Notions sur le barycentre

I . Définition

Le barycentre correspond à une moyenne pondérée de grandeurs vectorielles.

1) Barycentre d'un système de 2 points

Définition : **Soient A et B deux points et α et β deux réels. Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que**

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

G est appelé barycentre des points A et B affectés des coefficients α et β ou encore barycentre du système de points $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.

Les points A, B et G sont alignés, puisque les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont coliénaires.

Si α et β sont de même signe, G est sur le segment $[A,B]$.

Définition : Si α = β, G est appelé isobarycentre des points A et B.

Propriété : Soit G le barycentre du système $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$. Alors, pour tout point M de l'espace, on a:

$$\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{GM}$$

Démo immédiate : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\alpha(\overrightarrow{GM} - \overrightarrow{AM}) + \beta(\overrightarrow{GM} - \overrightarrow{BM}) = \vec{0}$
$(\alpha + \beta)\overrightarrow{GM} - \alpha\overrightarrow{AM} - \beta\overrightarrow{BM} = \vec{0}$
$(\alpha + \beta)\overrightarrow{GM} = \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM}$
CQFD.

Autre écriture : $\forall M$, $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}}{\alpha+\beta}$

En particulier, si M = A, on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
Ce qui permet de placer G par rapport à un des points.

2) Barycentre d'un système de n points

Définition : **Le barycentre du système de points $\{(A_i,\alpha_i)\}_{i\in\{1,\ldots n\}}$ tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$ est le point G tel que**

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Propriété : Soit G le barycentre du système de points $\{(A_i,\alpha_i)\}_{i\in\{1,\ldots n\}}$ tel que que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$. Alors, pour tout point M de l'espace, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{A_iM} = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{GM}$$

En particulier, si M se confond avec l'origine O, on a : $\overrightarrow{OG}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$

Définition : Si tous les coefficients α_i sont égaux, le barycentre est appelé isobarycentre.

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$$

II. Cas du centre de masse

1) Définition

Définition : **Le centre de masse du système de points $\{A_i\}_{i\in\{1,\dots n\}}$ affectés des masses m_i est le point G tel que :**

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\,\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$$

On peut définir de même le centre de masse d'un solide en le découpant en petites masses mi se trouvant en des points Ai et en sommant sur toutes ces petites masses. Idéalement, il faudrait le décomposer en éléments de volume dV et sommer sur tout le volume - il s'agit d'une sommation continue et non plus discrète – hors programme : $\iiint_{volume}\overrightarrow{GM}dm=\vec{0}$

Propriété : Soit G le centre de masse du système de points $\{A_i\}_{i\in\{1,\dots n\}}$ affectés des masses m_i. Alors, pour tout point M de l'espace, on a:

$\sum_{i=1}^{n}m_i\,\overrightarrow{A_iG}=m_{tot}\overrightarrow{GM}$ où m_{tot} est la masse totale.

2) Cas d'un système de 2 masses

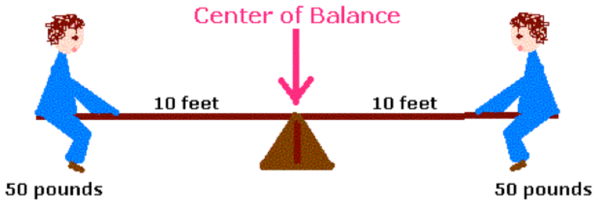
Par exemple pour un système de 2 masses : $m_1\overrightarrow{GM_1}+m_2\overrightarrow{GM_2}=\vec{0}$

$\overrightarrow{GM_2}=-\frac{m_1}{m_2}\overrightarrow{GM_1}$

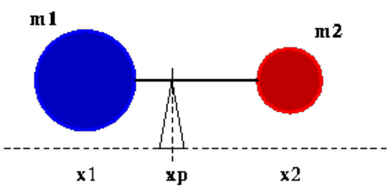
G est entre les points M_1 et M_2 .

Une expérience simple consiste à imaginer une tige de masse négligeable reliant les deux masses, on cherche le point d'appui permettant de maintenir le système en équilibre, ce point d'appui est en G.

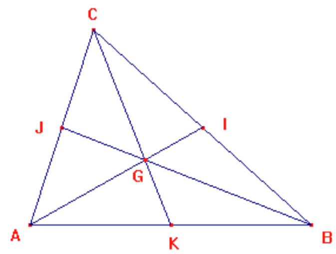
Si $m_1 = m_2$, le point d'appui est au milieu des deux points.



Si une masse est plus massive, G est déplacé vers cette masse. Si on ne change pas le point d'appui, la balance penche vers la masse la plus grande. Pour rétablir l'équilibre, il faut déplacer le point d'appui vers la masse la plus importante, au niveau du barycentre des masses.



3) Cas d'un système de 3 masses



Pour 3 masses, on a de même : $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + m_3\overrightarrow{GM_3} = \vec{0}$
G est quelque part sur la surface du triangle $M_1M_2M_3$.

Si les 3 masses sont égales, G est l'isobarycentre de 3 points et on peut montrer qu'il est le point à l'intersection des médianes.

4) Divers

Le centre de masse C d'un corps apparaît comme un point de référence imaginaire situé à la position « moyenne » de la masse du corps.

Voici quelques caractéristiques du centre de masse :

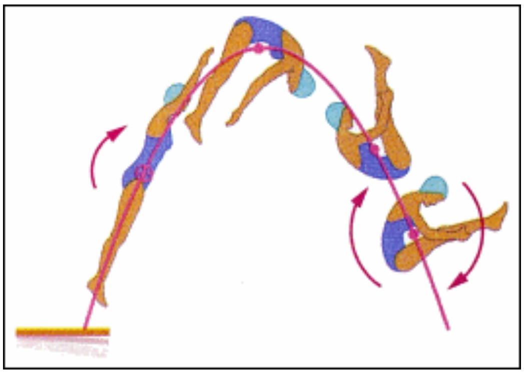
- Cette position n'est pas toujours au centre du corps. Si la répartition de masse est uniforme, c'est le cas, sinon G est déplacé vers les parties les plus massives (pensez au culbuto !).

- Le centre de masse d'un corps homogène (masse volumique constante) qui possède un haut niveau de symétrie est situé au centre géométrique du corps.
Exemple d'une sphère homogène : il est au centre de la sphère.

- Le centre de masse n'est pas nécessairement situé sur le corps lui- même (ex : boomerang).

On considèrera que la résultante du poids sur un système de points ou un solide est la force $m_{tot}\vec{g}$ s'appliquant au centre de masse G.

En mécanique, on pourra décomposer le mouvement d'un corps en le mouvement de son centre de masse et le mouvement du solide autour du centre de masse.



III. Autres cas

En Chimie, on s'intéressera au barycentre des charges électriques positives et négatives sur une molécule / un ion. Cela est utile pour étudier la polarisation d'une liaison.

En Mathématiques, on retrouve la notion de barycentre dans les statistiques (moyennes pondérées), en probabilités (espérance mathématique), en plus de la géométrie.