

Thème: Changement de coordonnées;
surface et volume élémentaires;
intégrales multiples

(1)

I Coordonnées cartésiennes

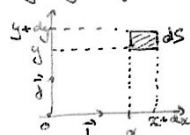
1) Coordonnées cartésiennes.

Soit un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixe. C'est l'origine du repère. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forme une base orthonormée, c'est-à-dire: $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.
Un point M est caractérisé par la donnée de ses coordonnées (x, y, z) .

$$\vec{OM} = (x, y, z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

2) Surface élémentaire.

Supposons que $M \in (xOy)$. (c'est-à-dire $z = \text{cte} = 0$).
Supposons que la 1^{ère} coordonnée de M n'est pas connue exactement, mais qu'elle est comprise entre x et $x+dx$. On dit que x est compris entre x et $x+dx$. De même supposons que y est compris entre y et $y+dy$.



Alors la position de M n'est pas connue exactement, mais on sait que M se trouve sur la surface $ds = dx dy$.

$$ds = dx dy \quad \text{surface élémentaire du plan } (xOy).$$

3) Volume élémentaire.

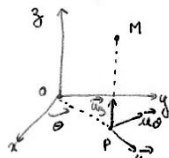
Si x est compris entre x et $x+dx$, y entre y et $y+dy$, z entre z et $z+dz$, alors M se trouve dans le volume $dV = dx dy dz$ volume élémentaire.

II Coordonnées cylindriques

(2)

1) Coordonnées cylindriques.

a) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère orthonormé fixe.



$\vec{OM} = (x, y, z)$. Considérons la projection P de M sur le plan (xOy) .

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM}.$$

On définit de la façon suivante les 3 coordonnées cylindriques:

$$r = \|\vec{OP}\|$$

$$\theta = (\vec{i}, \vec{OP})$$

$$z$$

$$r \in [0; +\infty[$$

$$\theta \in [0; 2\pi[$$

$$z \in]-\infty; +\infty[$$

b) Relations entre x, y, z et r, θ, z :

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM} = r(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) + z\vec{k}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \\ z \end{cases}$$

c) Base en coordonnées cylindriques: on introduit les nouveaux vecteurs. $\vec{u}_r = \frac{\vec{OP}}{r} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$ vecteur radial

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} \quad \text{vecteur orthoradial}$$

$$\vec{u}_z = \vec{k}$$

Dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, le vecteur $\vec{OM}$ s'écrit:

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$$

2) Surface élémentaire

a) Supposons $z = \text{cte}$. r et θ peuvent varier.

Par exemple, prenons $z=0$. Alors $\vec{OM} = r \vec{u}_r$.

Si r est compris entre r et $r+dr$ et θ compris entre θ et $\theta+d\theta$, alors M se trouve



sur une surface DS rectangulaire en 1^{ère} approximation, $DS = dr \times r d\theta$. (3)

$\Rightarrow$ la surface élémentaire du plan $(O, \vec{r}, \vec{e}_\theta)$
 or $DS = r dr d\theta$

b) Supposons que $r = \text{cte}$ et que θ et ϕ peuvent varier. Si θ varie de 0 à 2π , la base des points Π est un cylindre de rayon r .

Si θ est compris entre θ et $\theta + d\theta$, et ϕ entre ϕ et $\phi + d\phi$, alors Π se trouve sur la surface $DS = r d\theta \times r d\phi$.

$$\Rightarrow DS = r d\theta d\phi$$

c) Si $\theta = \text{cte}$: $DS = dr d\phi$

3) Volume élémentaire

Si r est compris entre r et $r + dr$, θ entre θ et $\theta + d\theta$, ϕ entre ϕ et $\phi + d\phi$, alors $dV = dr \times r d\theta \times r d\phi$

$$\Rightarrow dV = r^2 dr d\theta d\phi$$

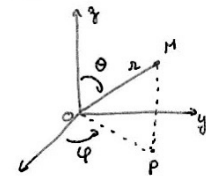
III. Coordonnées sphériques

1) Coordonnées sphériques

a) Soit P la projection de M sur le plan (xOy) . $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM}$

On introduit les 3 coordonnées sphériques de la façon suivante:

$$\begin{aligned} r &= \|\vec{OM}\| & \text{avec } r \in [0; +\infty[\\ \theta &= (\vec{k}, \vec{OM}) & \theta \in [0; \pi] \\ \phi &= (\vec{x}, \vec{OP}) & \phi \in [0; 2\pi] \end{aligned}$$



b) $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM}$ et $\vec{PM} = r \cos \theta \vec{k}$
 $\vec{OP} = r \sin \theta (\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j})$

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

c) Base orthonormée sphérique: (4)

On définit $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{r} \Rightarrow \vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$

$$\begin{aligned} \vec{e}_\theta &\rightarrow \vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{i} + \cos \theta \sin \phi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \\ \vec{e}_\phi &= -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j} \end{aligned}$$

2) Surface élémentaire

a) Si $r = \text{cte}$, θ et ϕ variant: si θ varie de 0 à π et ϕ de 0 à 2π , la base des points Π est une sphère de rayon r .

Si θ est compris entre θ et $\theta + d\theta$, ϕ est compris entre ϕ et $\phi + d\phi$

$$\Rightarrow DS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

b) Si $\phi = \text{cte}$ et θ et r compris entre θ et $\theta + d\theta$ et entre r et $r + dr$ respectivement: $DS = dr \times r d\theta$

$$\Rightarrow DS = r dr d\theta$$

c) Si $\theta = \text{cte}$: $DS = dr \times r \sin \theta d\phi$

$$DS = r dr \sin \theta d\phi$$

3) Volume élémentaire:

$$dV = dr \times r d\theta \times r \sin \theta d\phi \Rightarrow dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

IV. Intégrales multiples

$$\Leftrightarrow I = \iint g(x, y) dx dy$$

1) Si on peut écrire $g(x, y) = g(x)h(y)$ et si les bornes d'intégration sont indépendantes de x et de y :

$I = \int_{x_A}^{x_B} \int_{y_A}^{y_B} g(x)h(y) dx dy$, alors on peut séparer cette intégrale en 2 termes: $I = \int_{x_A}^{x_B} g(x) dx \times \int_{y_A}^{y_B} h(y) dy$

On s'est ramené en un produit d'intégrales simples.

(5)

(2) Si on peut écrire $f(x,y) = g(x)h(y)$ et si les bornes d'intégration sur l'une des variables dépendent de l'autre : ex $I = \int_{x_A}^{x_B} \int_{u(x)}^{v(x)} g(x)h(y) dx dy$,

alors on peut écrire : $H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} h(y) dy$
 et $I = \int_{x_A}^{x_B} g(x) H(x) dx$.

On s'est ramené au calcul de 2 intégrales simples.

3) Les général.

Pensez au changement de variables, aux intégrations par parties, regardez la parité des fonctions.

4) Exemples

a) Volume d'un cylindre de rayon R de hauteur h .

$$V = \iiint dT \quad \text{et} \quad dT = r dr d\theta dz. \quad (\text{coord cylindriques})$$

$$\Rightarrow V = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \pi R^2 h$$

b) Surface d'une sphère de rayon R .

$$S = \iint dS \quad \text{et} \quad dS = R^2 \sin\alpha d\alpha d\varphi \quad (\text{coord sphériques})$$

$$\Rightarrow S = R^2 \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2$$

c) Volume d'une boule de rayon R .

$$V = \iiint dT \quad \text{et} \quad dT = r^2 dr \sin\alpha d\alpha d\varphi$$

$$\Rightarrow V = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

d) Calcul de $I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

Carles $I = \int_{-1}^{+1} e^{-x^2} dx \times \int_{-1}^{+1} e^{-y^2} dy$

$$\Rightarrow I = \left[\int_{-1}^{+1} e^{-x^2} dx \right]^2 = I^2 \quad \text{ou} \quad I = \int_{-1}^{+1} e^{-x^2} dx. \quad (6)$$

Savez-vous calculer I ? Non. Si on trouve I , on aura I .

$I = \iint e^{-(x^2+y^2)} dx dy$. Passons en coordonnées cylindriques, c'est-à-dire en (r, θ) .

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2.$$

$$dS = dx dy \Rightarrow dS = r dr d\theta.$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{+1} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{+1} e^{-r^2} r dr d\theta$$

— attention aux bornes d'intégration.

$$\Rightarrow I = \int_0^{+1} r e^{-r^2} dr \times \int_0^{2\pi} d\theta = \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+1} \times 2\pi = \pi.$$

$$\Rightarrow I = \boxed{\int_{-1}^{+1} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

Et $I = \int_0^{+1} e^{-x^2} dx$? Par parité de la fonction

$$x \mapsto e^{-x^2}, \text{ on a : } I = \frac{1}{2} I \Rightarrow \int_0^{+1} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$