

La mesure en Sciences Expérimentales

I- Mesure d'une grandeur physique

Extrait du programme :

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.

La métrologie est codifiée par des normes internationales qui définissent un vocabulaire spécifique et des usages précis. Un des textes de référence est le **Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (GUM)** publié par le Bureau International des Poids et Mesures.

1) Définitions

Le **mesurage** est l'ensemble des opérations de mesure.

Ce que l'on mesure est le **mesurande**.

Ainsi, mesurer une grandeur consiste à réaliser le mesurage d'un mesurande.

Le mesurage est réalisé à l'aide d'un instrument de mesure qui fournit une **valeur mesurée**, ou **mesure**.

La «**valeur vraie**» d'un mesurande est la mesure que l'on obtiendrait par un mesurage parfait. On ne la connaît pas.

Les grandeurs d'influence: Grandeur qui a un effet sur le résultat du mesurage (exemple: température, ...)

Pourquoi ne peut-on pas avoir accès lors d'une mesure (d'un mesurage plus exactement) à la valeur vraie de la grandeur mesurée (du mesurande)?

A CAUSE DE	EXEMPLES
Opérateur	<i>Erreur de parallaxe, mauvais ajustement du ménisque, mauvaise lecture, mauvaise utilisation du matériel, fatigue, ...</i>
Instrument Matériel utilisé	<i>Mauvais étalonnage (pb de justesse), bruit électronique, mauvais calibre, matériel peu précis (pb de fidélité), variabilité à cause de paramètres extérieur (température, ...) ...</i>
Evolution des conditions expérimentales (T, p, ..)	<i>Le volume dépend de T, la valeur de la résistance d'un conducteur ohmique dépend de T, la conductivité d'une solution dépend de T,... (grandeurs d'influence)</i>
Mauvaise définition de la grandeur mesurée (mesurande)	<i>La largeur d'une table, dont la valeur varie en fonction de l'endroit où l'on effectue la mesure ...</i>
Protocole inadapté	<i>Montage court ou montage long en électricité, ...</i>

Ainsi on obtient rarement la mesure vraie quand on fait le mesurage d'une grandeur, à cause des différentes sources d'erreurs. Cela est particulièrement visible quand on réitère le processus du mesurage. Ainsi les valeurs obtenues par mesurage contiennent une part aléatoire et on affectera une certaine incertitude à la mesure réalisée.

Lors de la mesure d'une grandeur physique, il convient de s'interroger sur sa précision ainsi que sur le niveau de confiance que l'on peut lui accorder.

Il y a deux types d'écart possible entre la grandeur vraie et la mesure réalisée : **les erreurs systématiques et les erreurs aléatoires.**

2) Erreur systématique

Une **erreur systématique** est une erreur qui prend la même valeur (inconnue !) à chaque mesure.

$$ERs = \overline{m} - m_{\text{vrai}}$$

Causes de l'erreur systématique

Problème au niveau du matériel/instruments utilisés	<i>Instrument mal étalonné, problème de positionnement de la lentille sur son support, erreurs dues à la résistance des fils de liaison lors de la mesure de la résistance d'un conducteur ohmique, vieillissement des composants, ...</i>
Effet des grandeurs d'influence (T, p ...)	<i>Le volume qui dépend de θ, la valeur de la résistance d'un conducteur ohmique dépend de θ, la conductivité d'une solution dépend de C et θ, ... (grandeurs d'influence)</i>
Mauvaise méthode ou mauvais mode opératoire	<i>Montage court ou montage long en électricité, perturbation due à la présence des instruments de mesure, ...</i>

Une erreur systématique doit être clairement identifiée afin de la corriger.

3) Erreur aléatoire

Une **erreur aléatoire** est une erreur qui prend une valeur différente lors de chaque mesure.

Cause des erreurs aléatoires :

<i>Influence de l'opérateur</i>	<i>Erreur de lecture, ajustage variable du niveau d'une fiole jaugée, d'une pipette jaugée, appréciation d'une mesure, ...</i>
<i>Mesurande mal définie</i>	<i>Irrégularité de l'épaisseur d'une pièce, ...</i>
<i>Instabilité d'un instrument de mesure, de différents étages d'une chaîne de mesure...</i>	

Imaginons que l'on réalise un nombre N de mesurages dans les mêmes conditions de répétabilité (même opérateur, même matériel, mêmes conditions expérimentales). Il faut, à partir de ces résultats, obtenir une

estimation de la valeur vraie, notée m_{vraie} .

