

Correction du TD d'application



I Quelle courbe pour quel circuit ?

- 1 ◇ Pour la courbe 1 : on observe une diminution exponentielle de la **tension** et une **discontinuité** de cette dernière en $t = 0$. Or, les condensateurs ont une tension continue à leurs bornes, cette courbe ne peut donc **pas** être issue d'un circuit avec un **condensateur** : ni le 3, ni le 4.

Ensuite, comme c'est forcément une bobine, on observe que $u = L \frac{di}{dt} > 0$, autrement dit l'intensité monte dans le circuit. Le circuit 1 s'ouvre à $t = 0$, donc l'intensité devrait y baisser : finalement il ne nous reste que le **circuit 2**.

Dans ce circuit, la constante de temps est connue (cf. cours) et vaut $\tau = L/R$. On la détermine avec l'intersection entre la tangente en $t = 0$ et l'asymptote $u = 0$, où en trouvant l'instant où u et son asymptote ont un écart relatif de 37%, c'est-à-dire ici quand $u(\tau) = 1,8 \text{ V}$. On trouve dans tous les cas $\tau = 1,0 \text{ ms}$, soit $L = 1,0 \text{ H}$.

- ◇ Pour la courbe 2 : on observe une augmentation exponentielle de la tension et une continuité de cette dernière en $t = 0$. On peut donc affirmer que u est la tension aux bornes d'un condensateur, et que ce dernier se charge : on y associe donc le **circuit 3**.

L'asymptote quand $t \rightarrow \infty$ est $u = E$, puisqu'alors $i = 0$ (comportement condensateur RP) et donc toute la tension du générateur se retrouve aux bornes de C (et pas de R car $i = 0$) ; ainsi, $E = 10 \text{ V}$, et $u(\tau) = 6,3 \text{ V}$ ou la tangente en 0 donnent $\tau = 0,070 \text{ ms}$; comme ici $\tau = RC$, on trouve $C = 7,0 \times 10^{-8} \text{ F}$.



II Associations en parallèle

- 1 Avec la loi des mailles et d'OHM, puis la loi des nœuds :

$$\begin{aligned}
 E &= Ri + u & (1) \\
 i &= i_1 + i_2 \\
 \Leftrightarrow \frac{di}{dt} &= C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{RCT pour C} \\
 \text{Dans (1) : } & E = R(C_1 + C_2) \frac{du}{dt} + u
 \end{aligned}$$

- 2 On constate qu'électriquement, l'association en parallèle donne un condensateur équivalent de capacité

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$$

3 Loi des mailles et loi d'Ohm : $E = Ri + u$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow 0 &= R \frac{di}{dt} + \frac{du}{dt} & \left(\frac{d}{dt} \right) & (1) \\
 \text{Loi des nœuds : } i &= i_1 + i_2 \\
 \Rightarrow \frac{di}{dt} &= \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} & \left(\frac{d}{dt} \right) & \\
 \Leftrightarrow \frac{di}{dt} &= \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{RCT pour L} \\
 \text{Dans (1) : } & 0 = R \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) u + \frac{du}{dt}
 \end{aligned}$$

- 4 On constate qu'électriquement, l'association en parallèle donne une bobine équivalente d'inductance

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$



III Résistance de fuite d'un condensateur

- 1 En ouvrant le circuit, sans la résistance de fuite on s'attend à ce que le condensateur reste chargé, comme une pile. Or dans ce circuit, en ouvrant l'interrupteur la capacité C est reliée à la résistance R_f dans laquelle elle se décharge donc, ce qui explique la diminution de la tension.

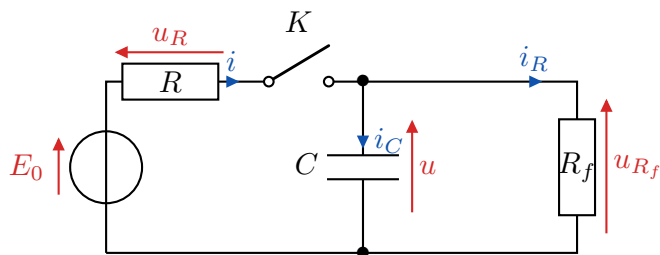


FIGURE E3.1 – Circuit pour $t \geq 0$.

