

Fiche méthode : Équations différentielles

« Équation différentielle » : Équation dont l'inconnue est une fonction. L'équation fait intervenir la fonction et ses dérivées, ainsi que la variable. Résoudre l'équation différentielle, c'est trouver l'expression de la fonction.

« linéaire » : Une équation différentielle est linéaire si :

- la somme de 2 solutions (de l'équation homogène) est aussi solution.
- une solution (de l'éq homogène) multipliée par une constante est aussi solution (en pratique, ça veut dire qu'il n'y a pas de termes en y^2 ou $y \cdot y'$ ou y'^2 etc.)

« 1^{er} ordre » : L'équation différentielle fait intervenir la fonction et sa dérivée première.

« 2nd ordre » : L'équation différentielle fait intervenir la fonction, sa dérivée première et sa dérivée seconde.

La dérivée d'une fonction y par rapport x se note $\frac{dy}{dx}$, sa dérivée seconde $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc.

Comme la dérivée par rapport au temps est très courante en physique, on la note

souvent avec un point : $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$ et $\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$

I – Méthode de résolution d'une équation différentielle du 1^{er} ordre, linéaire, à coefficients constants

1) Écrire l'équation sous forme canonique :

à gauche : termes qui font intervenir la fonction y et sa dérivée $\frac{dy}{dt}$

à droite : termes indépendants de y . Aussi appelé « le forçage »

$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = F(t)$

coefficient 1 devant la dérivée

τ : ce coefficient a la dimension d'un temps. Il est appelé « temps caractéristique du système »

2) Trouver une solution particulière $y_p(t)$.

En pratique on cherche cette solution « de la même forme » que le membre de droite F :

si F est une constante, on cherche une solution $y_p(t)$ constante ;

si F est sinusoïdale de pulsation ω , on cherche une solution $y_p(t)$ sinusoïdale de pulsation ω .

3) Résoudre l'équation différentielle homogène, c'est-à-dire de second membre nul.

L'équation $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = 0$ a pour solutions l'ensemble de fonctions : (voir (*))

$$y_H(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } A \text{ une constante}$$

4) Additionner la solution particulière et la solution de l'équation homogène (voir (**)), puis déterminer la constante d'intégration A .

Les solutions de l'équation différentielle initiale sont de la forme $y(t) = y_p(t) + y_H(t)$

Il faut connaître l'une des valeurs de la fonction, souvent $y(0)$ ou $y'(0)$. Cette valeur est appelée « condition initiale » ou « condition à la limite ». Cette valeur connue permet de déterminer la constante d'intégration A .

Compléments mathématiques

(*) Résolution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = 0$

Méthode 1 : Séparation des variables (méthode des physiciens)

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau}y$$

On sépare les variables, c'est-à-dire qu'on met du même côté tous les y et de l'autre côté tous les t :

$$\text{l'équation différentielle devient alors} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dt}{\tau}$$

$$\text{que l'on intègre entre 0 et } t : \quad \ln(y) - \ln(y_0) = -\frac{t}{\tau} \quad \text{donc} \quad \ln(y) = -\frac{t}{\tau} + \ln(y_0)$$

$$\text{et donc} \quad y = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{où } y_0 \text{ est une constante}$$

Méthode 2 : Méthode des mathématiciens

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{t}{\tau}} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}} y = 0 \quad (\text{c'est équivalent parce qu'on multiplie par qq chose non nul})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\left(e^{\frac{t}{\tau}} y\right)}{dt} = 0 \quad (\text{on a reconnu la dérivée d'un produit})$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\frac{t}{\tau}} y = A \quad \text{avec } A \text{ une constante}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } A \text{ une constante}$$

(**) Ensemble des solutions de l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = A$

On nomme (E) l'équation $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = A$ et (H) l'équation homogène associée $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = 0$

Soit y_p une solution de l'équation (E). On voudrait montrer que

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de (E)} = \{ y_p + y_H, \text{ avec } y_H \text{ solution de (H)} \}}$$

Pour montrer une égalité entre deux ensembles, on peut montrer la double inclusion :

“ $\supset$ ” : Soit y_H une solution de (H). Montrer que $y_p + y_H$ est solution de (E).

