Analyse dimensionnelle

I. Equation aux dimensions

On appelle équation aux dimensions une équation qui lie la dimension d'une grandeur à celles des grandeurs de base.

La dimension d'une grandeur physique X est notée dim(X).
L'unité d'une grandeur physique X est notée entre crochets : $[X]$ ou donnée par son symbole : m, s, N, Pa…

Dans les exemples suivants, on cherchera l'équation aux dimensions reliant les trois grandeurs proposées et l'on introduira les unités dérivées.

Exemple 1 : L'unité d'une force

La seconde loi de Newton donne la relation entre la force, la masse et l'accélération : $\vec{f} = m\vec{a}$

Ainsi la dimension de la force $\vec{f}$ est égale au produit de la dimension de la masse m et de celle de l'accélération $\vec{a}$, ce que l'on écrira : $\dim(\vec{f}) = \dim(m) . \dim(\vec{a})$

On se rappelle que le vecteur accélération d'un point est la dérivée du vecteur vitesse : l'accélération est ainsi homogène à une longueur L divisée par le carré d'un temps T^2 :

$$\dim(\vec{a}) = \frac{\dim(L)}{(\dim(T))^2}$$

Donc pour la force : $\dim(\vec{f}) = \frac{\dim(m).\dim(L)}{(\dim(T))^2}$

C'est **l'équation aux dimensions qui lie la dimension de la force aux unités de base.**

On en déduit : $[\vec{f}] = \frac{[m].[L]}{[T]^2} = kg.m.s^{-2}$

L'unité de la force est le kilogramme mètre par seconde au carré. On lui donne le nom de newton (N) :

$$\boxed{1 \text{ N} = 1 \text{ kg. m. s}^{-2}}$$

Remarque : On rencontre fréquemment les notations suivantes :
dim(masse) = M
dim(longueur) = L
dim(temps) = T
Ainsi $\dim(\vec{f}) = \frac{\dim(m).\dim(L)}{(\dim(T))^2} = M.L.T^{-2}$

Je vous recommande la prudence, le risque est grand de faire des confusions comme M = mètre au lieu d'avoir M = masse, ou encore : T = tension = force au lieu de T comme temps. La première notation présentée est plus lourde, mais sans risque de confusion.

Exemple 2 : L'unité de la pression

La pression P est la composante normale F de la force s'exerçant sur une surface donnée S.

On a : $\dim(P) = \frac{\dim(F)}{\dim(S)} = \frac{\dim(m).\dim(L)}{(\dim(T))^2}\frac{1}{(\dim(L))^2} = \frac{\dim(m)}{\dim(L).(\dim(T))^2}$

Soit : $[P] = \frac{[m]}{[L].[T]^2} = kg.m^{-1}.s^{-2}$

La pression s'exprime en kilogramme par mètre et par seconde au carré ; on utilise en fait le *pascal* (*Pa*) :

$$\boxed{1 \text{ Pa} = 1 \text{ kg. m}^{-1}\text{. s}^{-2}}$$

Exemple 3 : L'unité de l'énergie E

On peut penser à l'énergie cinétique : $Ec = \frac{1}{2}mv^2$,

donc $\dim(Ec) = \dim(m)\,.\dim(v)^2 = \dim(m)\left(\frac{\dim(L)}{\dim(T)}\right)^2$

Avec les unités : $[Ec] = [m].\frac{[L]^2}{[T]^2} = kg.m^2.s^{-2}$

Ou penser à l'énergie potentielle de pesanteur : $E = mgz$,
Donc $\dim(E) = \dim(m)\,.\dim(g)\,.\dim(z) = \dim(\mathrm{m})\,.\dim(\text{accélération})\,.\dim(\mathrm{L})$

$$\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{m})\,.\frac{\dim(L)}{(\dim(T))^2}.\dim(L) = \frac{\dim(m)\,.\dim(L)^3}{\dim(T)^2}$$

Avec les unités : $[E] = kg.m^3.s^{-2}$

Donc $\boxed{1\ \mathrm{J} = 1\ kg.m^3.s^{-2}}$

Exemple 4 : L'unité des charges électriques

L'intensité I du courant électrique correspond à la quantité de charge électrique q traversant un conducteur pendant un temps t : $I = \frac{q}{t}$. C'est-à-dire que q est la quantité de charge traversant un conducteur parcouru par un courant I pendant un temps t : $q = It$
Alors : $\dim(q) = \dim(I)\,.\dim(t) = IT$
Avec les unités : $[q] = A.s$

On en déduit que l'unité de la charge électrique est en ampère seconde ; on notera cette unité le *coulomb* (C) :

$\boxed{1\ \mathrm{C} = 1\ \mathrm{A.\,s}}$

II. Analyse dimensionnelle comme outil de prédiction

Si une grandeur X est susceptible de dépendre d'un certain nombre de grandeurs dimensionnées indépendantes (par exemple A, B, C) caractéristiques du problème, alors X peut probablement se mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{X = kA^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}}$$

La constante k est sans dimension; les exposants α, β et γ se déterminent par analyse dimensionnelle de l'expression ci-dessus.

