FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

I. Définitions

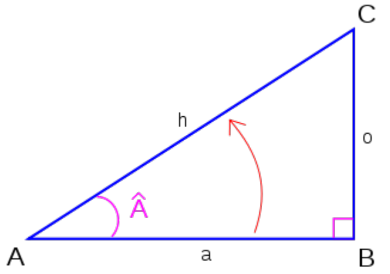
On considère un triangle rectangle ABC, rectangle en B. Soit θ l'angle en A. On a :

$$cos\theta = \frac{côté\ adjacent}{hypoténuse} = \frac{\overline{AB}}{AC}$$

$$\sin\theta = \frac{côté\ opposé}{hypoténuse} = \frac{\overline{BC}}{AC}$$

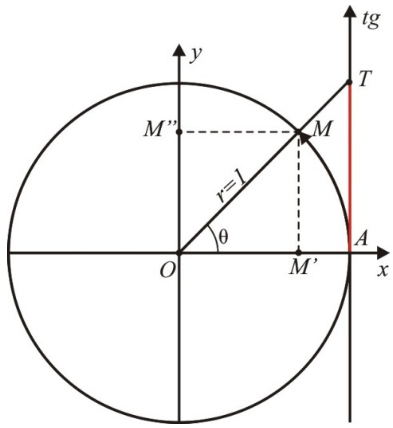
$$tan\theta = \frac{côté\ opposé}{côté\ adjacent} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$cotan\theta = \frac{1}{tan\theta} = \frac{côté\ adjacent}{côté\ opposé} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

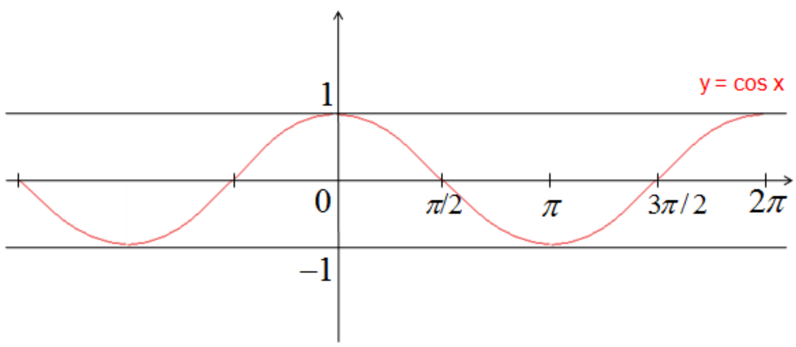


On peut aussi utiliser le cercle trigonométrique pour se représenter ces grandeurs : Soit M un point du cercle de centre O et de rayon 1. Alors l'abscisse de M est cos θ et son ordonnée est sin θ. Si on prolonge la droite (OM), son intersection avec la droite tangente à l'axe horizontal en A donne le point T et $\overline{AT} = \tan\theta$, pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie	0	0

