

Feuille d'exercice n° 16 : Groupes, anneaux, corps

Exercice 1 (✎) Soient G_1 et G_2 deux groupes, dont les lois sont notées multiplicativement. On considère l'ensemble produit $G_1 \times G_2$ sur lequel on considère la loi interne \otimes suivante :

$$\forall ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (G_1 \times G_2)^2 \quad (x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Montrer que $(G_1 \times G_2, \otimes)$ est un groupe. Quel est son neutre ?

Exercice 2 (✎) – Un peu de sudoku –

- 1) Soit $(G, +)$ un groupe, $a \in G$. Que peut-on dire de $\varphi_a : G \rightarrow G$?
$$x \mapsto a + x$$
- 2) Montrer qu'il existe une seule table possible pour un groupe d'ordre 3 (c'est-à-dire à trois éléments).
- 3) Est-ce vrai pour 4 ?

Exercice 3 (✎) Soit (G, \times) un groupe, H et K deux sous-groupes de G .

- 1) Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G .
- 2) Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 4 (🚲) Montrer que les sous-groupes de \mathbb{Z} sont exactement tous les $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 Quel est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ contenant 1 ? Contenant 2 ? Même question avec (\mathbb{R}^*, \times) .

Exercice 6 On considère A et B deux sous-groupes de $(G, *)$ et l'on note :

$$A * B = \{ x \in G \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a * b \} = \{ a * b \mid (a, b) \in A \times B \}.$$

Montrer que $A * B$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si $A * B = B * A$.

Indication : pour le sens direct, on commencera par montrer $B * A \subset A * B$.

Exercice 7 (🚲🏔️) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. On pose $\alpha = \inf(\mathbb{R}_+^* \cap G)$

- 1) Montrer que si $\alpha > 0$, alors $G = \alpha\mathbb{Z} = \{k\alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- 2) Montrer que si $\alpha = 0$, alors G est dense dans \mathbb{R} , c'est-à-dire que pour tout réel x et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in G$ vérifiant $|x - y| \leq \varepsilon$.

Exercice 8 Décrire tous les endomorphismes de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$. Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.

Exercice 9 (✎) Soit G un groupe noté multiplicativement.

Pour $a \in G$, on note τ_a l'application de G vers G définie par $\tau_a : x \mapsto axa^{-1}$.

- 1) Soit $a \in G$, montrer que τ_a est un endomorphisme du groupe (G, \times) .
- 2) Vérifier que $\forall a, b \in G, \tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$
- 3) Soit $a \in G$, montrer que τ_a est bijective et déterminer son application réciproque.
- 4) En déduire que $\mathcal{T} = \{\tau_a \mid a \in G\}$ muni du produit de composition est un groupe.

Exercice 10 Soit A un anneau de Boole (c'est-à-dire que $\forall x \in A, x^2 = x$).

- 1) Calculer $(x + x)^2$ et en déduire : $\forall x \in A, x + x = 0$.
- 2) Calculer $(x + y)^2$ et en déduire que A est commutatif.

Exercice 11 Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

- 1) Deux identités universelles : soient x et $y \in A$ tels que $xy = yx$, et soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer la formule du binôme de Newton : $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

b) Montrer que : $x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$.

- 2) a) Montrer que si x est nilpotent alors $1 - x$ est inversible.
b) Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors xy et $x + y$ sont nilpotents.
- 3) Un corps admet-il des éléments nilpotents non nuls ?

Exercice 12 Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit a un élément de A . On appelle racine carrée de a dans A , tout élément x de A tel que $x^2 = a$.

- 1) Montrer que si A est intègre, alors tout élément de A admet au maximum 2 racines carrées.
- 2) Prenons maintenant $(A, +, \times) = (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$. Montrer que f admet une infinité de racines carrées.

