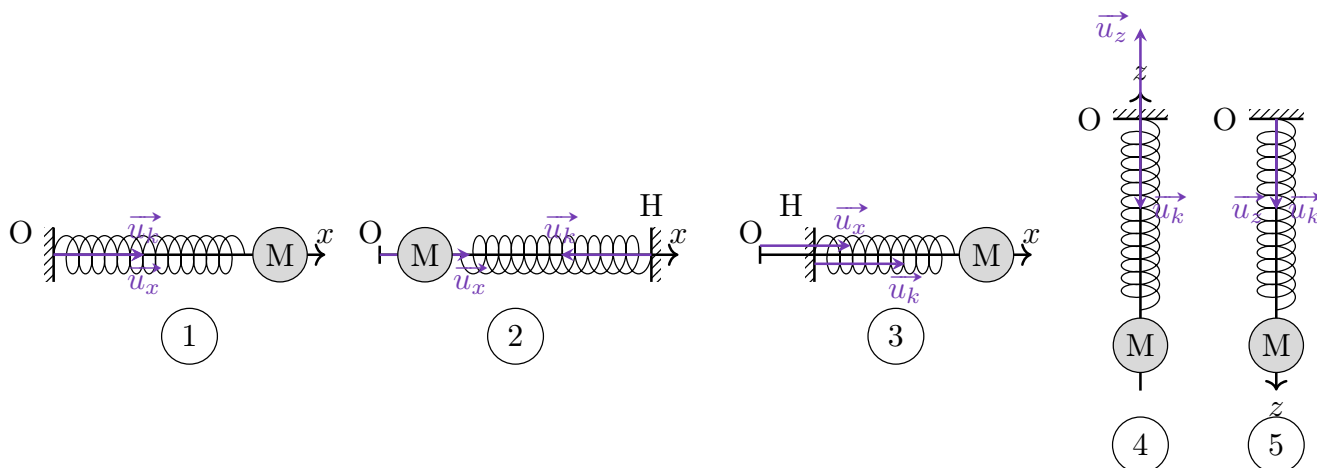


Correction du TD d'application



I Forces de rappel d'un ressort

- 1 On commence par tracer les vecteurs unitaires $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$, puis le vecteur $\vec{u}_k$ pour chaque situation :



Or, la loi de HOOKE stipule que $\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_k$: il nous faut également la longueur $\ell(t)$ du ressort dans chaque situation, en faisant attention au fait que **la longueur ℓ est forcément positive**. On a donc :

- ① $\vec{u}_k = \vec{u}_x$ et $\ell(t) = x(t)$ soit $\vec{F} = -k(x(t) - \ell_0)\vec{u}_x$;
- ① $\vec{u}_k = -\vec{u}_x$ et $\ell(t) = x_H - x(t)$ soit $\vec{F} = k(x_H - x(t) - \ell_0)\vec{u}_x$;
- ① $\vec{u}_k = \vec{u}_x$ et $\ell(t) = x(t) - x_H$ soit $\vec{F} = -k(x(t) - x_H - \ell_0)\vec{u}_x$;
- ① $\vec{u}_k = -\vec{u}_z$ et $\ell(t) = -z(t)$ (car $z(t) < 0$) soit $\vec{F} = k(-z(t) - \ell_0)\vec{u}_z \Leftrightarrow \vec{F} = -k(z(t) + \ell_0)\vec{u}_z$;
- ① $\vec{u}_k = \vec{u}_z$ et $\ell(t) = z(t)$ soit $\vec{F} = -k(z(t) - \ell_0)\vec{u}_z$;



II Étude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique

- 1 Une fois le générateur de courant stoppé, l'énergie totale est la somme de l'énergie stockée dans le condensateur et de celle stockée dans la bobine, soit

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

En dérivant on a donc

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{tot}}}{dt} = \frac{1}{2}C \cdot 2u \frac{du}{dt} + \frac{1}{2} \cdot 2i \frac{di}{dt}$$

Comme on demande de ne faire apparaître que i dans le résultat, on remplace u avec la relation courant-tension de la bobine et on développe :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_{\text{tot}}}{dt} &= \frac{1}{2}C \cdot 2L \frac{di}{dt} \frac{d}{dt} \left(L \frac{di}{dt} \right) + \frac{1}{2}L \cdot 2i \frac{di}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{E}_{\text{tot}}}{dt} &= L^2C \frac{di}{dt} \frac{d^2i}{dt^2} + Li \frac{di}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{E}_{\text{tot}}}{dt} &= L \frac{di}{dt} \left(LC \frac{d^2i}{dt^2} + i \right) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On développe} \\ \text{On factorise par } L \frac{di}{dt} \end{array} \right\}$$

Attention E4 et 5.1 : Courant de C

Le courant circulant dans le condensateur est $i_C = C \frac{du}{dt}$, mais i_C n'est **pas** i : $\eta = i_C + i$.



- 2 Le circuit ne compte qu'une bobine et un condensateur qui stockent de l'énergie sans la dissiper, et donc aucune résistance. L'énergie électrique dans le circuit est donc constante, et on en déduit que $\forall t \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad L \frac{di}{dt} \left(LC \frac{d^2 i}{dt^2} + i \right) = 0$$

On a donc un produit qui est nul. Or, la tension de la bobine $L \frac{di}{dt}$ ne peut être constamment nulle, c'est donc le terme entre parenthèses qui est nul, c'est-à-dire :

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + i = 0 \iff \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Important E4 et 5.1 : Équation différentielle

On retrouve bien l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, sans passer par les lois des nœuds et des mailles. Cette approche énergétique est très élégante et efficace ; nous la reverrons en mécanique puis partout en physique.

