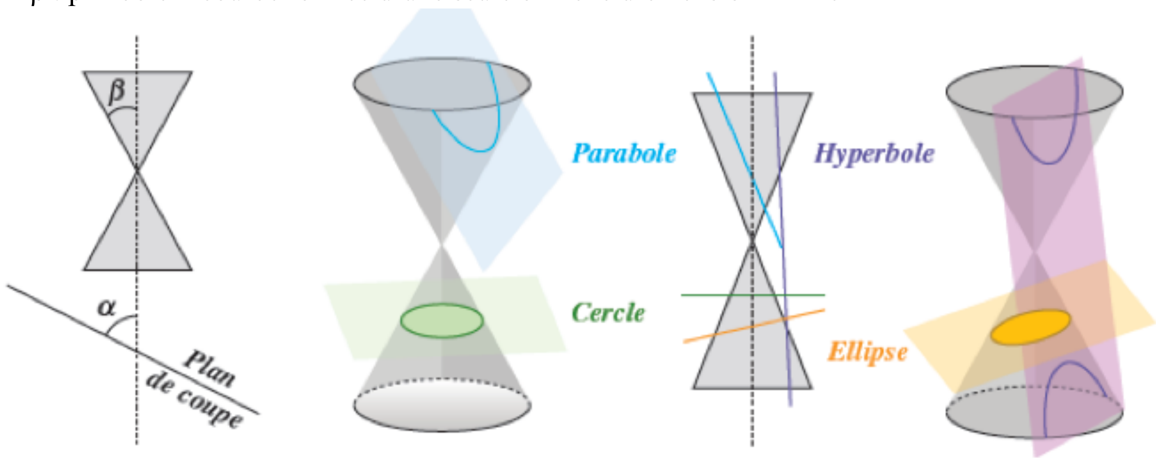
Quelques notions sur les coniques

Une **conique** est une courbe plane obtenue par l'intersection d'un plan avec un cône (d'où son nom). La courbe obtenue par la coupe diffère suivant les valeurs respectives de l'angle β (angle au sommet du cône) et de l'angle α (angle entre le plan et l'axe du cône. Attention, mathématiquement un cône est « double » comme un sablier) :

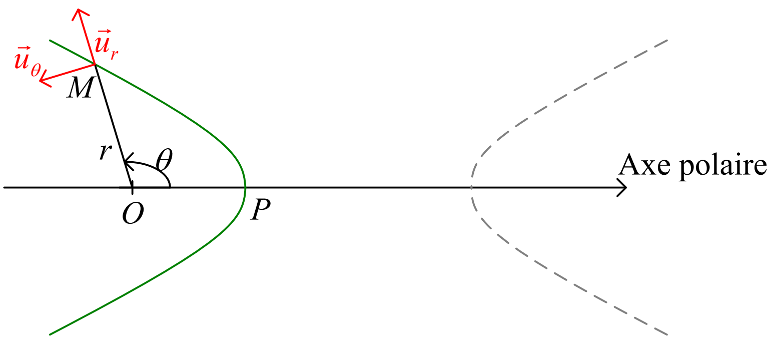
- $\alpha < \beta$: hyperbole = courbe formée de deux branches d'extension infinie
- $\alpha > \beta$: ellipse = courbe fermée
- $\alpha = \beta$: parabole = courbe formée d'une seule branche d'extension infinie



.

Dans le cours sur les forces centrales, on aura besoin de leur équation en coordonnées polaires (r, θ), en prenant O comme origine ; O est alors un foyer de la conique.

I. Hyperbole



Une hyberbole a deux branches.

La branche de l'hyperbole qui s'enroule autour du foyer O a pour équation : $r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ **avec p paramètre et e excentricité.**

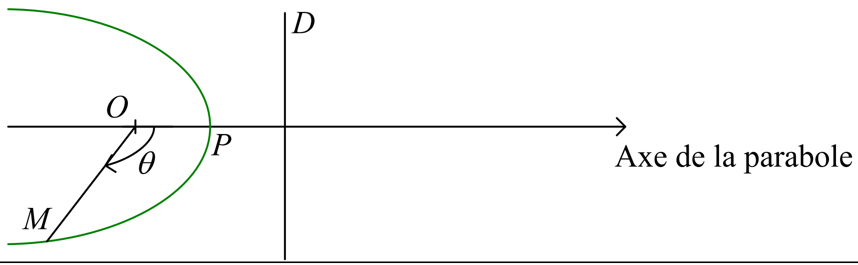
La branche de l'hyperbole qui ne s'enroule pas a pour équation : $r = \dfrac{p}{-1+e\cos\theta}$

L'excentricité e d'une hyperbole est strictement supérieure à 1.