- 2 Loi des mailles pour $t \geq 0$, avec $i = i_R = -i_C$:

$$\begin{aligned}
 u_{R_f} &= u_C \\
 \Leftrightarrow R_f i &= u_C & \left. \begin{array}{l} u_R = Ri \\ i = -C \frac{du_C}{dt} \end{array} \right\} \\
 \Leftrightarrow R_f C \frac{du_C}{dt} + u_C &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R_f C} u_C &= 0 & \left(\div R_f C \right) \\
 \Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C &= 0 & \left(\text{Canonique} \right)
 \end{aligned}$$

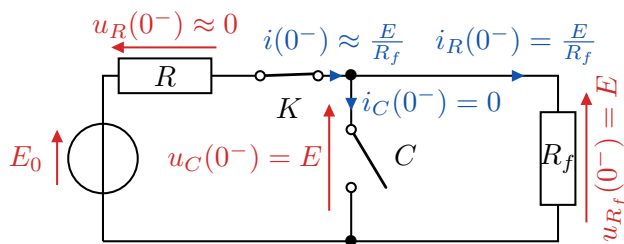


FIGURE E3.2 – Pour 0^-

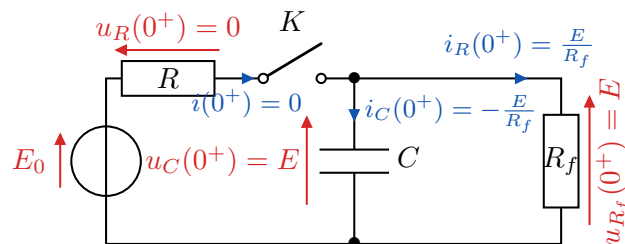


FIGURE E3.3 – Pour 0^+

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on a $u_C(0^+) = u_C(0^-) = E$. L'équation différentielle étant déjà homogène, on résout en injectant la forme générique :

$$u_C(t) = Ke^{rt} \Rightarrow r = -\frac{1}{\tau} \Rightarrow u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

Avec la condition initiale :

$$u_C(0) = K = E \quad \text{donc} \quad \boxed{u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{R_f C}}}$$

3

On nous donne

$$u_C(T) = E' \Leftrightarrow Ee^{-\frac{T}{R_f C}} = E' \Leftrightarrow -\frac{T}{R_f C} = \ln \frac{E'}{E}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_f = \frac{T}{C \ln \frac{E}{E'}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T = 12 \times 10^1 \text{ s} \\ C = 100 \times 10^{-12} \text{ F} \\ E = 10 \text{ V} \\ E' = 1,0 \text{ V} \end{cases}$$

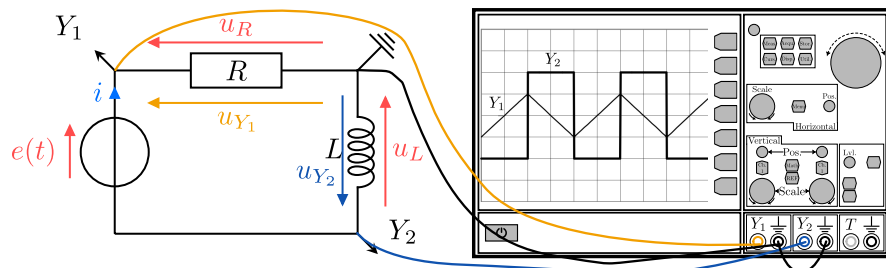
$$\text{A.N. : } \underline{R_f \approx 5,0 \times 10^{11} \Omega}$$

- 4 On trouve une très grande valeur de résistance de fuite, ce qui peut surprendre de prime abord. Cependant, cela est cohérent avec le fait que pour être idéal, aucune intensité ne doit circuler dans la résistance de fuite, puisqu'elle est en parallèle avec le condensateur. On modélise un condensateur idéal en prenant $R_f \rightarrow +\infty$, la valeur est donc cohérente.



