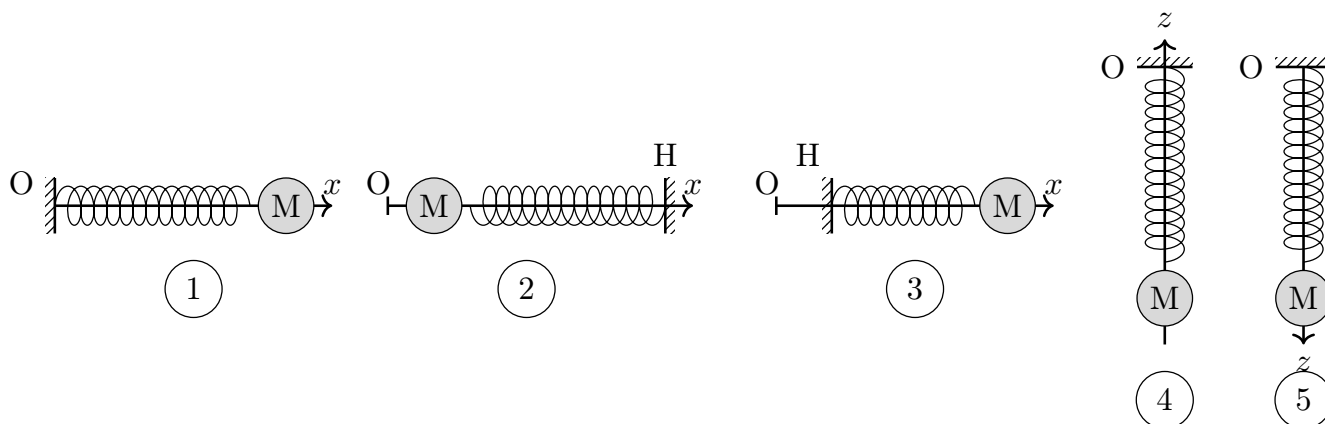


TD application : oscillateurs harmonique et amorti



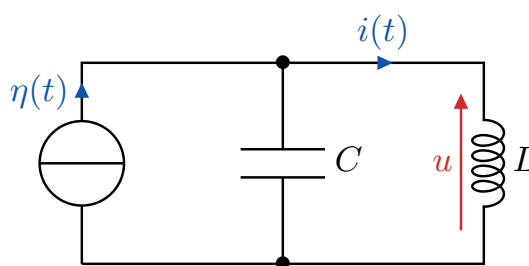
I Forces de rappel d'un ressort

- 1 Indiquer l'expression de la force de rappel $\vec{F}$ du ressort dans les différentes situations ci-dessous, en fonction de sa constante de raideur k et de sa longueur à vide ℓ_0 , de la position de la masse x ou z (repérée par rapport à l'origine O du ressort), du vecteur unitaire $\vec{u}_x$ ou $\vec{u}_z$ et si nécessaire de la coordonnée x_H du point H.



II Étude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique

Dans le circuit ci-contre, la source idéale de courant est brusquement éteinte. On le modélise par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On appelle $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.

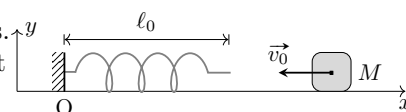


- 1 Exprimer $\frac{d\mathcal{E}_{\text{tot}}}{dt}$ en fonction de i , $\frac{di}{dt}$ et $\frac{d^2i}{dt^2}$.
- 2 Justifier qualitativement que $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i . Que peut-on en conclure ?
- 3 Retrouver cette équation par application des lois des nœuds et des mailles.
- 4 Établir les conditions initiales sur i et sa dérivée, par deux schémas d'abord puis en explicitant la détermination.
- 5 En déduire l'expression de $i(t)$, puis celle de $u(t)$.



III Masse percutant un ressort

Un ressort (raideur k et longueur à vide ℓ_0) fixé en O est initialement au repos. Une masse m glisse sans frottement à vitesse constante $\vec{v} = -v_0\vec{u}_x$ avec $v_0 > 0$ et s'accroche *définitivement* au ressort à l'instant $t = 0$.



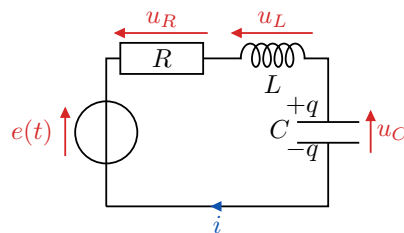
- 1 Déterminer l'équation du mouvement de la masse une fois qu'elle est accrochée (pour $t \geq 0$).
- 2 Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.
- 3 À quelle condition la masse vient-elle percuter la paroi en O ?



IV RLC sur q et bilan d'énergie

Un circuit électrique est composé d'une résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C . Ces dipôles sont disposés en série et on soumet le circuit à un échelon de tension tel que : $\begin{cases} e(t < 0) = 0 \\ e(t \geq 0) = E \end{cases}$. On pose $\gamma = \frac{R}{2L}$ et

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



- 1 Expliquer simplement pourquoi à $t = 0^-$ la charge q et le courant i sont nuls. En déduire les conditions initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée. Deux schémas sont attendus.
- 2 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur pour $t \geq 0$ est :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L}$$

Préciser, en les justifiant, les valeurs initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée.

Le circuit présente différents régimes suivant les valeurs de R , L et C . On suppose dans la suite la condition $\omega_0 > \gamma$ réalisée.

- 3 Montrer que l'expression de la charge pour $t \geq 0$ peut se mettre sous la forme

$$q(t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] e^{-\gamma t} + D$$

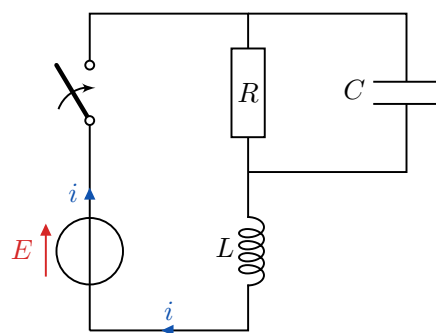
avec ω une constante à exprimer en fonction de ω_0 et γ , et A , B et D des constantes à exprimer en fonction de C , E , ω et γ .

- 4 Exprimer le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$ en fonction de C , E , ω_0 et γ .
- 5 Donner l'allure des courbes $q(t)$ et $i(t)$. Quelles sont leurs valeurs à la fin du régime transitoire ? Justifier par des considérations simples ces valeurs atteintes.
- 6 Déterminer l'énergie totale $\mathcal{E}_G$ fournie par le générateur ainsi que l'énergie $\mathcal{E}_{LC}$ emmagasinée dans la bobine et le condensateur à la fin du régime transitoire en fonction de C et E . En déduire l'énergie dissipée par effet JOULE dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime particulier dans lequel se trouve le circuit ? Interpréter le résultat paradoxal qui apparaît dans le cas limite $R \rightarrow 0$.



V Oscillateur amorti RLC à 2 mailles

Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.



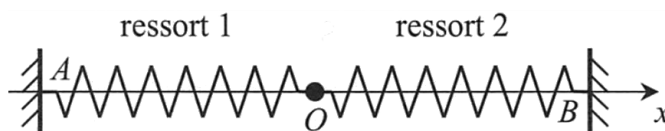
- 1 Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i .
- 2 L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.
- 3 Expliquer qualitativement l'expression du facteur de qualité.
- 4 Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.
- 5 En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

TD entraînement : oscillateurs harmonique et amorti



I Oscillateur à deux ressorts

Un mobile supposé ponctuel de masse m est astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction (Ox) . Ce mobile est relié par deux ressort linéaires à deux points fixes A et B . On le repère par sa position $OM = x$.



Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur k et même longueur au repos ℓ_0 . Dans la **position d'équilibre** du système, les longueurs des ressorts sont identiques et **valent** ℓ_{eq} (avec $\ell_{eq} \neq \ell_0$), et le mobile se trouve à l'origine O de l'axe.

On se place dans le référentiel terrestre (lié au sol), considérée comme galiléen. À $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position $x_0 \neq 0$.

1 Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

- Refaire un schéma **hors équilibre**, indiquant notamment ce que représente ℓ_{eq} et les distances ℓ_1 et ℓ_2 , puis établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
- Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 propres en fonction de k et m .
- Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

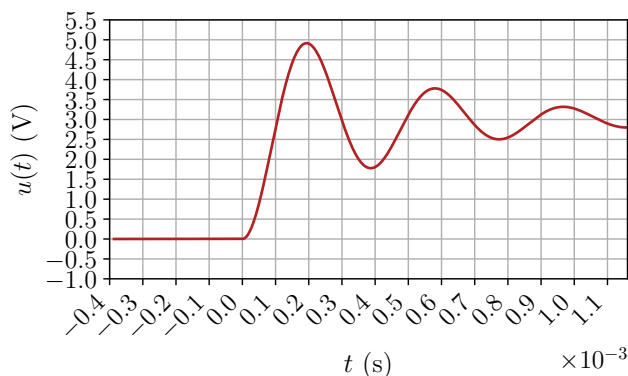
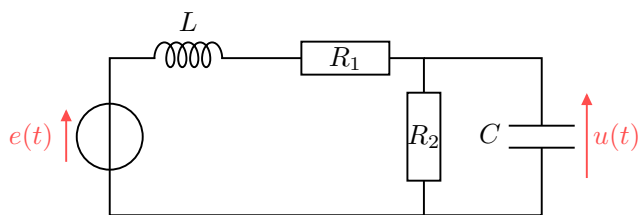
2 En fait il existe entre le mobile et la tige un frottement de type visqueux linéaire, la force de frottement s'exprime $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ (avec $\alpha > 0$ et $\vec{v}$ la vitesse de la masse m dans le référentiel terrestre).

- Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On posera $h = \frac{\alpha}{m}$.
- Montrer que lorsque $\alpha < 2^{3/2}\sqrt{km}$, le mouvement comporte des oscillations amorties. Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales et exprimer la pseudo-période T en fonction de ω_0 et h .



II Décrément logarithmique électrique

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension $e(t)$ tel que $\begin{cases} e(t < 0) = 0 \\ e(t \geq 0) = E \end{cases}$ dans le circuit ci-dessous.



1 Déterminer la valeur u_∞ vers laquelle tend $u(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Un schéma équivalent est attendu.

2 Montrer que $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty$. Exprimer λ et ω_0 en fonction de L , C , R_1 et R_2 .

- 3 En supposant un régime pseudo-périodique, exprimer la forme générale de $u(t)$ en fonction de u_∞ , λ , de la pulsation et de deux constantes d'intégration qu'on ne cherche pas à déterminer pour le moment.
- 4 Justifier entièrement les conditions initiales. Deux schémas sont attendus.
- 5 Déterminer alors l'expression complète de $u(t)$ en fonction de u_∞ , λ et Ω .
- 6 Déterminer, en détaillant vos points de mesures, la valeur numérique de la pseudo-période T .
- 7 Déterminer, en détaillant vos points de mesures, la valeur numérique du décrement logarithmique

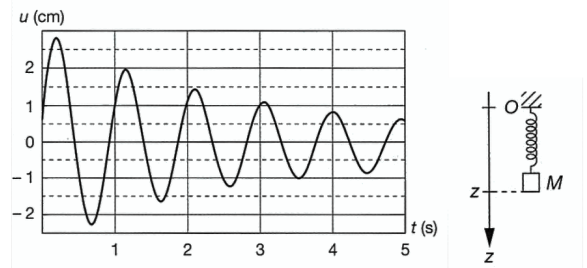
$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{u(t) - u_\infty}{u(t + nT) - u_\infty} \right)$$

- 8 Déterminer la relation entre δ , λ et T . En déduire la valeur numérique de λ .
- 9 Sachant que $R_1 = 1,0 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$ et $L = 500 \text{ mH}$, déterminer la valeur de C .



III Décrement logarithmique mécanique

Une masse m est accrochée à un ressort de raideur $k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 10 \text{ cm}$, fixé au point O . En plus de son poids et de la force de rappel du ressort, la masse est soumise à une force de frottement fluide $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$. Un capteur fournit l'évolution de $u(t) = z(t) - z_{\text{eq}}$ au court du temps.



Aide au calcul

$$\pi \approx 3 \quad ; \quad 7,5^2 \approx 56 \quad ; \quad \frac{10}{56} \approx 0,18 \quad ; \quad \sqrt{1,8} \approx 1,3$$

- 1 Établir entièrement le système d'étude avec un schéma.
- 2 Établir l'équation d'évolution de $z(t)$. Quelle est la position d'équilibre z_{eq} de la masse ? Commenter. En déduire une équation satisfaite par $u(t)$.
- 3 Exprimer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction des données du problème.
- 4 Estimer la valeur de Q en justifiant précisément votre choix.
- 5 Résoudre l'équation différentielle en introduisant une constante de temps τ et une pseudo-pulsation Ω . On ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration.
- 6 Exprimer la pseudo-période T en fonction de T_0 et de Q . Est-elle plus grande ou plus petite que T_0 ?

On peut accéder au facteur de qualité en étudiant le **décrement logarithmique** δ :

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{u(t) - u_\infty}{u(t + nT) - u_\infty} \right)$$

avec n le nombre de périodes sélectionnées.

- 7 Déterminer la relation entre δ , τ et T d'abord, puis la relation entre δ et Q uniquement ensuite ; isoler finalement Q en fonction de δ .

On donne dans le Tableau E4 et 5.1 les valeurs expérimentales du décrement logarithmique relevées sur l'oscillogramme.

TABLEAU E4 ET 5.1 – Valeurs expérimentales

n	$u(t_{\max} + nT)$	δ
0	2,7	0,30
1	2,0	0,29
2	1,5	0,31
3	1,1	0,31
4	0,8	0,29
5	0,6	

- [8] Estimer à l'aide des données expérimentales le facteur de qualité Q , avec 2 chiffres significatifs. Comparer à votre estimation faite Question [4]. Chercher une valeur entière de Q à partir de laquelle on peut considérer que $\sqrt{4Q^2 - 1} \approx \sqrt{4Q^2} \approx 10$: est-ce vérifié ici ?
- [9] Montrer que l'on peut alors approximer la pseudo-pulsation Ω par la pulsation propre ω_0 . Estimer T avec 1 chiffre significatif en prenant 5 périodes sur l'oscillogramme. En déduire ω_0 , l'exprimer avec 2 chiffres significatifs.
- [10] En déduire les valeurs de m et α , avec 2 chiffres significatifs.