La meilleure estimation de la valeur du mesurande est la valeur moyenne $\bar{m}$ des N mesures :

$$\bar{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i$$

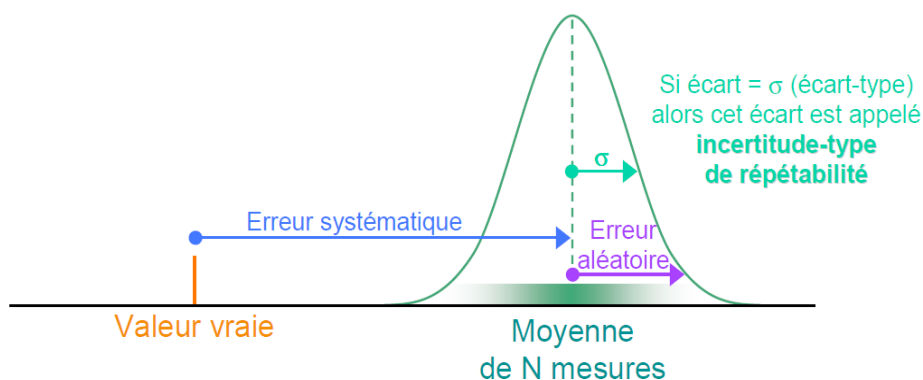
Une mesure quelconque m_i est en général différente de la moyenne et on appelle **erreur aléatoire** l'écart entre cette mesure et la moyenne.

$$ERa = m_i - \bar{m}$$

Cette erreur varie aléatoirement à chaque mesure, on ne peut donc pas lui appliquer de correction. Par contre elle peut être réduite en augmentant le nombre de mesures.

Synthèse

Résultat de mesure = valeur vraie + erreur aléatoire + erreur systématique



Erreur systématique (VIM ; §2.17)

" Composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, demeure constante ou varie de façon prévisible "

Erreur aléatoire (VIM ; §2.19)

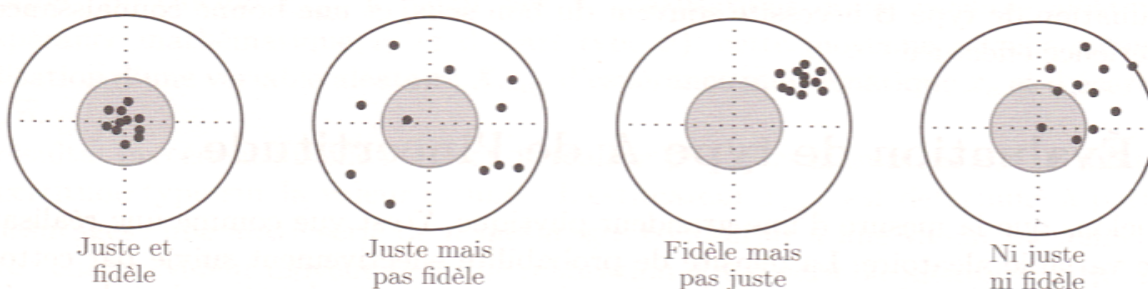
" Composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, varie de façon imprévisible "

4) Fidélité et justesse

La fidélité d'un instrument de mesure traduit son aptitude à donner des résultats voisins lors de chaque mesurage, il faut donc pour cela que l'erreur aléatoire soit faible (mesures peu dispersées).

La justesse d'un instrument de mesure traduit son aptitude à donner des résultats sans biais systématique (faible erreur systématique).

La figure présentée ci-dessous résume ces concepts par analogie avec un tir sur une cible. Le centre de la cible représente la valeur vraie du mesurande et chaque impact est le résultat d'une mesure.



5) Incertitude-type

D'après le programme :

Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
------------------------------------	--

L'objectif du mesurage est de proposer un intervalle de valeurs probables du mesurande, c'est-à-dire une valeur estimée m_{est} et un intervalle centré sur cette valeur qui caractérise la dispersion des valeurs autour de la valeur estimée.

On écrira ainsi : $M = m_{\text{est}} \pm u(m)$ (incertitude-type)

Ou encore : $M = \dots$ et $u(m) = \dots$

Ou : $M = \dots$ (valeur de $u(m)$)

$u(m)$ est l'incertitude-type – de l'anglais uncertainly. C'est l'estimation de la dispersion des valeurs possibles pour la grandeur mesurée.

Attention ! Les valeurs mesurées potentielles ne sont pas limitées à l'intervalle $[m - u(m) ; m + u(m)]$; l'incertitude-type donne un ordre de grandeur de la dispersion possible des valeurs autour de x .

Selon les consignes actuelles, nous calculerons l'incertitude-type avec 2 chiffres significatifs (2 CS) au maximum.

Le nombre de chiffres significatifs du résultat de la mesure doit être cohérent avec la valeur de l'incertitude-type.

Exemples de résultats cohérents, avec des incertitudes type :

$$V = 15,53 \text{ mL} \pm 0,35 \text{ mL}$$

$$R = 233 \, \Omega \pm 12 \, \Omega$$

$$V = 132 \text{ km/h} \pm 5 \text{ km/h}$$

$$U = 6,350 \text{ V} \pm 0,015 \text{ V}$$

Si la calculatrice donne $x = 5,30256$ alors que $u = 0,030$, on écrira : $x = 5,303 \pm 0,033$. Les autres chiffres fournis par la calculatrice ne sont pas significatifs et ne doivent pas être écrits.

Le calcul de l'incertitude-type dépend de la méthode employée pour effectuer le mesurage :

Évaluation de type A (statistique) : évaluation de l'incertitude par analyse statistique de séries d'observations (on parle dans ce cas d'incertitude de répétabilité). La valeur estimée x_{est} est la moyenne des mesures et l'incertitude type $u(x)$ renseigne sur la dispersion des résultats.