IV Circuit RL et oscilloscope

1



◇ Voie 1 : $u_{Y_1} = u_R = Ri$

◇ Voie 2 : $u_{Y_2} = -u_L = -L \frac{di}{dt}$

2 D'après la loi d'OHM : $u_R = Ri(t)$. La courbe Y_1 est donc une image de l'intensité dans le circuit.

Or, cette courbe est formée de morceaux de droites successivement croissantes et décroissantes. Sur chaque portion, la dérivée de la courbe est constante : sur les portions décroissantes, la pente est négative, et inversement ; elle fait des « planchers » successifs.

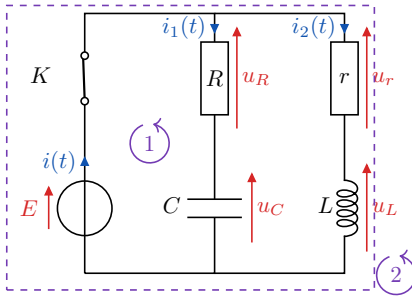
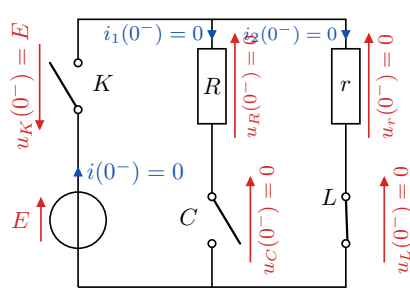
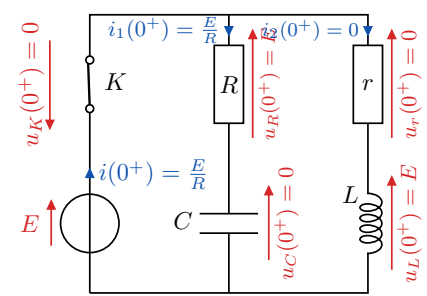
Ainsi, la courbe de la voie Y_2 correspond bien à l'**opposé de la dérivée de la courbe de la voie Y_1** (à quelques facteurs R et L près).

Correction du TD d'entraînement



I Circuit RL – RC

1 On étudie flèche le circuit $\forall t$, et on trouve les conditions initiales grâce à deux schémas :

FIGURE E3.1 – Circuit $\forall t$ FIGURE E3.2 – Circuit à $t = 0^-$ FIGURE E3.3 – Circuit à $t = 0^+$

On trouve $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur, et $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$ par continuité du courant traversant la bobine ; on fait attention à ce que **seule** i_2 est continue, pas i_1 . On trouve ensuite les équations différentielles par lois des mailles :

Maille 1

$$\begin{aligned} u_R + u_C &= E \\ \Leftrightarrow Ri_1 + u_C &= E \\ \Rightarrow R \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{\tau_1} i_1 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} u_R = Ri_1 \\ \frac{d}{dt}(\cdot) \\ \frac{du_C}{dt} = \frac{i_1}{C} \\ \div R \text{ et } \tau_1 = RC \end{array} \right\}$$

Maille 2

$$\begin{aligned} u_L + u_r &= E \\ \Leftrightarrow u_L + ri_2 &= E \\ \Leftrightarrow L \frac{di_2}{dt} + ri_2(t) &= E \\ \Leftrightarrow \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{\tau_2} i_2 &= \frac{E}{L} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} u_r = ri_2 \\ u_L = L \frac{di_2}{dt} \\ \div L \text{ et } \tau_2 = \frac{L}{r} \end{array} \right\}$$

Pour la maille 1, on cherche une équation en i_1 ; on aurait pu, remplacer i_1 par $C \frac{du_C}{dt}$ puis résoudre l'ED en u_C , pour, à la fin, prendre $i_1 = C \frac{du_C}{dt}$ à nouveau. Mais plutôt que de dériver la solution finale, on peut directement dériver l'équation de départ ! On résout les 2 ED ensuite :

Maille 1

$$\begin{aligned} \boxed{3} \text{ et } \boxed{4} \quad i_1(t) &= Ke^{rt} \Rightarrow r = -\frac{1}{\tau_1} \\ \boxed{5} \quad i_1(t) &= Ke^{-\frac{t}{\tau_1}} \\ \boxed{7} \quad i_1(0^+) &= K = \frac{E}{R} \\ \boxed{8} \quad i_1(t) &= \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \end{aligned}$$