- 3 C et L sont en parallèle, donc partagent la même tension u . Soit i_C le courant traversant C . Comme $\eta(t \geq 0) = 0$, la loi des nœuds donne

$$0 = i_C + i \quad \text{donc} \quad C \frac{du}{dt} + i = 0$$

avec la RCT du condensateur. Comme u est aussi la tension de L , avec la RCT de la bobine on retrouve bien

$$\boxed{LC \frac{d^2 i}{dt^2} + i = 0}$$

4

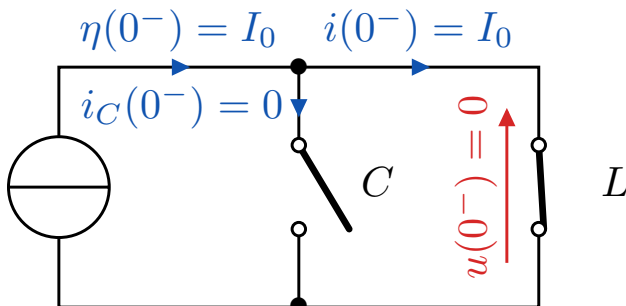


FIGURE E4.1 – En 0^-

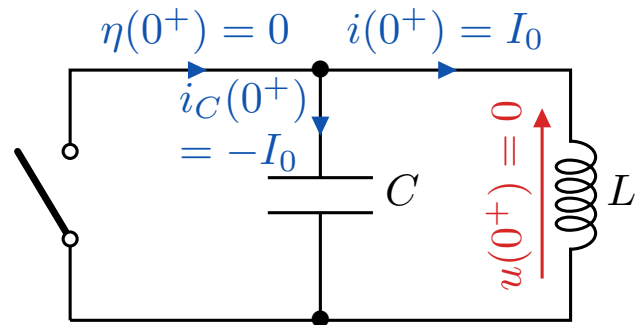


FIGURE E4.2 – En 0^+

À $t = 0^-$, le circuit est alimenté par $\eta(0^-) = I_0$ et on suppose le régime permanent atteint : la bobine est donc équivalente à un fil, et le condensateur à un interrupteur ouvert. On en déduit donc

$$i(0^-) = I_0 \quad \text{et} \quad u(0^-) = 0$$

Par continuité de i traversant la bobine et de u aux bornes du condensateur, on a

$$\boxed{i(0^-) = i(0^+) = I_0} \quad \text{et} \quad u(0^-) = u(0^+) = 0$$

Or, $u(0^+) = L \frac{di}{dt}$ d'après la RCT de la bobine. La seconde condition initiale est donc $\boxed{\frac{di}{dt} \Big|_{0^+} = 0}$

- 5 L'équation étant homogène, on injecte la forme générique :

$$i(t) = K e^{rt} \Rightarrow r_{\pm} = \pm j\omega_0$$

$$\Leftrightarrow i(t) = K_1 e^{j\omega_0 t} + K_2 e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow i(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Première CI :

$$i(0) = I_0 = A$$

Seconde CI :

$$\frac{di}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \frac{di}{dt} \Big|_0 = \omega_0 B = 0 \quad \text{donc} \quad B = 0$$

D'où

$$\boxed{i(t) = I_0 \cos(\omega_0 t)}$$

et

$$u(t) = L \frac{di}{dt} \Leftrightarrow \boxed{u(t) = -LI_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)}$$

On retrouverait bien $i_C = -C \frac{du}{dt} = -i$ d'après la loi des nœuds.



III Masse percutant un ressort

1

- ◇ **Système** : {point M} de masse m
- ◇ **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen
- ◇ **Repère** : $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (voir schéma)
- ◇ **Repérage** : avec $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ la dérivée **temporelle**,

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{u}_x ; \vec{v} = \dot{x}(t)\vec{u}_x ; \vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{u}_x$$

- ◇ **Longueur du ressort** : $\ell(t) = x_M(t) - x_O = x(t)$
- ◇ **Position initiale** : $x(0) = \ell_0$
- ◇ **Vitesse initiale** : $\vec{v}(0) = -v_0\vec{u}_x$

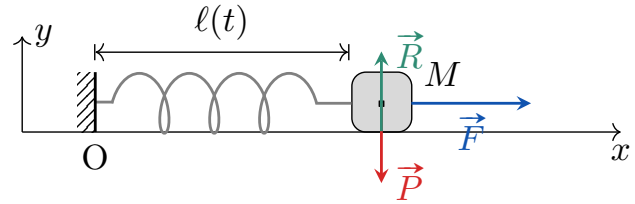


FIGURE E4.3

- ◇ **Bilan des forces** :

Poids	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$
Réaction	$\vec{R} = R\vec{u}_y$
HOOKE	$\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_x$

Avec le PFD on a donc

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x}(t)\vec{u}_x = -mg\vec{u}_y + R\vec{u}_y - k(\underbrace{\ell(t) - \ell_0}_{=x(t)})\vec{u}_x$$

On effectue le changement de variable $x_h(t) = x(t) - \ell_0$, et sur l'axe $\vec{u}_x$ on trouve bien

$$\boxed{m\ddot{x}_h(t) + kx_h(t) = 0} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}_h(t) + \omega_0^2 x_h(t) = 0}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La projection sur $\vec{u}_y$ montre que la réaction du support compense le poids.

2

On a :

$$\boxed{x_h(0) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\left. \frac{dx_h}{dt} \right|_0 = -v_0}$$

Forme générique : $x_h(t) = Ke^{rt} \Rightarrow r_{\pm} = \pm j\omega_0$ soit $x_h(t) = K_1 e^{j\omega_0 t} + K_2 e^{-j\omega_0 t}$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)}$$

CI :

$$x_h(0) = \underbrace{A \cos(0)}_{=1} + \underbrace{B \sin(0)}_{=0} \Leftrightarrow A = 0$$

$$\left. \frac{dx_h}{dt} \right|_0 = -A\omega_0 \underbrace{\sin(0)}_{=0} + B\omega_0 \underbrace{\cos(0)}_{=1} \Leftrightarrow B = -\frac{v_0}{\omega_0}$$

On a donc

$$x_h(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow \boxed{x(t) = \ell_0 - \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

- 3 En supposant que le ressort puisse se comprimer à l'infini, la masse vient percuter la paroi située en O si l'amplitude de $x(t)$ est égale à 0, c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{v_0}{\omega_0} = \ell_0} \Leftrightarrow \boxed{v_0 = \omega_0 \ell_0}$$

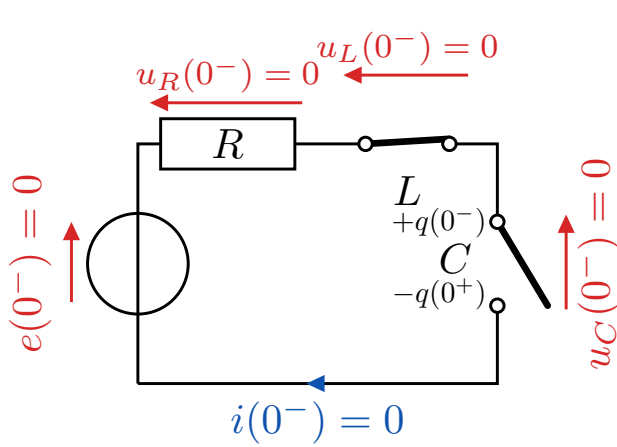
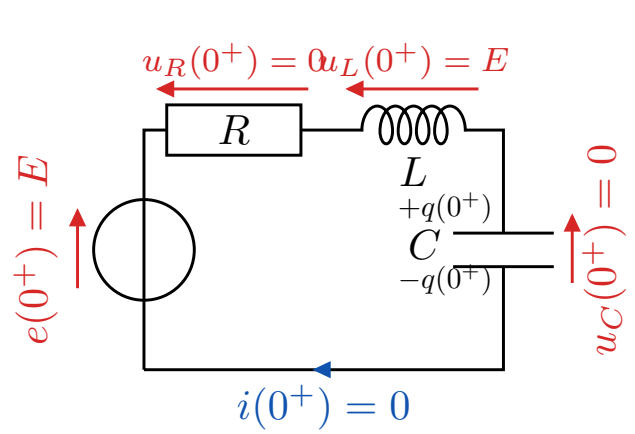
On remarque donc que plus v_0 est grande, plus cela est facile, mais également que plus ω_0 est faible est plus cela est facile.

En effet, plus la pulsation est élevée et moins la masse a d'amplitude à v_0 fixée. Ceci correspond bien à l'intuition qu'on pourrait en avoir énergétiquement : une énergie mécanique totale se répartit dans l'énergie potentielle élastique d'une part, c'est-à-dire la distance d'élongation du ressort, et dans l'énergie cinétique d'autre part, donc dans sa vitesse.



IV RLC sur q et bilan d'énergie

1

FIGURE E5.4 – En 0^- FIGURE E5.5 – En 0^+

À $t = 0^-$, le circuit est depuis longtemps sous la tension $e = 0$; il a donc atteint son régime permanent, et le condensateur s'est déchargé et est équivalent à un interrupteur ouvert : forcément,

$$\boxed{i(0^-) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{q(0^-) = Cu(0^-) = 0}$$

De plus, la tension aux bornes d'un condensateur est continue donc sa charge aussi, c'est-à-dire

$$\boxed{q(0^-) = q(0^+) = 0}$$

et comme le courant traversant une bobine est également continu, on a

$$i(0^-) = i(0^+) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\left. \frac{dq}{dt} \right|_{0^+} = 0}$$

- [2] Avec une loi des mailles, les RCT de la résistance, de la bobine et du condensateur et la relation $i = \frac{dq}{dt}$, on a

$$\begin{aligned} u_L + u_R + u_C &= E \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E \\ \Leftrightarrow L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} &= E \Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma \frac{dq}{dt} + \frac{q}{CL} = \frac{E}{L} \end{aligned}$$

- [3] L'équation caractéristique de discriminant Δ de l'équation homogène est

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$$

Comme $\omega_0 > \gamma$, on a $\Delta < 0$ et on est donc dans un régime pseudo-périodique. On aura donc

$$r_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{4(\omega_0^2 - \gamma^2)} \Leftrightarrow \boxed{r_{\pm} = -\gamma \pm j\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

La solution particulière est $\frac{E}{L\omega_0^2} = CE$, donc on aura la forme générale

$$\boxed{q(t) = e^{-\gamma t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + CE}$$

Avec la première CI,

$$q(0) = A + CE = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = -CE}$$

et avec la seconde,

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_0 = -\gamma A + B\omega = 0 \Leftrightarrow \boxed{B = -CE \frac{\gamma}{\omega}}$$

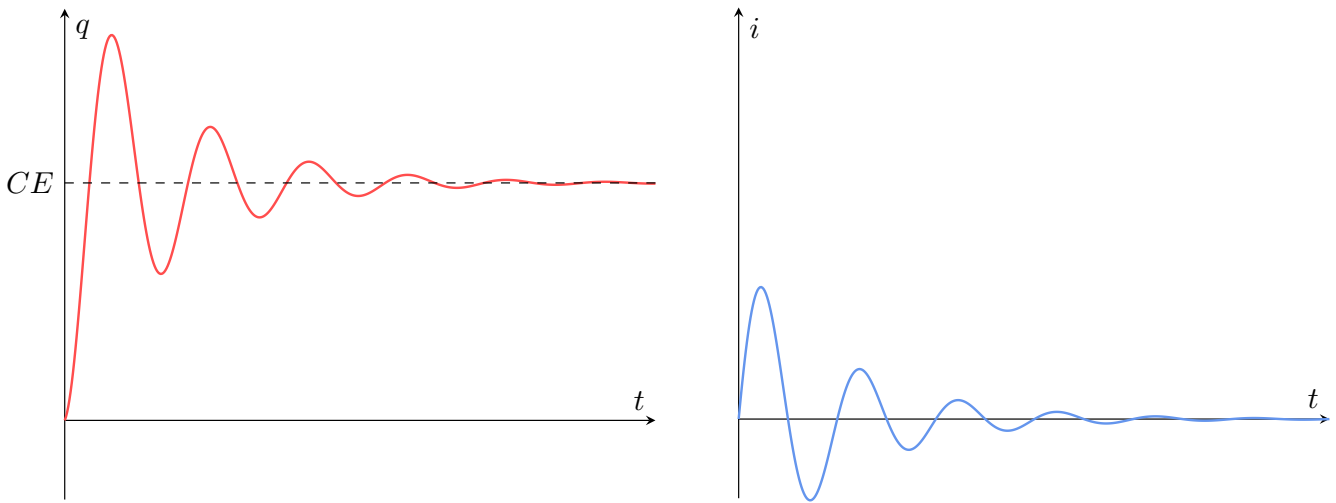
soit finalement

$$\boxed{q(t) = CE - CEe^{-\gamma t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega} \sin(\omega t) \right)}$$

