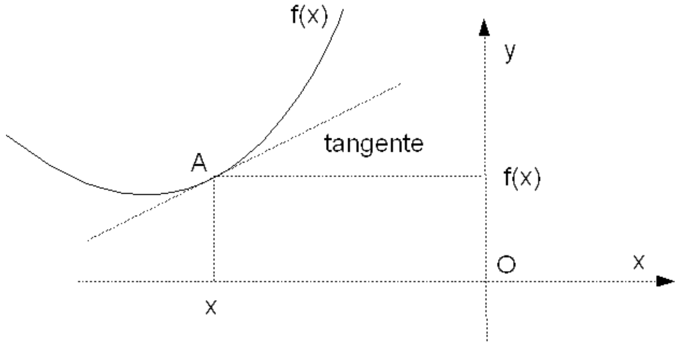
Dérivée d'une fonction

I. Définition

Définition : **On appelle dérivée de la fonction f en x et on note $f'(x)$ la grandeur (si elle existe):**

$$f'(x) = lim\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \quad \text{pour } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ (si elle existe).}$$

Graphiquement, **f '(x) correspond à la pente de la tangente** à la courbe représentant la fonction f, calculée au point d'abscisse x.



En x_0, on a : $f'(x_0) = lim\frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon}$ **pour ε →0**

Notons $x = x_0 + \varepsilon$. Alors :

$$f'(x_0) = lim_{x\rightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

La dérivée de f est bien un rapport entre une toute petite variation de f sur une toute petite variation de x au voisinage de x_0. De fait, en Physique, on écrira plutôt :

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Cette notation a l'immense mérite de s'adapter au grand nombre de variables utilisées en Sciences Physiques : on s'intéressera aux variations d'intensité ou de tension électrique en fonction du temps ($\frac{di}{dt}$ ou $\frac{du}{dt}$), aux variations de l'amplitude des signaux électriques périodiques avec la fréquence f ($\frac{dA}{df}$), aux variations de la position en mécanique en fonction du temps ($\frac{dx}{dt}$), aux variations d'énergie potentielle en fonction du temps t ou en fonction de la position x ou θ, ($\frac{dE_p}{dt}$, $\frac{dE_p}{dx}$ ou $\frac{dE_p}{d\theta}$), aux variations de la pression d'un système chimique avec l'avancement molaire ($\frac{dP}{d\xi}$), etc.

On étudie très souvent les variations temporelles ; par conséquent on est amené à souvent dériver par rapport au temps. Pour les dérivées par rapport au temps, on note avec des « points » les dérivées temporelles:

$$\dot{f} = \frac{df}{dt}, \quad \ddot{f} = \frac{d\dot{f}}{dt} = \frac{d^2f}{dt^2}, \quad \text{etc}$$

Pour les dérivées usuelles, voir cours de Math.

II. Cas des fonctions composées

Elles sont très fréquentes en Physique. Par exemple, intéressons- nous à l'énergie potentielle Ep d'un système ; elle varie avec la position x, mais x varie avec le temps, donc Ep est une fonction de x qui est une fonction de

t. Selon ce qu'on veut faire, on pourra dériver la grandeur Ep par rapport à x ($\frac{dEp}{dx}$) ou par rapport à t ($\frac{dEp}{dt}$). Les deux dérivées sont liées.

En Math, on note : $(g \circ f\,)' = (g' \circ f).f'$
Soit encore : $(g \circ f\,)'(x) = (g' \circ f)(x).f'(x)$
$\frac{dg}{dx}(x) = \frac{dg}{df}\big(f(x)\big).\frac{df}{dx}(x)$

Ce qu'on écrira plus simplement :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df}.\frac{df}{dx}}}$$

Par exemple, $\frac{dEp}{dt} = \frac{dEp}{dx}.\frac{dx}{dt} = \frac{dEp}{dx}.\dot{x}$