

1 – Dimension et unité d'une grandeur physique

La **dimension** d'une grandeur renseigne sur sa **nature physique**. Par exemple une distance, une hauteur et un périmètre sont tous des *longueurs*. C'est une caractéristique beaucoup plus générale que son unité.

Une grandeur purement numérique est dite **sans dimension**. **Attention : une grandeur sans dimension peut tout à fait avoir une unité.**

Exemples :

- Un angle n'a pas de dimension, mais son unité peut être le degré, le radian...
- Un rapport de deux longueurs n'a pas de dimension, mais son unité peut être le « cm/m » ...

Sept dimensions de base ont été retenues. Les voici dans le tableau ci-dessous, accompagnées des unités du système international.

Grandeur	Masse	Longueur	Temps	Intensité électrique	Température	Quantité de matière	Intensité lumineuse
Unité du système international	kilogramme (kg)	mètre (m)	seconde (s)	ampère (A)	kelvin (K)	mole (mol)	candela (Cd)
Symbole de la dimension	M	L	T	I	Θ	N	J

2 – Dimension des autres grandeurs physiques

On peut écrire la dimension de n'importe quelle grandeur physique en fonction des sept grandeurs de base. La dimension de la grandeur X est notée $[X]$. Pour une grandeur A sans dimension, on note $[A] = 1$.

Exemples :

$$[\text{vitesse}] = [\text{distance}] / [\text{temps}] = L \cdot T^{-1}$$

$$[\text{masse volumique}] = [\text{masse}] / [\text{volume}] = M \cdot L^{-3}$$

Remarque : Pour les grandeurs qui n'ont pas une dimension simple, on utilise en générale leur propre unité.

Exemple : L'unité de la résistance électrique : $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2} = 1 \Omega$

3 – Homogénéité d'une expression

Les deux membres d'une égalité ont la même dimension.

Les termes d'une somme ou d'une différence ont la même dimension.

L'argument des fonctions *sinus*, *cosinus*, *tangente*, *exponentielle*, *logarithme* est toujours sans dimension.

La dimension des dérivées et intégrales se détermine comme suit : $\left[\frac{dx}{dt}\right] = \frac{[x]}{[t]}$ et $\int v dt = [v] \cdot [t]$

→ **Vérifier l'homogénéité d'une expression permet de détecter rapidement les erreurs puisqu'une formule non homogène est forcément fausse !** Remarque : il n'est pas forcément nécessaire de tout mettre en fonction des dimensions de base (M, L, T...) car cela conduit à des expressions souvent lourdes.

Exemple : Formule pour la surface d'un cercle : $S = 2\pi \cdot r$ est manifestement une formule fausse !

4 – Analyse dimensionnelle

Si une grandeur X est susceptible de dépendre d'un certain nombre de grandeurs A, B, C, D caractéristiques du problème, cette grandeur peut (la plupart du temps) se mettre sous la forme : $X = k \cdot A^\alpha \cdot B^\beta \cdot C^\gamma \cdot D^\delta$ où k est un nombre sans dimension, et où les exposants α, β, γ , et δ peuvent être déterminés par analyse dimensionnelle.

Exemple :

Déterminer par analyse dimensionnelle la vitesse d'un satellite en orbite autour de la Terre. Cette vitesse est susceptible de dépendre de la masse de la Terre M_T , du rayon de l'orbite R et de la constante gravitationnelle G .

Exercice 1 :

Déterminer la dimension des grandeurs suivantes en fonction des dimensions de base (M, L, T ...) : l'accélération, la fréquence, la pulsation $\omega = 2\pi f$, la concentration molaire, l'énergie cinétique, la force, le champ de pesanteur g , la charge électrique q (on rappelle que l'intensité du courant est reliée à la charge par $i = \frac{dq}{dt}$).

Exercice 2 :

En utilisant les formules et définitions vues au lycée, déterminer la dimension des grandeurs suivantes : la constante gravitationnelle G , la pression, le travail, la puissance, une résistance électrique.