4 On dérive q :

$$\begin{aligned}
 i(t) &= CE\gamma e^{-\gamma t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega} \sin(\omega t) \right) - CEe^{-\gamma t} \left(-\omega \sin(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega} \omega \cos(\omega t) \right) \\
 \Leftrightarrow i(t) &= CEe^{-\gamma t} \left(\cos(\omega t) [\gamma - \gamma] + \sin(\omega t) \left[\frac{\gamma^2}{\omega} + \omega \right] \right) \\
 \Leftrightarrow i(t) &= CEe^{-\gamma t} \cdot \frac{\gamma^2 + \omega^2}{\omega} \sin(\omega t) \\
 \Leftrightarrow i(t) &= CEe^{-\gamma t} \frac{\omega_0^2}{\omega} \sin(\omega t)
 \end{aligned}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \text{On factorise} \\ \text{Même dénominateur} \end{array} \right\} \omega^2 - \omega_0^2 - \gamma^2 \quad \blacksquare
 \end{array}$$

5 La charge finale atteinte est CE et le courant final est nul. Ces valeurs se retrouvent facilement en remarquant qu'en régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil ; le courant est alors nul, et ainsi les tensions aux bornes de L et R le sont également : la tension E du circuit est entièrement dans u_C , et sa charge est donc CE .



6 Un bilan de puissance sur le circuit, (i.e. **loi des mailles** $\times i$) donne

$$\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_J = \mathcal{P}_G \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{LC} + \varepsilon_J = \varepsilon_G}$$

On trouve donc naturellement que l'énergie du générateur se répartit entre la bobine, l'inductance et la résistance. On va donc déterminer ε_G et ε_{LC} pour trouver ε_J par différence.

L'énergie fournie par le générateur s'obtient en intégrant la puissance fournie Ei par le générateur entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$. En se rappelant que $i = \frac{dq}{dt}$, cette intégrale se ramène à une simple intégration sur q de valeur initiale 0 et de valeur finale CE :

$$\varepsilon_G = \int_0^\infty E i dt = \int_0^{CE} E dq = E [q]_{q=0}^{q=CE} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_G = CE^2}$$

L'énergie ε_{LC} emmagasinée par l'inductance et la capacité se calcule par différence des énergies stockées dans ces dipôles entre l'instant final et l'instant initial. Or, les deux dipôles sont initialement déchargés, et comme $i = 0$ à la fin l'énergie de la bobine est nulle. Ainsi,

$$\varepsilon_{LC} = \left[\frac{1}{2} L i(t)^2 + \frac{1}{2} \frac{q(t)^2}{C} \right]_{t=0}^{t=\infty} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_{LC} = \frac{1}{2} CE^2}$$

Ainsi,

$$\varepsilon_J = \varepsilon_G - \varepsilon_{LC} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_J = \frac{1}{2} CE^2}$$

Ces calculs sont indépendants du régime dans lequel se trouve le circuit. L'énergie fournie par le générateur est donc deux fois plus grande que celle stockée par la bobine et le condensateur, **indépendamment de la valeur de la résistance du circuit**.

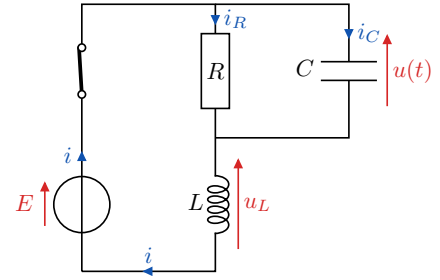
Extrapolé à $R \rightarrow 0$, ce résultat semble contredire le principe de conservation de l'énergie, puisque la seconde moitié d'énergie ne peut plus être dissipée par effet JOULE. En fait, pour $R \rightarrow 0$, le circuit oscille de façon sinusoïdale : on n'atteint jamais de régime permanent continu, et la bobine et le condensateur stockent et restituent alternativement de l'énergie.



V Oscillateur amorti RLC à 2 mailles

On est en présence d'un circuit à deux mailles. On applique la loi des nœuds :

$$\begin{aligned} i &= i_R + i_C \\ \Leftrightarrow i &= \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} i_C &= C \frac{du}{dt} \\ i_R &= \frac{u}{R} \end{aligned} \right\}$$



1

Il faut changer u en i . Or, $u_L = L \frac{di}{dt}$; il nous suffit donc de relier u à u_L par la loi des mailles :

$$\begin{aligned} E &= u + u_L \\ \Leftrightarrow u_L &= E - u \end{aligned}$$

Ainsi, en réinjectant :

$$\begin{aligned} i &= \frac{E}{R} - \frac{u_L}{R} - C \frac{du_L}{dt} \\ \Leftrightarrow i &= \frac{E}{R} - \frac{L}{R} \frac{di}{dt} - LC \frac{d^2 i}{dt^2} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} u_L &= L \frac{di}{dt} \end{aligned} \right\}$$

2

On cherche à l'écrire sous la forme canonique classique

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 i_\infty$$

L'identification à la forme précédente permet alors d'obtenir :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad Q = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad i_\infty = \frac{E}{R}$$

Avec ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur, Q le facteur de qualité et i_∞ la valeur prise par i pour $t \rightarrow \infty$.

3

Contrairement au RLC série, Q est proportionnel à R (et non inversement proportionnel). C'est normal car ici, l'énergie est plus rapidement dissipée si R est faible. Au contraire, si R est élevée ($R \rightarrow \infty$), la branche contenant R devient un interrupteur ouvert et le circuit devient équivalent à un oscillateur harmonique type LC série. Q tend alors logiquement vers l'infini.

4

On étudie les conditions initiales grâce à deux schémas :

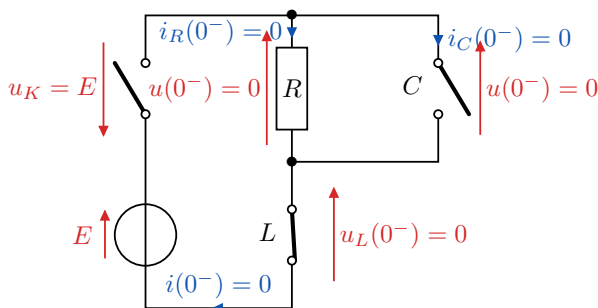


FIGURE E5.6 – Circuit à $t = 0^-$

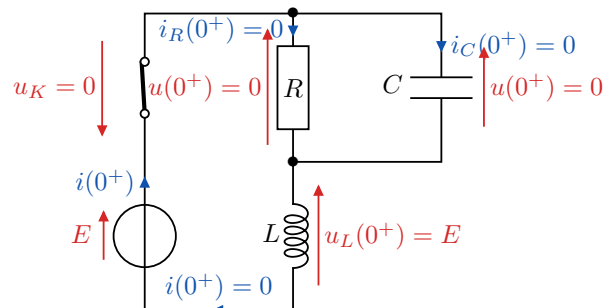


FIGURE E5.7 – Circuit à $t = 0^+$

◇ Analysons le régime permanent à $t = 0^-$, où le forçage est nul. Ce régime est continu, donc la bobine y est équivalente à un fil. Ainsi, d'après la loi des mailles,

$$0 = u(0^-) + 0 \quad \text{donc} \quad u(0^-) = 0$$

Par ailleurs, d'après la loi des nœuds,

$$i(0^-) = i_R(0^-) + i_C(0^-) = \frac{u(0^-)}{R} + 0 = 0$$

En effet, $i_C(0^-) = 0$ car le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert en régime permanent.

◇ En $t = 0^+$, la continuité de i au travers de la bobine impose :

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

Afin de trouver la condition sur $\frac{di}{dt}$, il faut déterminer la valeur de $u_L(0^+)$. Comme on cherche une tension, on utilise la loi des mailles à $t = 0^+$

$$E = u(0^+) + u_L(0^+)$$

Or, u étant la tension aux bornes d'un condensateur, elle est nécessairement continue et égale à sa valeur en 0^- donc

$$u_L(0^+) = E \quad \text{soit} \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = \frac{E}{L}$$

5 Le courant $i(t)$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière de l'équation différentielle complète et d'une solution de l'équation homogène. Comme le forçage (qui se lit dans le second membre) est constant, le régime permanent (qui se lit dans la solution particulière) est constant aussi. La solution particulière est donc telle que

$$0 + 0 + \frac{1}{LC}i_p = \frac{E}{RLC} \quad \text{d'où} \quad i_p = \frac{E}{R}$$

Remarque : La solution i_p déterminée sous forme d'une constante est toujours égale à i_∞ identifiée dans la forme canonique.

Pour trouver la solution homogène, écrivons l'équation caractéristique,

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

$Q = 2$ donc

$$\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4} - 4 \right) = -\frac{15}{4}\omega_0^2 < 0$$

Les racines de l'équation caractéristique sont donc complexes conjuguées,

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{4} \pm j\frac{\omega_0}{4}\sqrt{15} \quad \text{soit} \quad r_{1,2} = -\mu \pm j\omega_p$$

où μ est le taux d'amortissement et ω_p la pseudo-pulsation des oscillations. La solution homogène s'écrit alors

$$i_h(t) = e^{-\mu t} (A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t))$$

Avec A et B deux constantes d'intégration réelles. En sommant solution homogène et particulière, on obtient la solution générale :

$$i(t) = e^{-\mu t} (A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)) + \frac{E}{R}$$

Reste à déterminer les constantes d'intégration A et B en $t = 0^+$

$$i(0^+) = \frac{E}{R} + A = 0 \quad \text{donc} \quad A = -\frac{E}{R}$$

Calculons l'expression de la dérivée

$$\frac{di}{dt} = \omega_p [-A \sin(\omega_p t) + B \cos(\omega_p t)] e^{-\mu t} - \mu [A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)] e^{-\mu t}$$

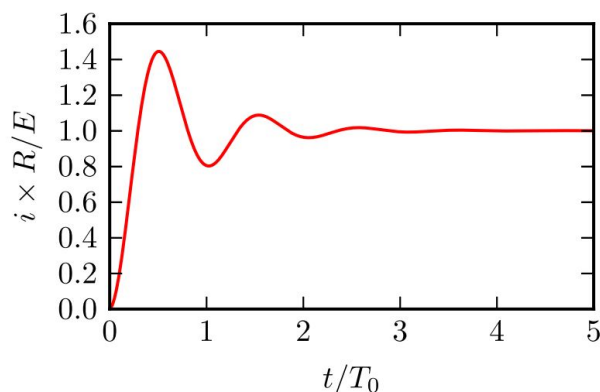
Ainsi

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = B\omega_p - \mu A = \frac{E}{L} \quad \text{donc} \quad B = \frac{E}{\omega_p} \left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R} \right)$$

Finalement

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\mu t} \left[\cos(\omega_p t) - \frac{R}{\omega_p} \left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R} \right) \sin(\omega_p t) \right]$$

Le tracé « direct » n'est pas possible, il faut donc utiliser les informations à disposition : conditions initiales, qui donne la valeur à $t = 0$ et le signe de la pente de la tangente, régime pseudo-périodique avec environ $Q = 2$ oscillations, et solution particulière qui donne le régime permanent asymptotique. Un exemple de chronogramme acceptable est représenté figure ci-contre).