$$\text{solution de (E).} \\ \text{est solution de (E) et } y_H \text{ est solution de (H). On a bien montré que } y_p + y_H \text{ est} \\ \text{puisqu'on a } 0 + A = \left(\frac{d}{dt} y_p + \frac{1}{\tau} y_p \right) + \left(\frac{d}{dt} y_H + \frac{1}{\tau} y_H \right) = \left(\frac{d}{dt} (y_p + y_H) + \frac{1}{\tau} (y_p + y_H) \right) = A$$

“ $\subset$ ” : Soit y_1 une solution de (E). Montrer qu'il existe y_{H1} une solution de (H) telle que $y_1 = y_p + y_{H1}$

$$\text{On a } \frac{d}{dt} y_1 + \frac{1}{\tau} y_1 = A \text{ et } \frac{d}{dt} y_p + \frac{1}{\tau} y_p = A. \text{ En soustrayant ces deux égalités :} \\ \text{On peut } 0 = \left(\frac{d}{dt} y_1 - \frac{d}{dt} y_p \right) + \frac{1}{\tau} (y_1 - y_p) \text{ donc } y_1 - y_p \text{ est solution de l'équation (H). On peut} \\ \text{nommer cette solution } y_H, \text{ et donc on a bien montré que } y_1 = y_p + y_H \text{ avec } y_H \text{ solution de (H).}$$

II – Méthode de résolution d'une équation différentielle du 2nd ordre, linéaire, à coefficients constants

Forme générale :

$$a \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + b \cdot \frac{dy}{dt} + c \cdot y = F(t) \quad \text{équation (E)}$$

La méthode de résolution est très similaire à la résolution d'une équation du 1^{er} ordre :

1) Trouver une solution particulière $y_p(t)$.

En pratique on cherche cette solution « *de la même forme* » que le membre de droite F .

2) Résoudre l'équation différentielle homogène, c'est-à-dire de second membre nul.

$$a \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + b \cdot \frac{dy}{dt} + c \cdot y = 0 \quad \text{équation (H)}$$

Il faut pour cela trouver les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique :

$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$$

La forme des solutions est légèrement différente selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta > 0$: les deux racines r_1 et r_2 sont réelles. Les solutions sont de la forme :

$$y_H(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ des constantes}$$

- si $\Delta = 0$: il y a une seule racine r_1 , réelle. Les solutions sont de la forme :

$$y_H(t) = (A + Bt) \cdot e^{r_1 t} \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ des constantes}$$

- si $\Delta < 0$: les deux racines r_1 et r_2 sont complexes. Les solutions sont de la forme :

$$y_H(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}, \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ des constantes}$$

Mais puisque r_1 et r_2 sont complexes conjuguées on préfère écrire $r_1, r_2 = \lambda \pm j\omega_1$ (/! on utilise la notation $j^2 = -1$ pour ne pas le confondre avec l'intensité i)
et donc les solutions sont de la forme

$$y_H(t) = e^{\lambda t} (A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)) \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ des constantes}$$

$$\text{ou encore } y_H(t) = A \cdot e^{\lambda t} \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi) \quad \text{avec } A \text{ et } \Phi \text{ des constantes}$$

3) Additionner la solution particulière et la solution de l'équation homogène,

$$y(t) = y_p(t) + y_H(t)$$

puis déterminer les 2 constantes d'intégration.

Remarque : une équation différentielle du 1^{er} ordre a 1 constante d'intégration, qui se détermine grâce à 1 condition initiale. Une équation différentielle du 2nd ordre a 2 constantes d'intégration, il faut donc 2 conditions initiales (ou conditions aux limites) pour les déterminer. Il s'agit souvent de $y(0)$ et $y'(0)$.

Formes canoniques usuelles

En physique, on rencontrera principalement deux formes canoniques :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\lambda \cdot \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 \cdot y = F(t)$$

et

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 \cdot y = F(t)$$

Ce qui permet d'introduire des paramètres physiques : λ (coefficient d'amortissement), ω_0 (pulsation propre), Q (facteur de qualité).

Cas particulier important

On rencontrera souvent l'équation différentielle du second ordre n'ayant pas de terme d'ordre 1 :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot y = 0$$

qui est appelée **équation harmonique** car elle caractérise un **oscillateur harmonique**, dont l'évolution est décrite par des grandeurs sinusoïdales :

$$y_H(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ des constantes}$$

$$\text{ou } y_H(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \Phi) \quad \text{avec } A \text{ et } \Phi \text{ des constantes}$$