La distance minimale est $r_{\min} = \dfrac{p}{1+e}$ pour la branche qui s'enroule autour du foyer ; elle vaut $r_{\min} = \dfrac{p}{-1+e}$ pour celle qui ne s'enroule pas.

p est la distance r pour $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$

II. Parabole

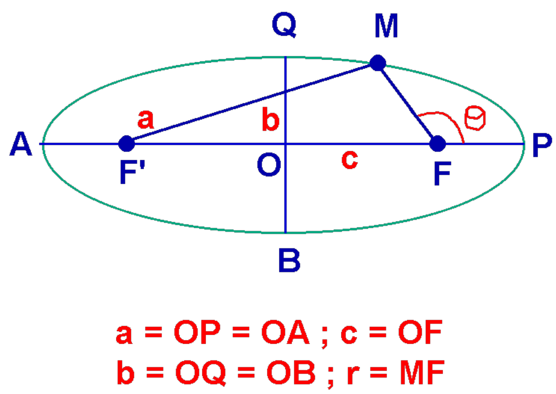


La parabole a une excentricité qui vaut 1. Son équation est : $r = \dfrac{p}{1+\cos\theta}$

La distance minimale est $r_{\min} = \dfrac{p}{2}$

p est la distance r pour $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$

III. Ellipse



On peut donner une définition géométrique de l'ellipse :

L'ellipse est le lieu des points M tels que $MF + MF' = 2a$**.**

L'ellipse a une excentricité qui est inférieure à 1 ; elle a pour équation par rapport au foyer F :

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$$

Elle a deux foyers F et F', qui sont symétriques par rapport au centre de l'ellipse O.

Le point le plus près du foyer est le **périgée** ; la distance minimale est $r_{\min} = \dfrac{p}{1+e}$.

Le point le plus éloigné du foyer est l'**apogée** ; la distance maximale est $r_{\max} = \dfrac{p}{1-e}$.

p est la distance r pour $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$

On peut travailler aussi avec les coordonnées cartésiennes, en prenant cette fois-ci l'origine au centre de l'ellipse.

En coordonnées cartésiennes, l'ellipse a pour équation : $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$

a est le demi-grand axe de l'ellipse – 2a est donc la largeur totale de l'axe horizontal.
b est le demi-petit axe de l'ellipse – 2b est donc la largeur totale de l'axe vertical.

On introduit aussi $\boxed{c = OF = OF' \text{, distance entre O et un foyer}}$.

<u>Quelques relations utiles :</u>

Aire de l'ellipse : $S = \pi ab$

$a^2 = b^2 + c^2$ **- graphiquement cela signifie que la distance entre un des sommets du petit axe et chacun des foyers est égale à a.**

$e = \dfrac{c}{a}$

$p = \dfrac{b^2}{a}$

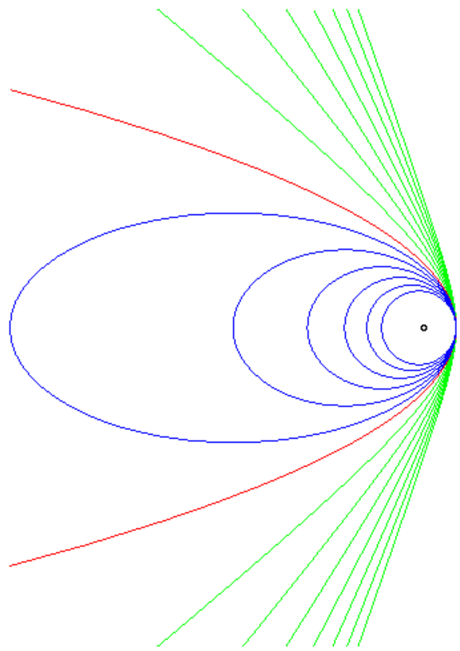
$r_{\min} + r_{\max} = 2a$

IV. Cercle

C'est un cas particulier d'ellipse, avec une **excentricité nulle** : r= p =cste

V. Coniques obtenues en augmentant l'excentricité, depuis e = 0

Les courbes ci-contre ont été obtenues avec un axe polaire horizontal et une distance minimale à droite du foyer.



<u>Si l'axe polaire n'est plus droit, on introduit un angle θ_0 dans l'équation de la conique.</u>

Exemple pour l'ellipse : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$