Correction du TD d'entraînement



I Oscillateur à deux ressorts

- 1 a) Cette fois-ci, on a deux ressorts : le premier tire dans le sens $-\vec{u}_x$ et le second dans le sens $+\vec{u}_x$. On étudie leurs longueurs :

◇ $\ell_1(t)$ la longueur du ressort 1 s'exprime $\ell_1 = \text{AM}$. Or, d'après l'énoncé $\ell_{\text{eq}} = \text{AO} = \text{OB}$: en décomposant (**puisque les distances sont sur le même axe**), on a donc $\text{AM} = \text{AO} + \text{OM} = \ell_{\text{eq}} + x$.

◇ Le ressort 2 a comme longueur $\ell_2(t) = \text{MB} = \text{MO} + \text{OB}$ soit $\ell_2(t) = \ell_{\text{eq}} - x(t)$.

Ainsi, le bilan des forces s'exprime :

Poids

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_y$$

Support

$$\vec{R} = R\vec{u}_y$$

Ressort 1

$$\vec{F}_1 = -k(\ell_1(t) - \ell_0)\vec{u}_x = -k(\ell_{\text{eq}} + x(t) - \ell_0)\vec{u}_x$$

Ressort 2

$$\vec{F}_2 = +k(\ell_2(t) - \ell_0)\vec{u}_x = +k(\ell_{\text{eq}} - x(t) - \ell_0)\vec{u}_x$$

Ainsi, le PFD donne

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\Leftrightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x = -k(\ell_{\text{eq}} + x - \ell_0)\vec{u}_x + k(\ell_{\text{eq}} - x - \ell_0)\vec{u}_x - mg\vec{u}_y + R\vec{u}_y$$

Sur l'axe $\vec{u}_x$ on trouve alors

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2kx = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{m}x = 0$$

La projection sur $\vec{u}_y$ montre que la réaction du support compense le poids.

- b) Sous forme canonique, cette équation se réécrit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

C'est bien l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ et donc de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$.

Doubler la constante de raideur divise par $\sqrt{2}$ la période : le ressort oscille plus vite qu'avec un seul ressort.

- c) L'expression générale de $x(t)$ est donc $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. Or, en $t = 0$, on a $x(0) = x_0 = A$, et $\frac{dx}{dt} = 0 = \omega_0 B$; ainsi

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

- 2 a) On ajoute $\vec{F}_{\text{frott}} = -\alpha v \vec{u}_x$ au PFD, ce qui donne

$$\frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

- b) On sait qu'on a des oscillations amorties quand le discriminant Δ de l'équation caractéristique est négatif : $\Delta < 0$. Or ici, l'équation caractéristique est

$$r^2 + hr + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = h^2 - 4\omega_0^2$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 < 4\omega_0^2 \Leftrightarrow \alpha < 2m\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha < 2^{3/2}\sqrt{km}$$

Dans ce régime, on aura donc les racines

$$r_{\pm} = -\frac{h}{2} \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4}} \Leftrightarrow r_{\pm} = -\frac{h}{2} \pm j\omega \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4}}$$

La solution générale est alors

$$x(t) = e^{-ht/2} (K_1 e^{j\omega t} + K_2 e^{-j\omega t}) \Leftrightarrow x(t) = e^{-ht/2} [D \cos(\omega t) + E \sin(\omega t)]$$

On a les mêmes conditions initiales, soit $x(0) = x_0 = D$ et $\frac{dx}{dt} = 0 = -\frac{h}{2}x_0 + \omega E$, d'où $E = \frac{h}{2\omega}x_0$. Ainsi,

$$x(t) = x_0 e^{-ht/2} \left[\cos(\omega t) + \frac{h}{2\omega} \sin(\omega t) \right]$$

On a donc une pseudo-période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4}}}$$



II Décrément logarithmique électrique

- 1 R_2 et C sont en parallèle, donc $u(t)$ est à la fois la tension aux bornes de C et de R_2 . De plus, à $t \rightarrow \infty$, la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert : le circuit est donc équivalent à un diviseur de tension avec R_1 et R_2 en série alimentées par la tension E , et on a donc

$$u(\infty) = u_\infty = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

- 2 On applique les lois de KIRCHHOFF :

Avec une loi des mailles et les relations courant-tension :

$$u + L \frac{di}{dt} + R_1 i = E$$

En combinant :

$$u + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2} \right) + R_1 C \frac{du}{dt} + R_1 \frac{u}{R_2} = E$$

$$\Leftrightarrow u + LC \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{L}{R_2} \frac{du}{dt} + R_1 C \frac{du}{dt} + \frac{R_1}{R_2} u = E$$

$$\Leftrightarrow LC \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_2} + R_1 C \right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{R_2} \right) u = E$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \frac{u}{LC} = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \frac{u_\infty}{LC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right)}$ et $\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right)$

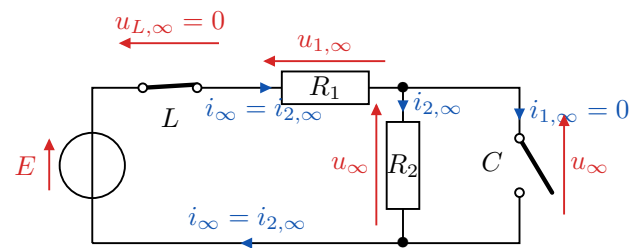


FIGURE E5.1 – Pour $t \rightarrow \infty$

Avec la loi des nœuds :

$$i = i_1 + i_2 = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2}$$

Distribution de la dérivée

Factorisation

Division par LC et même dénominateur

Expression de E selon u_∞

Canonique

- 3 Pour la solution de l'équation homogène, on injecte $u_h(t) = K e^{rt}$ la forme générique pour obtenir l'équation caractéristique. On en cherche alors les racines grâce au discriminant Δ :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$$