Évaluation de type B (probabiliste) : évaluation non statistique, faite lors d'une unique mesure (ce qui est souvent le cas en travaux pratiques). Dans ce cas, il faut évaluer l'incertitude par un modèle probabiliste rendant compte de la précision des appareils, des erreurs de lecture, de pointé, etc...

6) Incertitude-type relative

L'incertitude-type relative est le rapport de l'incertitude-type par la valeur de la grandeur mesurée :

$$\text{incertitude-type relative} = \frac{u(m)}{m}$$

Elle s'exprime généralement en %.

Exemples :

- une incertitude-type $u = 5,0 \text{ cm}$ sur une longueur $L = 4,530 \text{ m}$ donne une incertitude-type relative de $0,050 / 4,530 = 0,011 = 1,1 \%$.

- si $u(m)/m = 3\%$ alors on écrira : $M = m \pm 3\%$ (incertitude-type relative).

- $R = 253 \text{ k}\Omega \pm 5 \text{ k}\Omega$ est équivalent à $R = 253 \text{ k}\Omega \pm 2\%$ car $5/253 = 0,02 = 2\%$.

Si l'on ne connaît que l'incertitude-type relative, il faut calculer l'incertitude-type absolue pour connaître le nombre de chiffres significatifs sur la grandeur mesurée.

Par exemple :

- si le calcul de x donne $x = 1,223567 \text{ k}\Omega$ et si l'incertitude-type relative est de 5%, alors on calcule l'incertitude-type : $u = 1,223567 \cdot 10^3 \cdot 5/100 = 61 \text{ }\Omega = 0,061 \text{ k}\Omega$

L'écriture correcte de x est : $x = 1,224 \pm 0,061 \text{ k}\Omega$ (avec l'incertitude-type).

II. Evaluation de type A de l'incertitude

La valeur estimée X_{est} est la moyenne des mesures et l'incertitude-type $u(x)$ renseigne sur la dispersion des résultats.

On calcule l'écart-type expérimental et on en déduit l'incertitude-type.

Evaluation de type A	
On suppose n observations m_k indépendantes (condition de répétabilité)	
Moyenne arithmétique	$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_k$
Ecart-type expérimental	$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (m_k - \bar{m})^2}$
Incertainde-type (Ecart type expérimental de la moyenne)	$u_{\text{rep}}(m) = \frac{\sigma_e}{\sqrt{n}}$

On remarque que **plus N est grand, plus l'incertitude-type est petite**. On a donc intérêt à augmenter le nombre de mesures de la même grandeur pour diminuer l'incertitude sur le résultat.

Points aberrants : Il arrive parfois qu'une mesure soit aberrante (erreur de fonctionnement de l'appareil ou perturbation extérieure). Sa valeur est alors fortement éloignée de la valeur moyenne des mesures. Le critère retenu est qu'une valeur est aberrante si son écart à la valeur moyenne dépasse $2\sigma_e$. On élimine alors ce point du tableau de valeurs et on reprend le calcul de m et de σ_e .

Exemple : On effectue 20 mesures de la température T , en $^{\circ}\text{C}$:

96,90 ; 98,18 ; 98,25 ; 98,61 ; 99,03 ; 99,49 ; 99,56 ; 99,74 ; 99,89 ; 100,07 ; 100,33 ; 100,42 ; 100,68 ; 100,95 ; 101,11 ; 101,20 ; 101,57 ; 101,84 ; 102,36 ; 102,72.

Quelle est la meilleure estimation de la température ?

Quel est l'écart-type expérimental ? Quelle est l'incertitude-type ?

Cela peut se faire avec la calculatrice ou avec Python :

Exemple de script Python, avec les fonctions **mean** ou **average** (pour la moyenne) et **std** (pour l'écart-type expérimental) de la bibliothèque **numpy**.

```
import numpy as np
T = np.array([96.90, 98.18, 98.25, 98.61, 99.03, 99.49, 99.56, 99.74, 99.89, 100.07, 100.33, 100.42, 100.68])
print(T)
moyenne = np.mean(T)
ecarttype = np.std(T)
print("La moyenne des températures est : ", round(moyenne,1))
print("L'écart type expérimental est :", round(ecarttype,1))
```

Remarques : *round* permet d'avoir une valeur arrondie de ce qui a été calculé, avec un nombre de décimales que l'on précise.

Ne pas hésiter à faire varier le nombre de décimales pour avoir au maximum 2 chiffres significatifs.

III. Evaluation de type B de l'incertitude

Lorsque l'estimation d'une grandeur m ne peut être obtenue à partir d'observations répétées (cas d'une seule mesure), l'incertitude-type $u(m)$ est évaluée par un jugement probabiliste. Une connaissance générale de l'expérience est nécessaire pour rechercher et évaluer les sources d'erreurs. On détermine alors l'intervalle des valeurs mesurées raisonnablement acceptables.

1) Précision Δ déduite des informations données par le constructeur

La valeur Δ est lue sur un appareil dont la précision est fournie par le constructeur.

Quelques exemples sont donnés ci-dessous :

Dans le cas d'un appareil gradué (règle, burette, etc...), la précision Δ est donnée par :

$$\Delta = \frac{1}{2} \text{ graduation}$$

Dans le cas d'une mesure à l'aide d'une règle par exemple :

1 graduation = 1 mm, donc $\Delta = 0,5$ mm

Pour un appareil à lecture double sur une échelle graduée (mesure d'une longueur entre deux abscisses) : Il y a deux causes d'erreur (lors de la mesure de chaque extrémité). Il faut alors **multiplier la précision Δ d'une mesure par $\sqrt{2}$** (justification plus loin).

**Dans le cas d'un appareil numérique, la précision Δ est fournie par le constructeur sous la forme :
 $p\%$ lecture + n UL (unité de lecture, ou digit).**

Par exemple, la lecture d'une tension sur un voltmètre numérique donne 2,458 V et le constructeur fournit pour le calibre utilisé 0,1% lecture + 2 UL (ici 1 mV). La précision déduite des informations fournies par le constructeur est alors : $\Delta = 0,1\% * 2,458 + 2 * 10^{-3} = 4,458 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 4,458 \text{ mV}$.

Tolérance : pour un certain nombre d'appareils ou composants, le fabricant peut donner la tolérance, c'est-à-dire la précision sous la forme d'un pourcentage :

Par exemple, les résistances électriques utilisées en TP ont une tolérance de 1 %.

Ainsi, pour une résistance de 500 Ω de tolérance 1%, on a $500 * 1/100 = 5 \Omega$.

Cela signifie que la valeur de la résistance est 500 Ω avec un demi-intervalle de 5 Ω

2) Précision Δ déduite des observations expérimentales

On considère le cas où l'estimation de la valeur mesurée est comprise entre deux valeurs $m_{\min}$ et $m_{\max}$, intervalle déterminé expérimentalement. Dans ce cas, la précision est donnée par :

$$\Delta = (m_{\max} - m_{\min})/2$$

Cette situation est fréquente en optique notamment : pour localiser l'image à l'aide d'un écran, si l'image est vue nette sur un intervalle de positions de l'écran de largeur 1 cm, alors la précision est $\Delta = 0,5$ cm.

3) Incertitude-type associée à une évaluation de type B

Pour une évaluation de type B effectuée avec une précision Δ , l'incertitude type est donnée par :

$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Remarque : Le facteur $\frac{1}{\sqrt{3}}$, préconisé par une norme internationale, est obtenu en considérant une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle de largeur 2Δ - c'est-à-dire que toutes les valeurs sont équiprobables sur l'intervalle $x - \Delta, x + \Delta$.

Exemple : dans le cas du banc gradué :

$$\Delta = 0,5 \text{ mm} \quad u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = 0,29 \text{ mm}$$

En résumé :

Instrument de mesure	Incertitude type
Appareil analogique, règle, ...	$u_{\text{inst}}(m) = \frac{d/2}{\sqrt{3}} = \frac{d}{\sqrt{12}}$ (simple erreur de lecture) $u_{\text{inst}}(m) = \sqrt{2} \times \frac{d/2}{\sqrt{3}}$ (double erreur de lecture)
Appareil numérique (ampèremètre, voltmètre, ...)	$u_{\text{inst}}(m) = \frac{\text{précision}(x \times \text{lecture} + n \times \text{digit})}{\sqrt{3}}$
Autre instrument (avec précision/tolérance du constructeur)	$u_{\text{inst}}(m) = \frac{\text{tolérance}}{\sqrt{3}}$

IV. Compatibilité des deux mesures

Rappels : L'incertitude-type qui accompagne une mesure est l'estimation de la dispersion des valeurs attribuables à la grandeur mesurée. Si une autre personne fait une mesure avec le même protocole de la même grandeur, elle trouvera une autre valeur mesurée, probablement distincte, mais proche : La différence entre les deux valeurs mesurées sera du même ordre que l'incertitude-type initialement évaluée.

Il s'agit ici de préciser l'écart acceptable entre deux mesures pour que l'on puisse les qualifier de compatibles (ou cohérentes).

1) Comparer une mesure à une valeur de référence

Une **valeur de référence** est une valeur mesurée par une méthode de référence, c'est-à-dire par une méthode scientifiquement jugée comme supérieure à toute autre, donnant une estimation très précise.

Exemples :

- La vitesse de la lumière ($c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$) est une valeur de référence, c'est même une constante universelle.
- Les longueurs d'onde des lampes spectrales ont été mesurées avec des instruments très précis en laboratoire et sont bien connues, ce sont des valeurs de référence.

On définit le z-score (ou écart normalisé) par l'écart entre la valeur mesurée x et la valeur de référence x_{ref} , divisé par l'incertitude-type :

$$z = \frac{|x - x_{\text{ref}}|}{u(x)}$$

Plus le z-score est proche de 0, plus la valeur mesurée se rapproche de la valeur de référence.

Si $z > 2$, on considère que la mesure est incompatible avec la valeur de référence.

2) Comparer deux mesures entre elles

D'après le programme :

Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
--	--

On peut comparer deux mesures x_1 et x_2 entre elles : Le z-score fait intervenir l'incertitude-type sur chaque mesure :

$$z = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

Si $z > 2$, on considère que les mesures sont incompatibles.

V. Incertitude-type composée

Il est fréquent qu'on calcule une grandeur physique à partir de grandeurs mesurées. Les incertitudes de détermination des grandeurs mesurées se propagent sur la grandeur calculée et il est nécessaire d'évaluer l'incertitude induite sur cette dernière : on dit qu'il y a **propagation des incertitudes**.

Exemple : D'après la loi d'Ohm, la résistance d'un conducteur est donnée par la relation $R = \frac{U}{I}$, où U est la tension électrique (à mesurer au voltmètre) et I l'intensité du courant électrique traversant le conducteur (à mesurer à l'ampèremètre). L'incertitude-type sur R dépend de celles sur U et I .

Extrait du programme :

Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.
-------------------------------	--

1) Cas d'une seule variable

A admettre et à connaître :

Si $m = a x + b$ où a et b sont des constantes, alors $u(m) = |a| u(x)$

Si $m = a x^n$, alors $\frac{u(m)}{m} = |n| \frac{u(x)}{x}$

En particulier, si $m = \frac{1}{x}$, alors $\frac{u(m)}{m} = \frac{u(x)}{x}$

2) Cas de plusieurs variables

A admettre et à connaître :

$$\text{Si } m = a x_1 + b x_2, \text{ alors } u(m) = \sqrt{a^2 u(x_1)^2 + b^2 u(x_2)^2}$$

$$\text{En particulier, si } m = x_1 \pm x_2, \text{ alors } u(m) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}$$

$$\text{Si } m = x_1^n x_2^p, \text{ alors } \frac{u(m)}{m} = \sqrt{n^2 \left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + p^2 \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

$$\text{En particulier, si } m = x_1 x_2 \text{ ou si } m = x_1 / x_2 \text{ alors } \frac{u(m)}{m} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

Exemple : Dans le cas d'une mesure de longueur à la règle, on doit prendre en compte l'incertitude sur la valeur de x_1 et de x_2 aux deux extrémités et considérer que l'on a une incertitude composée (voir paragraphe suivant) : $L = x_2 - x_1$

$$\text{D'où } u(L) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}$$

$$\text{Comme } u(x_1) = u(x_2) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}, \text{ on a } u(L) = \sqrt{\left(\frac{\Delta}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2\Delta^2}{3}} = \sqrt{2} \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

D'où l'expression de u dans le cadre d'une double erreur de lecture.

Par ailleurs, **si une source d'erreur est dominante, elle doit seule être prise en compte.**

$$\text{Exemple : Lors du TP 1, l'angle } \theta \text{ vérifiait } \theta = x/L, \text{ alors } \frac{u(\theta)}{\theta} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2}$$

$$\text{Si on prend } x = 1,0 \text{ cm et } u(x) = 1 \text{ mm}, \frac{u(x)}{x} = 0,1$$

$$\text{Si on prend } L = 1,000 \text{ m et } u(L) = 5 \text{ mm}, \frac{u(L)}{L} = 0,005 \quad \text{Alors } \frac{u(x)}{x} \gg \frac{u(L)}{L}$$

$$\text{On peut négliger l'incertitude sur } L \text{ et écrire } \frac{u(\theta)}{\theta} = \frac{u(x)}{x}$$

On procède de même quand il s'agit de prendre en compte différentes sources d'erreurs : erreurs de mesure ou de lecture, etc.

3) Méthode numérique de Monte-Carlo (MC)

Extrait du programme :

5. Probabilités – statistiques	
Variable aléatoire.	Utiliser les fonctions de base des bibliothèques random et/ou numpy (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire.

Pour les cas plus compliqués, ou si c'est explicitement demandé, ou si on a un ordinateur à sa disposition, on fait une simulation numérique à l'aide de Python : supposons que $m = f(x_1, x_2)$ et que l'on connaisse les incertitudes- type $u(x_1)$ et $u(x_2)$; on calcule m pour un très grand nombre de couples (x_1, x_2) dont les valeurs sont prises aléatoirement dans les intervalles $[x_i - \sqrt{3} u(x_i); x_i + \sqrt{3} u(x_i)]$ – on reconnaît la précision Δ ; on calcule la moyenne et l'incertitude-type grâce aux fonctions *average* et *std* respectivement de la bibliothèque *numpy*.

Modules :

numpy as np : pour l'écriture des données sous forme de tableaux

numpy.random as rd : pour les tirages aléatoires

Fonctions du module numpy :

`np.mean(m)` , ou encore `np.average(m)` : renvoie la moyenne des valeurs du tableau `m`

`np.std(m)` : renvoie l'écart-type des valeurs du tableau `m`

Fonction du module `numpy.random` :

`rd.uniform(-1, 1, N)` : renvoie un tableau de `N` valeurs tirées aléatoirement selon une loi uniforme (c'est-à-dire équiprobable) entre -1 et 1.

`rd.normal(valeur centrale, incertitude-type, N)` : renvoie un tableau de `N` valeurs tirées aléatoirement selon une loi normale (c'est-à-dire une gaussienne centrée sur la valeur centrale et selon une certaine incertitude-type).

Exemple : On détermine la distance focale image d'une lentille mince convergente par la méthode d'autocollimation. L'objet visé se trouve en $x_1 = 20,0$ cm, connu avec une précision de 2 mm ; l'image se forme dans le plan focal objet pour une lentille placée en $x_2 = 45$ cm, avec une précision de 3 mm.

Dans la méthode de Monte-Carlo, vu le très grand nombre de tirages réalisés, l'incertitude-type se confond avec l'écart-type.

Méthode d'autocollimation

On importe les bibliothèques nécessaires.

import numpy as np

import numpy.random as rd

On entre les valeurs numériques.

`x1 = 20` **# Position x_1 de l'objet en cm**

`x2 = 45` **# Position x_2 de la lentille en cm**

`s1 = 0.2` **# précision sur la position de l'objet en cm**

`s2 = 0.3` **# précision sur la position de la lentille en cm**

`N = 10000` **# nombre de valeurs tirées aléatoirement**

Calcul proprement dit de N valeurs de f à partir des valeurs calculées de x_1 et x_2 selon une loi uniforme

`x1MC = x1 + s1 * rd.uniform(-1, 1, N)`

`x2MC = x2 + s2 * rd.uniform(-1, 1, N)`

`fMC = x2MC - x1MC`

Calcul de la moyenne f_{moy} et de l'incertitude-type it

`f moy = np.average(fMC)`

`it = np.std(fMC)`

Affichage du résultat

`print( "La distance focale moyenne est ", round(f moy, 2), "cm")`

`print( "L'incertitude type est ", round(it, 2), "cm")`

Ne pas hésiter à recommencer la dernière étape avec un nombre de chiffres significatifs cohérent.

La distance focale moyenne est 25.00 cm

L'incertitude type est 0.21 cm

Variante avec une loi normale :

Méthode d'autocollimation

On importe les bibliothèques nécessaires.

import numpy as np

import numpy.random as rd

from math import sqrt

On entre les valeurs numériques.

`x1 = 20` **# Position x_1 de l'objet en cm**

`x2 = 45` **# Position x_2 de la lentille en cm**

```

s1 = 0.2      # précision sur la position de l'objet en cm
s2 = 0.3      # précision sur la position d la lentille en cm
N = 10000     # nombre de valeurs tirées aléatoirement

# Calcul des incertitudes
u1 = s1 / sqrt(3)
u2 = s2 / sqrt(3)

# Calcul proprement dit de N valeurs de f* à partir des valeurs calculées de x1 et x2 selon une loi normale
x1MCn = rd.normal(x1, u1, N)
x2MCn = rd.uniform(x2, u2, N)
fMCn = x2MCn - x1MCn

# Calcul de la moyenne fmoyn et de l'incertitude-type it
fmoyn = np.average(fMCn)
itn = np.std(fMCn)

# Affichage du résultat
print("La distance focale moyenne est ", round(fmoyn,2), "cm")
print("L'incertitude type est ", round(itn, 2), "cm")

```

Ne pas hésiter à recommencer la dernière étape avec un nombre de chiffres significatifs cohérent.

La distance focale moyenne est 25.00 cm
L'incertitude type est 0.21 cm

VI. Détermination d'une loi linéaire avec incertitude

Extrait du programme :

Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés.
Régression linéaire.	Utiliser la fonction polyfit de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction random.normal de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.

1) Lois linéaires

Parmi les lois de la Physique, certaines sont linéaires (comme la loi d'Ohm $u = R i$) et d'autres pas (comme la loi de Descartes pour les lentilles $\overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{f'}}{\overline{OA} + \overline{f'}}$). **Pour vérifier une loi, on se ramènera toujours à une relation affine entre les variables** – sur l'exemple de la loi de Descartes ci-dessus, on pourra poser $x = \frac{1}{\overline{OA}}$ et $y = \frac{1}{\overline{OA'}}$. Alors la loi à vérifier sera : $y = x + \frac{1}{\overline{f'}}$.

En l'absence d'information sur les incertitudes, on se contente de constater dans un premier temps que les points sont bien alignés (à la calculatrice, avec un tableur ou avec Python). Si des points aberrants apparaissent, ne pas hésiter à refaire la mesure ou à identifier au moins la source d'erreur (mesure très peu précise, comme celles faites avec le viseur sur le banc optique). On fait ensuite une régression linéaire

– le coefficient de régression linéaire r donne une bonne idée du bon accord des mesures avec la loi, on doit avoir $|r| \geq 0,995$.

2) Barres ou ellipses d'incertitude

En physique on fait l'effort d'évaluer l'incertitude sur les mesures des grandeurs et le coefficient de régression linéaire n'est alors plus utile.

Supposons que l'on ait une loi de la forme $y = ax + b$. Si on néglige l'incertitude sur x et si l'incertitude sur y est $u(y)$, on place sur chaque point un segment centré sur le point et de demi largeur $\sqrt{3} \cdot u(y)$ – ce qui constitue une barre d'incertitude.

Remarque : Il n'y a pas consensus ; j'ai utilisé un facteur $\sqrt{3}$, d'autres préfèrent un facteur 2, d'origine statistique. Cela n'a pas de grande importance, l'incertitude-type donne un bon ordre de grandeur de l'erreur, et $\sqrt{3}$ et 2 sont des grandeurs bien proches...

Exemple :

Soit le tableau de mesures suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0,3	1,8	4,0	6,3	8,3	9,8	11,5

On prendra une incertitude égale à 0,1 pour u_x et égale à 0,2 pour toutes les valeurs de y .