Exercice 3 :

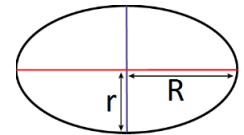
Identifier les formules qui sont cohérentes grâce à une analyse dimensionnelle.

- 1) La durée $t = d \times v$
- 2) La durée $t = d / v$
- 3) Surface d'une sphère de rayon r : $S = \frac{4}{3}\pi r^3$
- 4) Surface d'une sphère de rayon r : $S = 4\pi \cdot r^2$
- 5) La résistance équivalente à deux résistances R_1 et R_2 branchées en parallèle : $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$
- 6) La résistance équivalente à deux résistances R_1 et R_2 branchées en série : $R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$

Rappel : dans un circuit contenant un générateur, une résistance R et un condensateur C , le temps caractéristique de charge d'un condensateur est $\tau = RC$.

- 7) La tension aux bornes d'un condensateur chargé sous une tension constante : $U = U_0 \cdot (1 - e^{-t/RC})$
- 8) La tension aux bornes d'un condensateur pendant qu'il se décharge : $U = U_0 - \frac{t}{RC}$
- 9) La position d'une balle lancée à la vitesse v_0 dans le champ de pesanteur g : $x(t) = gt + v_0 t + x_0$
- 10) La surface de cette ellipse vaut :

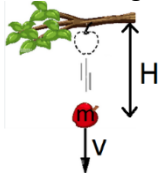
- a) $\pi \times R^2 \times r^2$ b) $r \times R$ c) $\pi \times R \times r$ d) $\pi \times R^2$



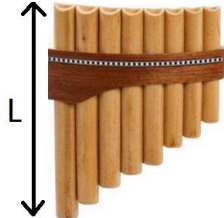
Exercice 4 :

Grâce à une analyse dimensionnelle, prévoir à une constante près l'expression des grandeurs suivantes :

- 1) La vitesse de chute d'une pomme de masse m , qui tombe d'une hauteur H . Cette vitesse dépend a priori de la hauteur H , de la masse de la pomme m et de l'intensité de la pesanteur g .



- 2) La fréquence du son émis par la flûte de pan. Cette fréquence dépend a priori de la longueur du tube L et de la vitesse du son dans l'air c .

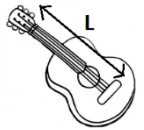


- 3) La période des oscillations d'un pendule. Cette période dépend a priori de la longueur du fil L , de la masse du pendule m et de l'intensité de la pesanteur g .



- 4) On cherche la fréquence du son émis par une corde de guitare. Cette fréquence dépend :

- de la longueur de la corde L ;
- de la tension de la corde T (c'est une force) ;
- du matériau utilisé pour fabriquer la corde : on le prend en compte via la masse linéique μ (masse de corde par unité de longueur)



Exercice 5 : Energie libérée lors d'une explosion nucléaire

En 1947, suite à la publication de photos montrant l'explosion de l'une des premières bombes nucléaires américaines, G.I. Taylor, un physicien anglais, a déterminé la valeur de l'énergie libérée par la bombe nucléaire alors que cette valeur était gardée secrète par l'armée américaine. Son raisonnement repose uniquement sur une analyse dimensionnelle.

Quand une bombe explose, il se forme une onde de choc dont le rayon croît avec le temps (voir figure ci-contre). L'idée de Taylor est de déterminer la variation de ce rayon en fonction des paramètres physiques liés à la bombe.

- 1) Trouver 3 paramètres indépendants dont pourraient dépendre le rayon du nuage atomique. (aux premiers instants de l'explosion, la gravité est négligeable)
- 2) A l'aide des photos, le physicien anglais a pu déduire que le rayon du nuage varie proportionnellement au temps à la puissance $2/5$. Retrouvez-vous ce résultat par analyse dimensionnelle ?
- 3) Calculer la valeur « top-secrète » de l'ordre de grandeur de l'énergie libérée par la bombe.

Donnée : la masse volumique de l'air vaut $\rho_{air} = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

