(**30/03/2018**

Problème

Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices.
On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant $M = aI + bJ + cK + dL$, où a, b, c et d décrivent $\mathbb{R}$.

1. **a)** Montrer que E est un espace vectoriel.

b) Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.

c) Donner la dimension de E.

2. **a)** Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E.

b) En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.

c) Etablir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

3.

a) Montrer que L est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres de L ainsi que les sous-espaces propres propres associés à ces valeurs propres.

4. On considère les vecteurs :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

b) Vérifier que u_1, u_2, u_3 et u_4 sont des vecteurs propres de L et $J + K$.

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.
Dans cette partie, p désigne un réel de $[0, 1[$.
Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.
Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin(relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1 - 2p$.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n. On a donc $X_0 = 1$.

1. **a)** Ecrire la matrice A, carrée d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = i \ / \ X_n = j)$.

b) Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de $J + K$ et L.

2. **a)** Pour tout i de $\{1, 2, 3, 4\}$, calculer Au_i. En déduire qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter D et P.

b) Calculer P^2 puis en déduire P^{-1}.

3. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

a) Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $C_{n+1} = AC_n$.

b) En déduire que $C_n = \dfrac{1}{4} PD^n PC_0$, puis donner la loi de probabilité de X_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.(ie calculer les coordonnées du vecteur C_n)