Utilisation des développements limités

I . Définition

Les **développements limités** seront étudiés dans le cours de Mathématiques. Cependant ils sont très utilisés en Sciences Physiques pour donner des expressions simplifiées ou aprochées des focntions étudiées.

L'idée est de donner un équivalent de la fonction étudiée f(x) au voisinage de la valeur x_0 sous la forme d'un polynôme, dont le degré est l'ordre du développement limité :

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 ...+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$$

Ce qu'on écrira plus souvent :

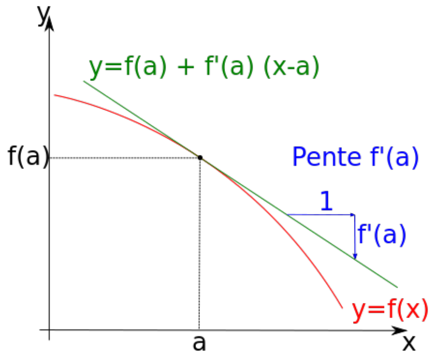
$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 ...+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Les ordres les plus couramment utilisés en Physique sont les ordres 1 et 2.

Au sujet de l'ordre 1

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

On approxime la fonction f au voisinage de x_0 par un polynôme de degré 1. Graphiquement, cela revient à assimiler la courbe représentant f(x) par sa tangente.



Au sujet de l'ordre 2

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2$$

On approxime la fonction f au voisinage de x_0 par un polynôme de degré 2. Graphiquement, cela revient à assimiler la courbe représentant f(x) par une parabole.

II. Les développements limités usuels à l'ordre 2

$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour $|x| << 1$

$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ pour $|x| << 1$

$\sin(x) \approx x$ pour $|x| << 1$

$\tan(x) \approx x$ pour $|x| << 1$

$Ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ pour $|x| << 1$

$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2$ pour $|x| << 1$

En particulier :

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2$ pour $|x| << 1$

$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ pour $|x| << 1$