

## PRODUIT VECTORIEL

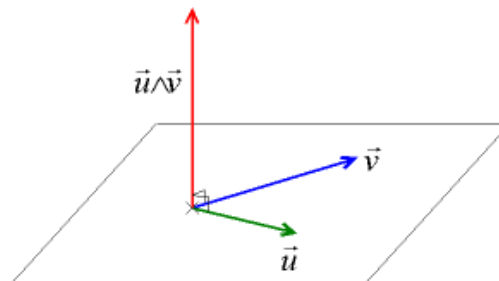
(d'après Wikipédia)

### I. Définition

On se place dans le référentiel  $R$ .

**D'un point de vue géométrique, le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $E$  non colinéaires se définit comme l'unique vecteur  $\vec{w}$  tel que :**

- le vecteur  $\vec{w}$  est orthogonal aux deux vecteurs donnés ;
- la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est de sens direct;
- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$



#### Notations:

Plusieurs notations sont en concurrence pour le produit vectoriel :

- En France, le produit vectoriel de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  est noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .
- Dans la littérature anglophone (et au Canada francophone, ainsi qu'en Suisse), le produit vectoriel est noté  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

#### Cas particuliers :

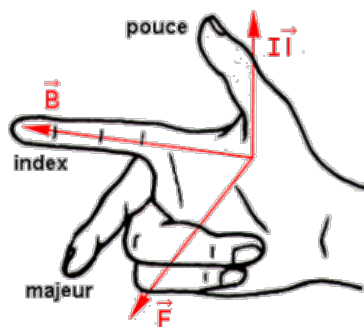
- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.
- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si la norme de leur produit vectoriel est égale au produit de leurs normes.

#### Orientation du produit vectoriel:

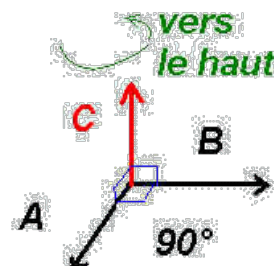
La notion d'orientation peut ici être comprise de manière élémentaire en utilisant la **règle de la main droite**:

le pouce, l'index et le majeur écartés en un trièdre indiquent respectivement le sens de  $\vec{u}$ , de  $\vec{v}$  et de  $\vec{w}$ .

Cette définition est surtout utilisée dans l'enseignement secondaire.



On trouve aussi la **règle du tir bouchon** (utilisée en Electromagnétisme): Si on imagine que l'on fait tourner un tire-bouchon de  $\vec{u}$  vers  $\vec{v}$ , alors on visse dans la direction de  $\vec{w}$ .



**Définition avec les coordonnées des vecteurs:**

Notons les coordonnées  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  et  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  des deux vecteurs. Leur produit vectoriel est donné par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

Cette identité pourrait être prise comme une seconde définition.

**II. Propriétés**

Le produit vectoriel est un produit distributif, anticommutatif, non associatif :

- Distributivité sur l'addition :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$$

- Compatibilité avec la multiplication par un scalaire:

$$\lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (\lambda\vec{b})$$

- Antisymétrie:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

- Non associativité:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$$

Ces propriétés découlent immédiatement de la définition du produit vectoriel.

**Egalité du double produit vectoriel (ou identité de Lagrange):**

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

**Démonstration:**

Soient  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  et  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \left( \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{pmatrix} (a_y c_y + a_z c_z) b_x - (a_y b_y + a_z b_z) c_x \\ (a_x c_x + a_z c_z) b_y - (a_x b_x + a_z b_z) c_y \\ (a_x c_x + a_y c_y) b_z - (a_x b_x + a_y b_y) c_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{pmatrix} (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_x - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) c_x \\ (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_y - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) c_y \\ (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_z - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) c_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$\text{D'ou: } \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

**Le produit vectoriel satisfait l'identité de Jacobi:**

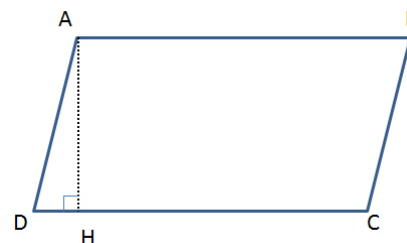
$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{0}$$

Cette propriété découle de la précédente.

### III. Applications immédiates en géométrie

#### 1) Aire d'un parallélogramme

Soit ABCD un parallélogramme.



Son aire est:

$$S = AB \cdot AH = AB \cdot AD \cdot \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AH}) = AB \cdot AD \cdot \sin(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \|\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}\|$$

On aurait pu aussi écrire en changeant de côté:  $S = \|\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\|$

Ainsi l'aire du parallélogramme ABCD est égale à la norme du produit vectoriel de deux vecteurs sur lesquels il s'appuie :

$$S = \|\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}\|$$

#### 2) Volume d'un parallélépipède

Soit S l'aire de la face ABCD.

Le volume du parallélépipède ABCDEFGH est égal au produit de l'aire par la hauteur AI où I est le projeté orthogonal de A sur EFGH:

$$V = AI \cdot S$$

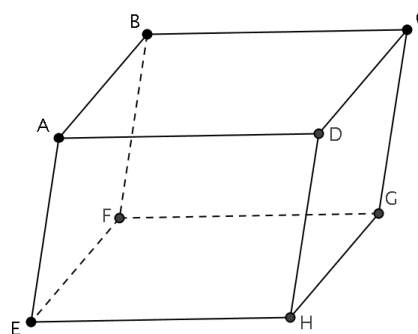
Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire orthogonal au plan EFGH et dirigé vers l'autre face.

$$\text{On a } AI = \overrightarrow{EA} \cdot \vec{u}$$

$$\text{Alors } V = (\overrightarrow{EA} \cdot \vec{u}) S = \overrightarrow{EA} \cdot (S \vec{u}) = \overrightarrow{EA} \cdot (\|\overrightarrow{EH} \wedge \overrightarrow{EF}\|) = \overrightarrow{EA} \cdot (\overrightarrow{EH} \wedge \overrightarrow{EF})$$

$$\text{Le volume du parallélépipède est : } V = \overrightarrow{EA} \cdot (\overrightarrow{EH} \wedge \overrightarrow{EF})$$

On aurait pu bien sûr utiliser les points de n'importe quelle autre face.  
Par exemple :



$$V = \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB})$$

**Volume d'un parallélépipède :** Soient  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  les 3 vecteurs ayant pour origine le même sommet d'un parallélépipède, le volume de celui-ci est :

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})|$$

### 3) Produit mixte

**On appelle produit mixte la quantité scalaire :**  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$

On a la propriété suivante :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

Démonstration : cf ce qui a été écrit pour le volume d'un parallélépipède.