Exemple 5 :

On s'intéresse à un ressort horizontal de constante de raideur *k* (en kg/s^2). Une extrémité est fixe et notée O. A l'extrémité libre M, on fixe une masse ponctuelle *m*. On écarte à une date donnée l'extrémité mobile de la quantité *a*, on lâche la masse sans vitesse initiale. On constate que la masse oscille de manière régulière. On se demande quels sont les paramètres qui font varier la période T_0 des oscillations. On pense à la constante de raideur et à la masse ; peut-être l'élongation initiale *a* intervient-elle ?

On propose une relation de la forme : $T_0 = k^{\alpha}.m^{\beta}.a^{\gamma} \times \text{constante}$; la relation entre les dimensions donne : $\dim(T) = \dim(k)^{\alpha}\dim(m)^{\beta}\dim(a)^{\gamma}$

$\dim(T) = \left(\frac{\dim(m)}{\dim(T)^2}\right)^{\alpha}.\dim(m)^{\beta}\dim(a)^{\gamma}$

Soit : $\dim(T) = \dim(m)^{\alpha+\beta}.\dim(T)^{-2\alpha}.\dim(a)^{\gamma}$

Il vient : $\begin{cases} 1 = -2\alpha \\ \alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ en considérant que le temps est seulement homogène à un temps et ne dépend ni d'une masse ni d'une longueur.

Soit : $\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = 0 \end{cases}$

Ainsi la période s'écrit : $T = \text{constante} \times \sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Le calcul exact donne $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

<u>Exemple 6 :</u> Vitesse d'un satellite

On se rappelle que la vitesse d'un satellite sur une orbite circulaire autour de la Terre a une vitesse qui dépend de la masse M de la Terre, du rayon R de son orbite et de la constante gravitationnelle. Quelle est l'expression exacte ?

On cherche : $v = kM^{\alpha}R^{\beta}G^{\gamma}$

On doit avoir $\dim(v) = \dim(M)^{\alpha}\dim(R)^{\beta}\dim(G)^{\gamma}$

Cherchons l'unité de G : $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$ est la force d'interaction entre deux masses m_1 et m_2 distantes de.

$\dim(F) = \frac{\dim(G).\dim(M)^2}{\dim(d)^2}$

Donc $\dim(G) = \frac{\dim(F).\dim(d)^2}{\dim(M)^2} = \frac{\dim(M).\dim(d)}{\dim(t)^2}.\frac{\dim(d)^2}{\dim(M)^2} = \frac{\dim(d)^3}{\dim(M).\dim(t)^2}$ où t est un temps.

On en déduit :

$$\dim(v) = \dim(M)^{\alpha}\dim(R)^{\beta}\left(\frac{\dim(R)^3}{\dim(M).\dim(t)^2}\right)^{\gamma}$$

$\dim(v) = \dim(M)^{\alpha-\gamma}\dim(R)^{\beta+3\gamma}\dim(t)^{-2\gamma}$

Comme : $\dim(v) = \frac{\dim(R)}{\dim(t)}$, on en déduit : $\begin{cases} 1 = \beta + 3\gamma \\ 1 = 2\gamma \\ \alpha = \gamma \end{cases}$

D'où : $\alpha = \gamma = -\beta = \frac{1}{2}$

D'où : $v = k\sqrt{\frac{GM}{R}}$

L'analyse dimensionnelle ne permet pas de déterminer la valeur de la constante k (qui vaut 1 sur cet exemple).

<u>Remarques et conseils :</u>

On ne peut comparer deux grandeurs physiques entre elles que si elles ont la même dimension.
Par exemple, on peut comparer 2 distances entre elles, mais pas une distance et une masse.

Deux grandeurs physiques de même dimension sont dites homogènes.

0 est homogène à tout ; écrire X = 0 a du sens quelle que soit la dimension de X.

On demandera certainement dans un exercice ou un problème de déterminer une grandeur :

- **il faudra donner son expression littérale ,**
- **il faudra faire l'application numérique**

- **Il faudra préciser l'unité.**

Vérifier la bonne cohérence du point de vue des dimensions de l'expression obtenue, c'est-à-dire que l'on a la même unité des deux côtés de l'égalité : c'est *l'homogénéité* du résultat.

Vérifiez que la valeur numérique obtenue est cohérente (par exemple, on ne peut pas avoir de vitesses supérieures à celle de la lumière dans le vide, soit approximativement $3.\ 10^8$ m. s^{-1}).

Une valeur numérique sans l'unité est un résultat incorrect et ne donnera aucun point en DS.

Vérifiez la cohérence mathématique en regardant les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles.