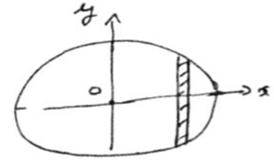
Compléments de la fiche Outil Coniques

(1)

• Surface d'une ellipse $S = \pi ab$



Démo: $S = \iint dx\,dy$ avec $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

$$\Rightarrow S = \int_{x=-a}^{a} \int_{y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx\,dy$$

$$= 4 \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx\,dy$$

Comme y varie entre 0 et $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, on intègre d'abord par rapport à y.

$$= 4 \int_{x=0}^{a} \left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \right) dx$$

$$= 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

Changement de variable: $x = a \sin v \Rightarrow dx = a \cos v\, dv$

$$S = 4ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 v}\, \cos v\, dv$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 v\, dv$$

$$= 2ab \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2v))\, dv$$

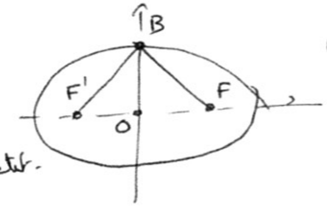
$$= 2ab \left[v + \frac{\sin(2v)}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2ab\, \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\underline{= \pi ab}}$$ CQFD.

(2)

$a^2 = b^2 + c^2$



Démo: $\forall M \in$ ellipse $MF + MF' = 2a$.

En particulier en B, sommet du petit.

axe: $BF + BF' = 2a$

Par symétrie $BF = BF' \Rightarrow \boxed{BF = a}$

. Th de Pythagore dans le triangle OBF:

$BF^2 = OB^2 + OF^2 \iff \underline{a^2 = b^2 + c^2}$ CQFD.

$e = \frac{c}{a}$

C'est la définition de l'excentricité.

On peut cependant retrouver cette relation à partir de l'équation polaire de l'ellipse: $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$

$\Rightarrow r_{max} = \frac{p}{1-e}$ et $r_{min} = \frac{p}{1+e}$

• $r_{max} + r_{min} = 2a \Rightarrow \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = 2a$

$\iff \boxed{a = \frac{p}{1-e^2}}$

• $\begin{cases} r_{max} = a + c \\ r_{min} = a - c \end{cases} \Rightarrow c = \frac{r_{max} - r_{min}}{2}$

$\Rightarrow c = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{1-e} - \frac{p}{1+e}\right]$

$\iff \boxed{c = \frac{pe}{1-e^2}}$

• On trouve $\boxed{\frac{c}{a} = e}$

3

$$\boxed{p = \frac{b^2}{a}}$$

Démo : Précédemment on a obtenu $a = \frac{p}{1-e^2}$

$\Leftrightarrow \quad p = a(1 - e^2)$

$\Leftrightarrow \quad a\,p = a^2(1 - e^2)$

$\Leftrightarrow \quad a\,p = a^2 - (a e)^2$

Comme $e = \frac{c}{a}$, $c = ea$ $\Rightarrow$ $a\,p = a^2 - c^2$

Comme $a^2 = b^2 + c^2$, $a^2 - c^2 = b^2$ $\Rightarrow$ $a\,p = b^2$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{p = \frac{b^2}{a}}$

$$\boxed{r_{max} + r_{min} = 2a}$$

Immédiat avec la figure !