On sait que $\Delta < 0$ puisqu'on observe des oscillations amorties. On aura donc

$$r_{\pm} = -\frac{2\lambda}{2} \pm j \frac{1}{2} \sqrt{4(\omega_0^2 - \lambda^2)} \Leftrightarrow r_{\pm} = -\lambda \pm j\Omega \quad \text{avec} \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

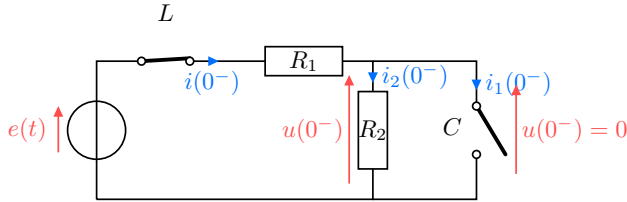
La solution particulière étant visiblement $u_p = u_\infty$, on aura la forme générale

$$u(t) = u_h(t) + u_p \Leftrightarrow u(t) = e^{-\lambda t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) + u_\infty$$

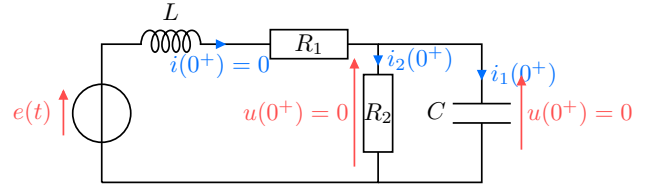
4

En $t = 0^-$

Or, avant l'échelon montant, le générateur est éteint depuis longtemps. Ainsi, le condensateur est déchargé, et $u(0^-) = 0$, et aucun courant ne circule dans le circuit, donc $i(0^-) = 0$.

**FIGURE E5.2** – Schéma en $t = 0^-$.**En $t = 0^+$**

Or, par continuité de l'intensité traversant une bobine et de la tension aux bornes d'un condensateur, lors de l'échelon de tension on garde $i(0^+) = i(0^-) = 0$ et $u(0^+) = u(0^-) = 0$.

**FIGURE E5.3** – Schéma en $t = 0^+$.

Ainsi, avec une loi des nœuds, on a $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$. Seulement, comme $i_2(0^+)$ est le courant passant dans la résistance R_2 de tension $u(0^+) = 0$, on a $i_2(0^+) = u(0^+)/R = 0$, soit avec la loi des nœuds, $i_1(0^+) = 0 = C \frac{du}{dt} \Big|_{0^+}$.

5

Première condition

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow A + u_\infty = 0 \Leftrightarrow A = -u_\infty$$

Seconde condition

$$\frac{du}{dt} \Big|_0 = 0 \Leftrightarrow -\lambda A + B\Omega = 0 \Leftrightarrow B = \frac{-\lambda u_\infty}{\Omega}$$

Finalement,

$$u(t) = u_\infty \left(1 - e^{-\lambda t} \left(\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega} \sin(\Omega t) \right) \right)$$

6 On lit l'abscisse du premier et du troisième maximum, qu'on appelle t_1 et t_3 respectivement. On a alors

$$2T = t_3 - t_1 \Leftrightarrow T = \frac{t_3 - t_1}{2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_3 = 0,95 \times 10^{-3} \text{ s} \\ t_1 = 0,19 \times 10^{-3} \text{ s} \end{cases} \quad \text{A.N. : } T = 3,8 \times 10^{-4} \text{ s}$$

7 On calcule δ avec deux pseudo-périodes ici. On lit la valeur de tension aux premier et troisième pics, à t_1 et t_3 respectivement, ainsi que ce qui semble être la valeur limite u_∞ :

$$\delta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{u(t_1) - u_\infty}{u(t_3) - u_\infty} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(t_1) = 4,9 \text{ V} \\ u(t_3) = 3,3 \text{ V} \\ u_\infty = 3,0 \text{ V} \end{cases} \quad \text{A.N. : } \delta = 0,92$$

8 Avec l'expression de $u(t)$, on peut développer le dénominateur de δ :

$$u(t + nT) - u_\infty = e^{-\lambda nT} \times e^{-\lambda t} \underbrace{\left(\frac{A \cos(\Omega t + n\Omega t)}{=\cos \Omega t} + \frac{B \sin(\Omega t + n\Omega t)}{=\sin \Omega t} \right)}_{u(t) - u_\infty \text{ (1)}}$$

Ainsi,

$$\frac{u(t) - u_\infty}{u(t + nT) - u_\infty} = e^{+\lambda nT} \Rightarrow \delta = \frac{1}{n} \ln(e^{\lambda nT})$$

$$\Leftrightarrow \delta = \lambda T \Leftrightarrow \lambda = \frac{\delta}{T} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta = 0,92 \\ T = 3,8 \times 10^{-4} \text{ s} \end{cases} \quad \text{A.N. : } \lambda = 2,3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$$

9 On sait que λ s'exprime en fonction de C , on l'isole donc de son expression :

$$2\lambda = \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \Leftrightarrow R_2 C = \frac{1}{2\lambda - \frac{R_1}{L}}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{1}{2R_2 \lambda - \frac{R_1 R_2}{L}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R_1 = 1,0 \text{ k}\Omega \\ R_2 = 50 \text{ k}\Omega \\ L = 500 \text{ mH} \\ \lambda = 2,3 \times 10^3 \text{ s}^{-1} \end{cases} \quad \text{A.N. : } C = 7,6 \text{ nF}$$



Interprétation E4 et 5.1 : À retenir

En régime pseudo-périodique, l'amortissement du signal est dû à l'exponentielle de la solution générale. En calculant le logarithme du rapport de la solution à un instant t et de la solution à un instant $t + nT$ avec T la période on calcule donc le facteur de l'exponentielle décroissante, ce qui permet de trouver les caractéristiques du circuit.