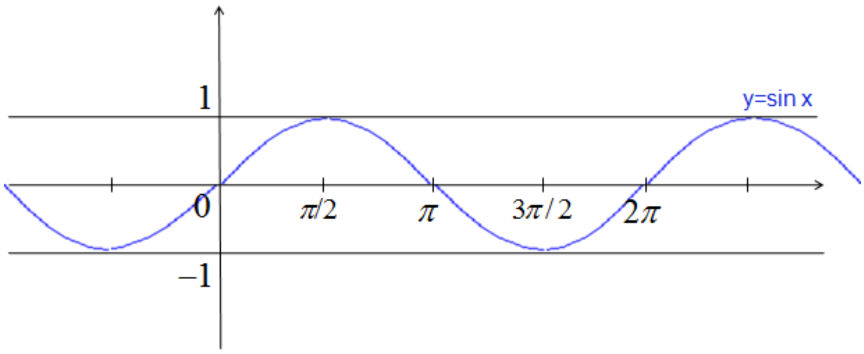


2) Fonction cosinus



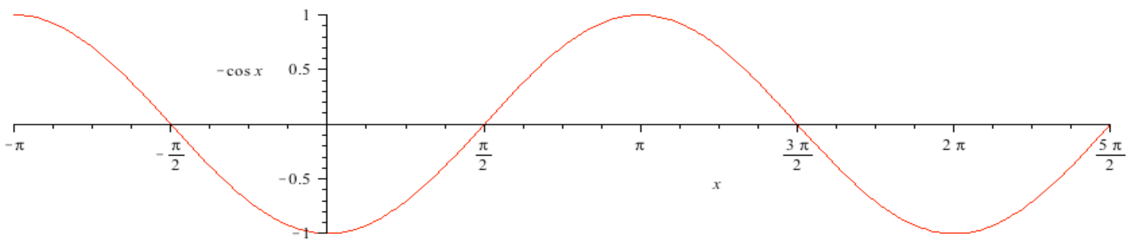
C'est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, elle est paire et périodique de période 2 π.
Elle est dérivable et $(\cos x)' = -\sin x$

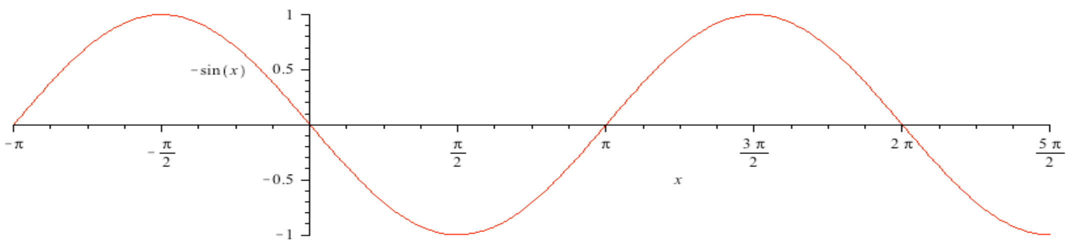
3) Fonction sinus



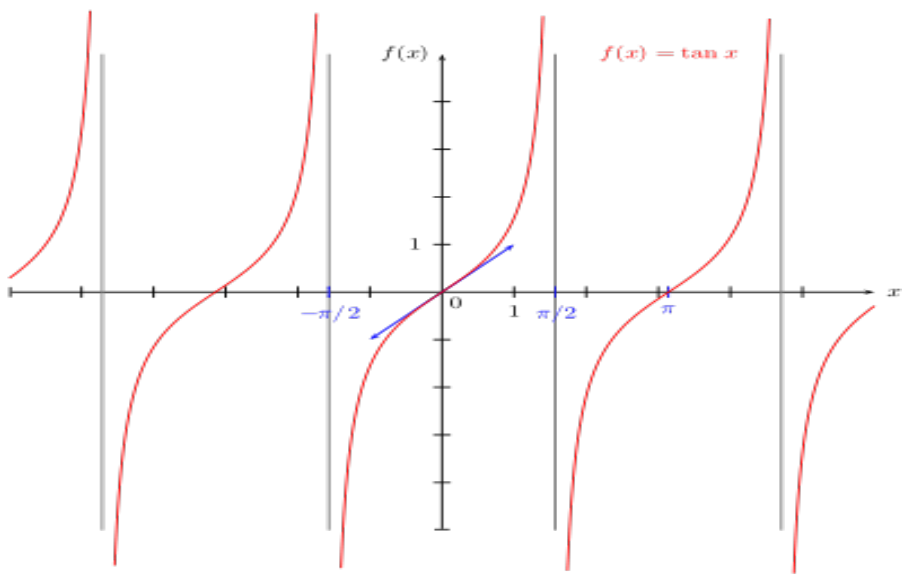
C'est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, elle est impaire et périodique de période 2 π.
Elle est dérivable et $(\sin x)' = \cos x$

Vous devez être capable de les reconnaître du premier coup d'œil, ainsi que leurs opposées.





4) Fonction tangente



Elle est définie sur des intervalles de longueur π de la forme $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi, \dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$ avec n entier.

Elle est impaire et périodique de période π.

Elle est dérivable et $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

5) Formulaire de trigonométrie à apprendre par cœur

$cos^2 a + sin^2 a = 1$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$

$cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$1 + cos(2a) = 2\, cos^2 a$

$1 - cos(2a) = 2\, sin^2 a$

$sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$

$\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$

$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

Moins courantes, mais utiles en Math pour les changements de variable :

$cos(2a) = \dfrac{1 - tan^2 a}{1 + tan^2 a}$

$sin(2a) = \dfrac{2 \tan a}{1 + tan^2 a}$

$$tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - tan^2 a}$$