On vérifie ainsi que les points semblent bien alignés. On prend en compte les barres d'incertitude avec `plt.errorbar` :

Exemple

On importe les bibliothèques nécessaires.

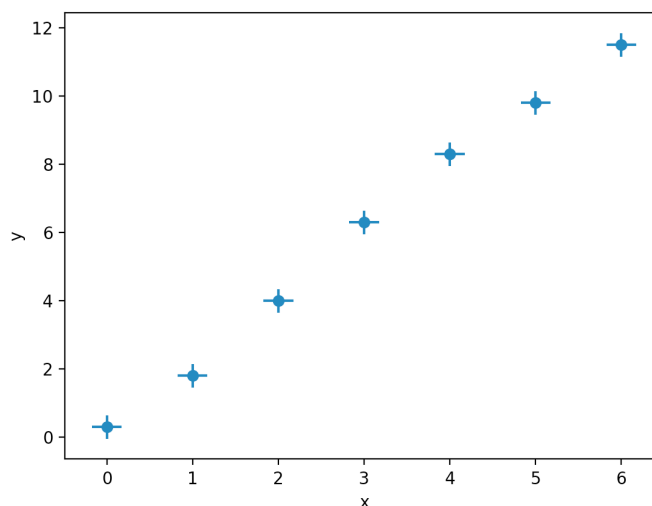
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import numpy.random as rd
from math import sqrt
```

On entre les valeurs numériques.

```
x = np.array([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6])
y = np.array([0.3, 1.8, 4.0, 6.3, 8.3, 9.8, 11.5])
ux = 0.1
uy = 0.2
```

Tracé des points

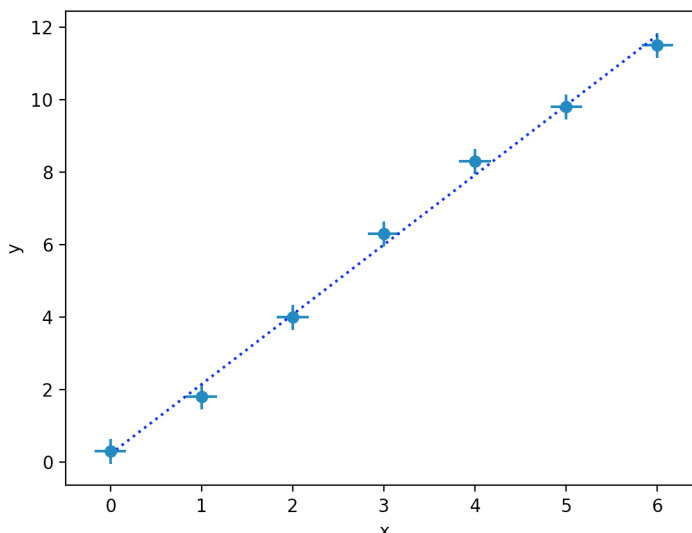
```
plt.plot(x, y, 'r+')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.errorbar(x, y, xerr = sqrt(3) * ux, yerr = sqrt(3)*uY, fmt = 'o')
plt.show()
```



Alors la droite de régression linéaire doit passer par toutes les barres.

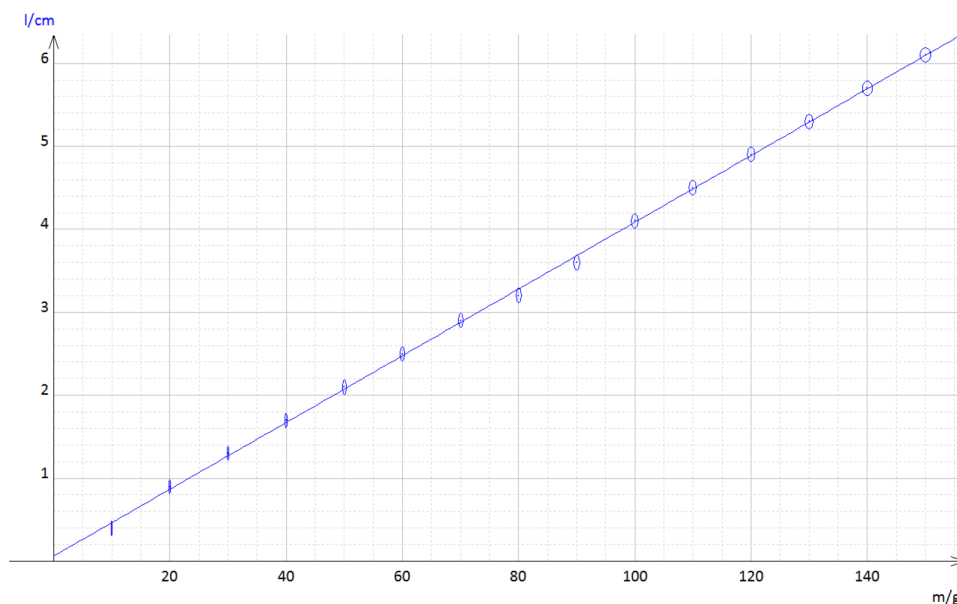
Régression linéaire