III Décrément logarithmique mécanique

/10

1 ♦ **Système** : {point M} de masse m

♦ **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen

♦ **Repère** : $(O, \vec{u}_z)$ (voir schéma)

♦ **Repérage** : $\vec{OM} = z(t)\vec{u}_z$; $\vec{v} = \dot{z}(t)\vec{u}_z$; $\vec{a} = \ddot{z}(t)\vec{u}_z$

♦ **Longueur du ressort** : $\ell(t) = z_M(t) - z_O = z(t)$

♦ **Bilan des forces** :

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$

Hooke $\vec{F}_r = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_k = -k(z(t) - \ell_0)\vec{u}_z$

Frottements $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{z}(t)\vec{u}_z$

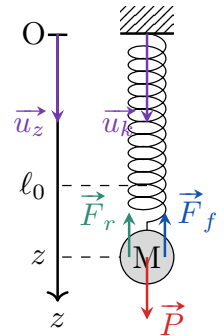


FIGURE E5.4

/7 2 PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_f + \vec{F}_r \xrightarrow{\cdot\vec{u}_z} m\ddot{z}(t) = mg - k(z(t) - \ell_0) - \alpha\dot{z}(t) \Leftrightarrow m\ddot{z}(t) + \alpha\dot{z}(t) + kz(t) = mg + k\ell_0$
 À l'équilibre, $\dot{z}_{\text{eq}} = \ddot{z}_{\text{eq}} = 0 \Rightarrow kz_{\text{eq}} = mg + k\ell_0 \Leftrightarrow z_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$

À cause du poids qui n'est pas compensé par la réaction du support, la longueur d'équilibre est plus grande que la longueur à vide du ressort .

Ainsi $m\ddot{z}(t) + \alpha\dot{z}(t) + kz(t) = kz_{\text{eq}} \Leftrightarrow \ddot{z}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{z}(t) + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}z_{\text{eq}}$
 $\Leftrightarrow \ddot{u}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0$

/4 3 On met l'équation sous forme canonique et on identifie :

$$\ddot{u}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Leftrightarrow Q = \omega_0 \frac{m}{\alpha} \Leftrightarrow Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

/4 4 On peut estimer Q en comptant le nombre d'oscillations avant d'arriver à 95 % de la consigne. Ici on relève une valeur maximale $u_{\text{max}} \approx 2,7 \text{ cm}$, donc on arrive au régime permanent pour $u(t_{95}) \approx 0,05u_{\text{max}} \approx 0,13 \text{ cm}$. L'oscillogramme est tronqué, mais on peut estimer que $Q > 5$, on aura donc $Q \lesssim 10$.

/9 5 Forme générique $u(t) = Ke^{rt} \Rightarrow r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

Discriminant $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$

Oscillations $\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow r_{\pm} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$

$$\Leftrightarrow r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{\sqrt{4Q^2 - 1}}{\tau}$$

Ainsi

$$u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$$

Sans conditions initiales, on ne peut déterminer A et B .

/4 6

$$T \triangleq \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{4Q^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \Leftrightarrow \boxed{T = T_0 \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}}} > T_0$$

/9 7 $u_\infty = 0$ donc

$$u(t + nT) = e^{-n\frac{T}{\tau}} \cdot \overbrace{e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\underbrace{A \cos(\Omega(t + nT))}_{=\cos \Omega t} + \underbrace{B \sin(\Omega(t + nT))}_{=\sin \Omega t} \right)}^{=u(t)}$$

$$\Leftrightarrow u(t + nT) = e^{-n\frac{T}{\tau}} u(t)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{u(t)}{e^{-n\frac{T}{\tau}} u(t)} \right) = \frac{1}{n} \ln \left(e^{n\frac{T}{\tau}} \right) \Leftrightarrow \delta = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\tau\Omega} \Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4Q^2 - 1}^2 = \left(\frac{2\pi}{\delta} \right)^2 \Leftrightarrow 4Q^2 = 1 + \left(\frac{2\pi}{\delta} \right)^2 \Leftrightarrow \boxed{Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}}}$$

/7 8

Or,

$$\delta \approx 0,30 \Rightarrow Q \approx 10 \text{ similaire à l'estimation Question } \boxed{4}.$$

$$\sqrt{4Q^2 - 1} \approx 10 \Leftrightarrow 4Q^2 - 1 \approx 100 \Leftrightarrow Q^2 \approx 25 \Leftrightarrow \boxed{Q \approx 5}$$

On peut donc considérer que Q est suffisamment grand pour que l'approximation soit valide.

 |

$$Q = \sqrt{\frac{3^2}{3^2 \cdot 10^{-2}} + \frac{1}{4}} \approx \sqrt{100 + 0,25} \approx \sqrt{100} \approx 10$$

/6 9

$$\Omega = \frac{\sqrt{4Q^2 - 1}}{\tau} \approx \frac{2Q}{\tau} = \omega_0$$

Or,

$$t_{\max} = 0,2 \text{ s} \quad \text{et} \quad t_{\max} + 5T = 4,9 \text{ s} \Leftrightarrow 5T = 4,2 \text{ s} \Leftrightarrow \underline{T \approx 0,8 \text{ s}}$$

Or,

$$\omega_0 \approx \Omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \underline{\omega = 7,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

 |

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot 3}{8} \times 10 = \frac{3}{4} \times 10 = 7,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

/6 10

$\boxed{m \approx \frac{k}{\omega^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1} \\ \omega = 7,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases}$ A.N. : <u>$m \approx 0,18 \text{ kg}$</u>		$\boxed{\alpha = \frac{\sqrt{km}}{Q}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1} \\ m = 180 \times 10^{-3} \text{ kg} \\ Q = 10 \end{cases}$ A.N. : <u>$\alpha \approx 0,13 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$</u>
---	---	---

 |

$$m = \frac{10}{7,5^2} \approx \frac{10}{56} \approx 0,18 \text{ kg}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{10 \cdot 0,18}}{10} \approx \frac{\sqrt{1,8}}{10} \approx 0,13 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$$