstration E3.3 : Temps de réponse RC montant

On traduit mathématiquement la définition :

On isole ensuite l'exponentielle :

■

Propriété E3.3 : Temps de réponse RC montant

Ainsi,

I/A) 5 Évolution de l'intensité

Application E3.2 : Intensité RC montant par ED

Trouver l'équation différentielle de l'intensité $i(t)$ dans un circuit RC en charge. La résoudre.

On peut donc la déterminer par résolution de son ED, mais également de deux manières à partir de u_C :

♥ Démonstration E3.4 : Intensité RC montant (*via* u_C)

Caractéristique de C

Loi des mailles

■

■

♥ Propriété E3.4 : Intensité RC montant

L'intensité dans un circuit RC en charge s'exprime par

mais est **discontinue**. Quand $t \to +\infty$, $i(t) = 0$ car le **condensateur chargé et se comporte comme un interrupteur ouvert**. La vitesse à laquelle ce régime est atteint dépend de τ la constante de temps.

Figure E3.6

I/A) 6 Bilan de puissance

♥ Outils E3.2 : Bilan de puissance en élec.

En électrocinétique, les puissances sont le produit d'une tension et d'une intensité. Or, par construction la loi des mailles est une relation entre les tensions du circuit ; ainsi

On effectue un bilan de puissance en écrivant la loi des mailles multipliée par i.

♥ Propriété E3.5 : Puissances RC montant

Dans un circuit RC en charge, on a le bilan de puissances

$\mathscr{P}_G = Ei$:

$\mathscr{P}_C = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_C}{\mathrm{d}t}$:

$\mathscr{P}_J = Ri^2$:

♥ Démonstration E3.5 : Puissances RC

■

I/A) 7 Bilan d'énergie

♥ Démonstration E3.6 : Bilan d'énergie RC montant

Soit $t_0 = 0$: l'énergie fournie par le générateur est

Soit explicitement :

De plus,

donc

■

Propriété E3.6 : Bilan d'énergie RC montant

Pendant la totalité de la charge, le générateur fournit l'énergie

Elle se répartit équitablement entre le condensateur et la résistance :

I/B Application : décharge d'un circuit RC

Définition E3.4 : Circuit RC en décharge

◇ Il est constitué d'un condensateur idéal en série avec une résistance.

◇ **On suppose le condensateur initialement chargé** : $u_C(t_1^-) = E$.

◇ À $t = t_1$, on ferme l'interrupteur.

On dit que le système est **en régime libre** et soumis à un **échelon de tension descendant**.

Figure E3.7

Application E3.3 : Décharge RC série

On cherche l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur et de l'intensité $i(t)$ dans le circuit pour $t \geq t_1$. Pour cela :

1) Déterminer l'équation différentielle ainsi que les conditions initiales ;

2) Résoudre l'équation différentielle ;

3) Tracer $u_C(t)$ et montrer comment déterminer graphiquement la constante de temps τ ;

4) Montrer que le temps de réponse du circuit est toujours de 5τ ;

5) Trouver l'expression de l'intensité $i(t)$ dans le circuit.

6) Que se serait-il passé si l'on avait fléché le condensateur en convention récepteur ?

1) **Équation différentielle**

Loi des mailles pour $t \geq t_1$:

■

Conditions initiales

Figure E3.8 – En t_1^-

Figure E3.9 – En t_1^+

2) On part de l'étape 3 puisque l'équation est déjà homogène :

3 et 4 :

5 : (E3.6)

7 :

8 : ■

3) ◇

◇ Soit $y_1(t)$ la tangente à la courbe en $t = t_1$. On a :

Figure E3.10

4) On suppose $t_1 = 0$ pour simplifier les calculs. On traduit mathématiquement la définition :

5) Par une des deux méthodes précédentes, ici la caractéristique **en convention générateur** :

6) ◇

◇

II Bobine et circuit RL

II/A Circuit RL série : échelon montant

II/A) 1 Présentation

Définition E3.5 : Circuit RL échelon montant

◇ Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et une bobine idéale.

◇ **On suppose l'interrupteur initialement ouvert.**

◇ À $t = t_0$, on ferme l'interrupteur.

Figure E3.11

II/A) 2 Équation différentielle du circuit

♥ Démonstration E3.7 : Équation différentielle RL échelon montant et CI

Équation différentielle

Loi des mailles pour $t \geq t_0$:

■

Figure E3.12 – En t_0^-

Conditions initiales

Figure E3.13 – En t_0^+

♥ Propriété E3.7 : Équation différentielle RL échelon montant

L'équation différentielle du courant $i(t)$ traversant une bobine dans un circuit RL avec un échelon de tension montant E s'écrit

avec (E3.7)

Par **continuité de l'intensité traversant une bobine**, on trouve la condition initiale

Remarque E3.1 : Unité de L/R

On peut de même démontrer l'unité de L/R par analyse dimensionnelle.

II/A) 3 Résolution de l'équation différentielle

♥ Démonstration E3.8 : Intensité RL montant

1 Solution particulière : (E3.8)

2 Équation homogène : (E3.9)

3 Forme générique :

4 Polynôme caractéristique :

5 Solution homogène : (E3.10)

6 Solution générale : (E3.11)

7 Conditions initiales :

8 Conclusion :

■

♥ Propriété E3.8 : Intensité RL montant

La solution de l'équation différentielle du courant $i(t)$ d'un circuit RL soumis à un échelon de tension E avec $i(t_0) = 0$ est

et $i(t)$ est continue. Quand $t \to +\infty$, $i(t) = \frac{E}{R}$. On est alors en **régime permanent** : $i(t)$ ne varie plus. La vitesse à laquelle ce régime est atteint dépend de la valeur de τ la constante de temps.

Figure E3.14

Remarque E3.2 : τ graphique et régime permanent

Même procédé que pour la tension du RC série (en faisant attention d'utiliser $\frac{E}{R}$ et pas E...!).

II/A) 4 Évolution de la tension

♥ Application E3.4 : Tension RL montant par ED

Trouver l'équation différentielle de la tension $u_L(t)$ dans un circuit RL montant. La résoudre.

♥ Démonstration E3.9 : Tension RL montant (*via* i)

Caractéristique de L

Loi des mailles

■

■

♥ Propriété E3.9 : Tension RL montant

La tension dans un circuit RL en charge s'exprime par

mais est **discontinue**. Quand $t \to +\infty$, $u_L(t) = 0$ car la **bobine en RP se comporte comme un interrupteur fermé**. La vitesse à laquelle ce régime est atteint dépend de τ la constante de temps.

Figure E3.15

II/A) 5 Bilan de puissance

♥ Propriété E3.10 : Puissances RL montant

Dans un circuit RL en charge, on a le bilan de puissances

$\mathscr{P}_G = Ei$:

$\mathscr{P}_L = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_L}{\mathrm{d}t}$:

$\mathscr{P}_J = Ri^2$:

♥ Démonstration E3.10 : Puissances RL

■

Attention E3.1 : Bilan d'énergie RL charge

Ici la puissance en régime permanent n'est pas nulle : un courant circule toujours dans la résistance qui dissipe RI^2. On ne peut intégrer à l'infini.

II/B Application : RL série descendant

Définition E3.6 : Circuit RL descendant

◇ Il est constitué d'une bobine idéale en série avec une résistance.

◇ **On suppose le courant initialement établi** : $i(t_1^-) = \frac{E}{R}$.

◇ À $t = t_1$, on coupe le générateur.

On dit que le système est **en régime libre** et soumis à un **échelon de tension descendant**.

Figure E3.16

❤ Application E3.5 : RL série descendant

On cherche l'évolution de l'intensité $i(t)$ traversant la bobine et de sa tension $u_L(t)$ pour $t \geq t_1$. Pour cela :

1) Déterminer l'équation différentielle ainsi que les conditions initiales ;

2) Résoudre l'équation différentielle ;

3) Tracer $i(t)$ et montrer comment déterminer graphiquement la constante de temps τ ;

4) Trouver l'expression de la tension $u_L(t)$ dans le circuit.

5) Que se serait-il passé si l'on avait fléché la bobine en convention générateur ?

1)

Équation différentielle

Loi des mailles pour $t \geq t_1$:

■

Conditions initiales

Figure E3.17 – En t_1^-

Figure E3.18 – En t_1^+

2) On part de l'étape 3 puisque l'équation est déjà homogène :

3 et 4 :

5 : (E3.12)

7 :

8 : ■

3) ◇

◇ Soit $y_1(t)$ la tangente à la courbe en $t = t_1$. On a :

Figure E3.19

4) Par une des deux méthodes précédentes, ici la caractéristique **en convention récepteur** :

5) ◇

◇