

Equation différentielle du premier ordre

I. Equation différentielle sans second membre

On considère une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants sans second membre :

$$\dot{x} + \alpha x = 0$$

La solution générale est de la forme $x(t) = A \exp(-\alpha t)$

Cette équation différentielle est stable si sa limite est finie quand t augmente, donc pour $\alpha > 0$.

Si le système est stable, on introduit le temps caractéristique τ tel que $\tau = 1/\alpha$

$\dot{x} + \frac{x}{\tau} = 0$ a pour solution générale $x(t) = A \exp(-t/\tau)$

Exemples en Sciences Physiques :

- Décharge d'un condensateur : $\dot{u} + \frac{u}{\tau} = 0$ où $\tau = RC$
- Mouvement d'un objet soumis à une force de frottement fluide :

$$m\dot{v} = -\lambda v \Leftrightarrow \dot{v} + \frac{\lambda}{m}v = 0 \Leftrightarrow \dot{v} + \frac{v}{\tau} = 0 \text{ où } \tau = \frac{m}{\lambda}$$
- Décroissance radioactive : $\dot{N} = -\lambda N \Leftrightarrow \dot{N} + \lambda N = 0$ avec $\tau = 1/\lambda$
- Cinétique chimique d'ordre 1 : $\frac{d[A]}{dt} = -k[A] \Leftrightarrow \dot{[A]} + k[A] = 0$ avec $\tau = 1/k$

II. Equation différentielle du premier ordre avec un second membre

On considère une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre :

$$\dot{x} + \alpha x = f(t)$$

La solution générale est la somme de la solution de l'équation homogène $A \exp(-\alpha t)$ et d'une solution particulière dont la forme dépend du second membre.

En particulier, si le second membre est constant, on cherchera une solution particulière constante.

Si le second membre est sinusoïdal, la solution particulière le sera aussi.

On peut montrer que pour une excitation de la forme $f(t) = C \cos(\omega t)$, la solution particulière a pour amplitude complexe $\frac{C}{\alpha + i\omega}$, donc a pour amplitude $\frac{C}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$ et pour phase initiale $-\arg(\alpha + i\omega)$.

Pour les autres cas, voir M. Camanes.

(La méthode de la variation de la constante est en particulier à retenir).