Maille 2

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad i_{2,p} = \lambda &\Rightarrow \frac{\lambda}{\tau_2} = \frac{E}{L} \Leftrightarrow i_{2,p} = \frac{E}{r} \\ \boxed{2} \quad \frac{di_{2,h}}{dt} + \frac{1}{\tau_2} i_{2,h} &= 0 \\ \boxed{3} \text{ et } \boxed{4} \quad i_{2,h}(t) &= K'e^{rt} \Rightarrow r = -\frac{1}{\tau_2} \\ \boxed{5} \quad i_{2,h}(t) &= K'e^{-\frac{t}{\tau_2}} \\ \boxed{6} \quad i_2(t) &= i_{2,h}(t) + i_{2,p} = K'e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{E}{r} \\ \boxed{7} \quad i_2(0^+) = 0 &= K' + \frac{E}{r} \Leftrightarrow K' = -\frac{E}{r} \\ \boxed{8} \quad i_2(t) &= \frac{E}{r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \end{aligned}$$

Important E3.1 : Dériver des équations différentielles

Plutôt que de résoudre une équation différentielle puis de dériver la solution, il peut être plus simple de **dériver l'équation différentielle**.

Le même raisonnement s'applique pour les lois de KIRCHHOFF : **on peut dériver la LdN ou la LdM** pour faire apparaître des RCT qui nous intéressent.

2

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{E}{r} \left(e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$$

Il faut donc :

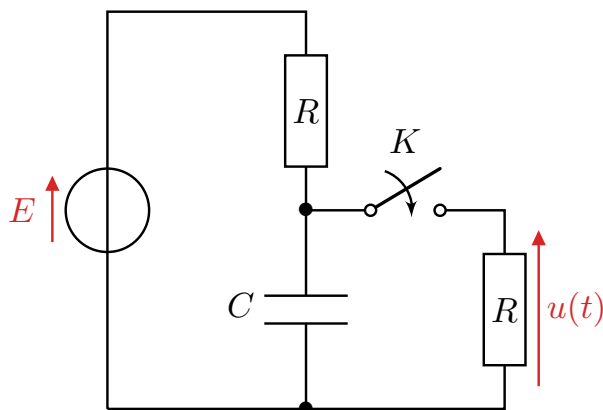
$$\frac{E}{R} = \frac{E}{r} \quad \text{et} \quad \tau_1 = \tau_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r = R} \quad \text{et} \quad \frac{L}{r} = RC \Leftrightarrow \boxed{L = R^2 C}$$



II Circuit RC à 2 mailles

On considère le circuit représenté ci-contre, pour lequel l'interrupteur K est ouvert depuis longtemps. On le ferme à l'instant $t = 0$.



1

En régime permanent, le condensateur est chargé et se comporte comme un interrupteur ouvert : il coupe donc l'intensité i_C dans sa branche.

Ainsi, l'intensité i est la même dans les deux résistances, qui sont donc **en série**. On applique alors le pont diviseur de tension :

$$u_{C,\infty} = u_\infty = \frac{R}{R+R} E \Leftrightarrow \boxed{u_{C,\infty} = \frac{E}{2}}$$

Ainsi, la tension aux bornes du condensateur diminue de E à $E/2$: on vient en effet de modéliser un condensateur réel qui se décharge à travers la résistance de fuite.