```
mod = np.polyfit(x, y, 1)
ymodel = mod[0]*x + mod[1]
plt.plot(x, ymodel, 'b:')
plt.show()
```



Le logiciel Régressi prend très bien en compte les incertitudes sur x et y et permet de tracer des ellipses d'incertitudes. il faut aller dans le menu **options**, puis dans l'onglet **graphique**, cocher la case « tracé des ellipses d'incertitudes » et paramétrer que l'on veut des ellipses avec $2*u$; ou alors sur le graphe, faire un clic droit de la souris et sélectionner « incertitudes ».

Exemple avec Régressi



Dans les deux cas, la droite doit passer par toutes les barres, ou toutes les ellipses.

3) Vérification à l'aide des écarts normalisés (z-score)

Si la représentation graphique n'est pas fournie, il est possible de calculer le z-score (ou écart normalisé) entre les points expérimentaux ($y_{\text{mesuré}}$) et les points correspondants de la droite fournie par le modèle ($y_{\text{modèle}}$).

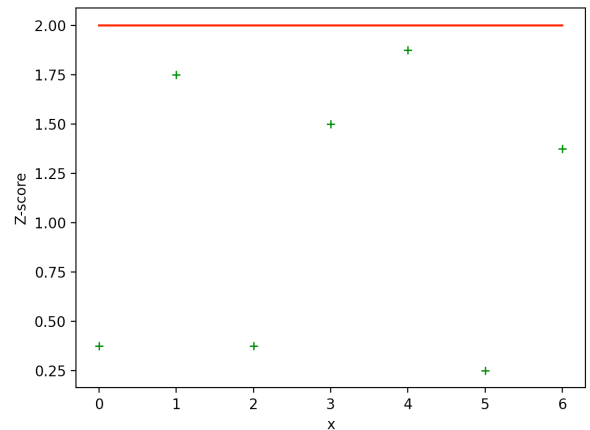
Les points dont le z-score est supérieur à 2 sont incohérents avec la loi proposée. Soit c'est la loi qui est incorrecte, soit ce sont les mesures, ou le calcul des incertitudes.

Sur l'exemple précédent :

Calcul des z-scores

```
Z = abs(y - ymodel)/uY
plt.plot(x, Z, 'g+')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel("Z-score")
plt.plot([0, 6], [2, 2], 'r-')
plt.show()
```

Tous les points ont un z-score inférieur à 2 et sont donc valides.



Une fois que l'on est sûr du modèle, on peut utiliser Regressi (ou Excel ou équivalent) pour faire la régression linéaire et avoir les coefficients a et b, ainsi que leurs incertitudes type.

Ou Python !

4) Calcul des incertitudes sur les coefficients a et b d'une loi linéaire

Une fois que l'on est sûr que la loi est bien linéaire (du type $y = a x + b$), on peut préciser les incertitudes-type sur les coefficients a et b : Il « suffit » de répéter le calcul de a et b un grand nombre de fois ($N = 10\,000$ par exemple) en ajoutant des fluctuations aléatoires de y (selon une répartition uniforme dans l'intervalle $[y_{\text{vrai}} - \sqrt{3} * u(y) ; y_{\text{vrai}} + \sqrt{3} * u(y)]$ pour obtenir les valeurs de a et b avec incertitudes (méthode de Monte-Carlo).

Toujours sur l'exemple précédent :

```
# On importe les bibliothèques nécessaires.
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import numpy.random as rd
from math import sqrt

# On entre les valeurs numériques.
x = np.array([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6])
y = np.array([0.3, 1.8, 4.0, 6.3, 8.3, 9.8, 11.5])
uy = 0.1
N = 10000

# Création des listes de a et b
aMC = []
bMC = []

# Remplissage des listes
for i in range(N):
    yMC = y + sqrt(3) * uy * rd.uniform(-1, 1, len(y)) # calcul de y compte-tenu de uy
    [a, b] = np.polyfit(x, yMC, 1) # régression linéaire
    aMC.append(a) # ajout de la valeur de a à la liste aMC
    bMC.append(b) # ajout de la valeur de b à la liste bMC

# Calcul des moyennes et incertitudes-type
amoy = np.average(aMC)
ua = np.std(aMC)
bmoy = np.average(bMC)
ub = np.std(bMC)
print("valeur moyenne de a =", round(amoy,2), "avec l'incertitude-type", round(ua,2))
print("valeur moyenne de b =", round(bmoy,2), "avec l'incertitude-type", round(ub,2))
```

Il reste bien sûr à donner le résultat avec un nombre raisonnable de décimales, d'où le « round ».

```
valeur moyenné de a = 1.92 avec l'incertitude-type 0.02
valeur moyenne de b = 0.23 avec l'incertitude-type 0.07
```

Si  a vous amuse, vous pouvez compléter avec les histogrammes des répartitions valeurs de a et b :

Toujours sur le même exemple :

```
# Tracés des histogrammes
plt.figure(1)
plt.hist(aMC, bins = 100) # bins est le nombre d'intervalles - c'est 10 par défaut.
plt.title("Histogramme pour la pente a")

plt.figure(2)
plt.hist(bMC, bins = 100)
plt.title("Histogramme pour l'ordonnée b")

plt.show()
```