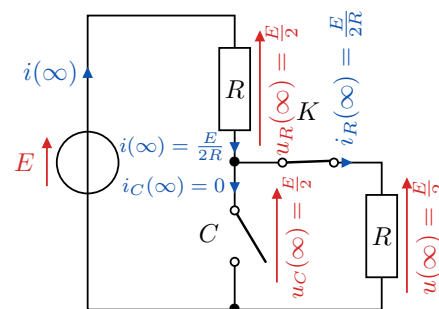


FIGURE E3.4 – Pour $t \rightarrow \infty$

2 On étudie flèche le circuit $\forall t$, et on trouve les conditions initiales grâce à deux schémas :

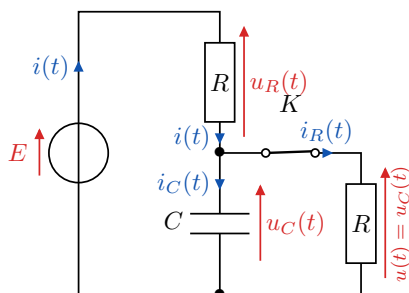


FIGURE E3.5 – Circuit $\forall t$

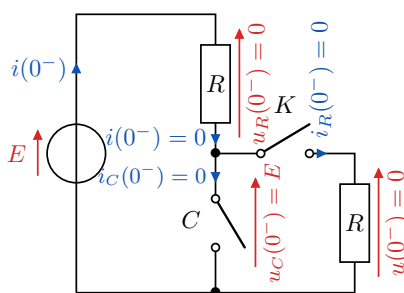


FIGURE E3.6 – Circuit à $t = 0^-$

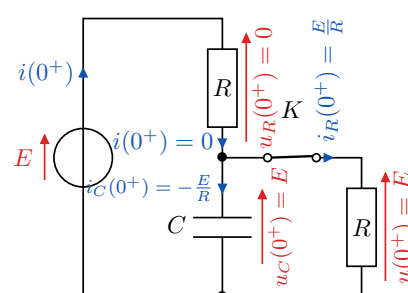


FIGURE E3.7 – Circuit à $t = 0^+$

On trouve $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur ; $i_C(0^+) < 0$ car en fermant l'interrupteur, le condensateur se comporte comme un générateur de tension qui se décharge à travers la résistance en parallèle.

3

Loi des mailles :

$$u_R + u = E \Leftrightarrow Ri + u = E$$

On prend garde à ne pas confondre i et i_C !

Loi des nœuds :

$$i = i_C + i_R \Leftrightarrow \boxed{i = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}}$$

Dans la maille :

$$R \left(C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} \right) + u = E \Leftrightarrow RC \frac{du}{dt} + 2u = E$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dt} + \frac{2}{RC} u = \frac{E}{RC} \Leftrightarrow \frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{1}{\tau} \frac{E}{2} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{RC}{2}$$

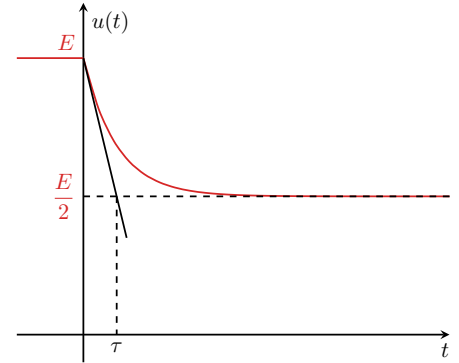
[1] et [2] $\frac{du_h}{dt} + \frac{1}{\tau} u_h = 0$ avec $u_h(t) = u(t) - \frac{E}{2}$

[3] et [4] $u_h(t) = K e^{rt} \Rightarrow r K e^{rt} + \frac{1}{\tau} K e^{rt} = 0 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{\tau}$

[5] et [6] $u_h(t) = K e^{-t/\tau} \Leftrightarrow u(t) = u_h(t) + u_p = K e^{-t/\tau} + \frac{E}{2}$

[7] $\frac{u(0)}{=E} = K + \frac{E}{2} \Leftrightarrow K = \frac{E}{2}$

[8] $u(t) = \frac{E}{2} (1 + e^{-t/\tau})$



Attention E3.1 : Constante de temps et consigne

On trouve τ à l'intersection de la tangente en $t = 0$ avec l'asymptote horizontale, ici $\frac{E}{2}$, et pas avec $u = 0$!!

Important E3.2 : Méthode avec plusieurs mailles

- [1] Écrire les différentes lois du circuit (LdN, LdM, RCT...);
- [2] Isoler la grandeur dont on veut l'équation différentielle en éliminant les autres;
- [3] Mettre l'équation sous forme canonique ($\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = \frac{y_{eq}}{\tau}$) en identifiant y_{eq} et τ ;
- [4] Établir les conditions initiales avec l'énoncé et les continuités;
- [5] Résoudre l'équation différentielle.

III Régime transitoire d'un circuit RC

- [1] ◇ Initialement, le condensateur est déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$. De plus, la tension aux bornes d'un condensateur est une grandeur continue, donc $u_c(0^-) = u_c(0^+)$. On en déduit alors que $u_c(0^+) = 0$.

◇ Si on applique la loi d'Ohm aux 2 résistances (en série) et la loi des mailles à $t = 0^+$, on trouve directement :

$$i(0^+) = \frac{E}{R + R_g}. \quad \text{On observe que l'intensité n'est pas continue dans ce circuit car } i(0^-) = 0.$$

- [2] On applique la loi des mailles, la loi d'Ohm et la loi des condensateurs dans le circuit pour des $t > 0$:

$$E = (R + R_g)i + u_c(t) \quad \text{or} \quad i(t) = C \frac{du_c}{dt} \quad \text{donc} \quad E = (R + R_g)C \frac{du_c}{dt} + u_c(t)$$

- [3] La constante de temps est :

$$\tau = (R + R_g)C$$

Il s'agit de l'ordre de grandeur de la durée de charge ou de décharge du condensateur.

- [4] L'équation différentielle se réécrit :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

La solution homogène $u_{c,h}(t)$ et la solution particulière $u_{c,p}$ sont :

$$u_{c,h}(t) = A e^{-t/\tau} ; \quad u_{c,p}(t) = E \Rightarrow u_c(t) = A e^{-t/\tau} + E$$

Pour trouver la constante A , on utilise la condition initiale :

$$u_c(0) = 0 \Leftrightarrow A = -E \Leftrightarrow u_c(t) = E (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\boxed{5} \quad u_c(t_1) = 0,9E \Leftrightarrow 1 - e^{-t_1/\tau} = 0,9 \Leftrightarrow e^{-t_1/\tau} = 0,1 \Leftrightarrow \boxed{t_1 = \tau \ln(10) \approx 2,3\tau}$$

$\boxed{6}$ $\diamond$ Sur la voie B , on mesure la tension $u_c(t)$. Cette fonction est continue en $t = 0$. Il s'agit donc de la courbe (1).

$\diamond$ Sur la voie A , on mesure la tension $u_c(t) + Ri(t)$. Or la fonction $i(t)$ n'est pas continue en $t = 0$, donc il s'agit de la courbe (2).

$\boxed{7}$ On doit utiliser un **couplage DC** car on étudie un signal continu (et non sinusoïdal).

$\boxed{8}$ À l'instant $t = 0^+$, on a :

$$u_c(0^+) + Ri(0^+) = 0 + \frac{RE}{R + R_g}$$

La tension au point P est donc $\boxed{\frac{RE}{R + R_g}}$.

$\boxed{9}$ D'après la courbe, la tension en P est $4E/6$. ON en déduit que :

$$\frac{4E}{6} = \frac{RE}{R + R_g} \Leftrightarrow \frac{4(R + R_g)}{6} = R \Leftrightarrow \boxed{R_g = \frac{R}{2} = 50 \Omega}$$

$\boxed{10}$ D'après la courbe expérimentale :

$$\diamond \quad \boxed{E = 6 \text{ V}};$$

$$\diamond \quad t_1 = 0,42 \text{ ms.}$$

On en déduit que : $C = \frac{\tau}{R + R_g} = \frac{t_1}{\ln(10) \times (R + R_g)}$ soit $\underline{C = 1,2 \mu\text{F}}$

$\boxed{11}$ La demi-période T du signal utilisé est supérieure à 8 carreaux, donc :

On en déduit que $T > 2 \times 0,8 = 1,6 \text{ ms}$ $f = \frac{1}{T} < \frac{1}{1,6 \times 10^{-3}} = \boxed{625 \text{ Hz}}$

$\boxed{12}$ Pour observer l'intensité du courant, on peut observer la tension aux bornes de la résistance R (qui est une image de i via la loi d'Ohm) en affichant $u_A - u_B$.