

Q16) Décomposition en éléments simples de $\Theta(p) = \frac{\Theta_0}{p} \frac{K}{1+\tau p}$

$$\hookrightarrow \Theta(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau p}$$

Déjà sous forme factorisée

On détermine les paramètres :

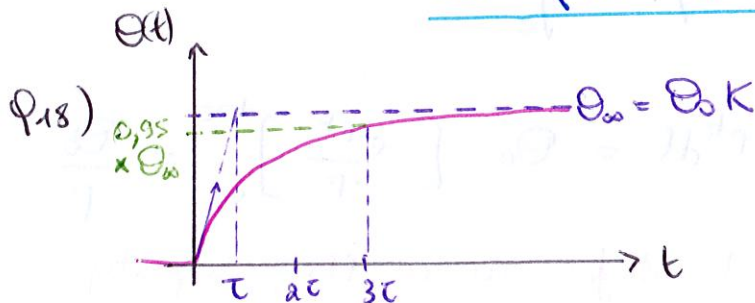
$$p \Theta(p) \Big|_{p=0} = A = \Theta_0 K$$

$$(1+\tau p) \Theta(p) \Big|_{p=-\frac{1}{\tau}} = B = -\tau \Theta_0 K$$

$\Rightarrow$ on peut appliquer le Théorème.

Q17) Par transformée de Laplace inverse :

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= A u(t) + \frac{B}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) \\ &= \Theta_0 K (1 - e^{-t/\tau}) u(t) \end{aligned}$$



Q19) $\Theta(\tau) \approx 0,63 \Theta_0 K$

$\Theta(3\tau) \approx 0,95 \Theta_0 K$

$\Theta(2\tau) \approx 0,86 \Theta_0 K$

$$\Rightarrow t_{5\%} = 3\tau = \frac{3}{200} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ s}$$

Q20) Pour une rampe de pente w_0 :

$$\Theta_c(t) = w_0 u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Theta_c(p) = \frac{w_0}{p^2}$$

Q21) 2 méthodes possibles : Soit on refait une décomposition en éléments simples

$$\Theta(p) = \frac{w_0}{p^2} \frac{K}{1+\tau p} = \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1+\tau p} \right) \left\{ \begin{array}{l} p^2 \Theta(p) \Big|_{p=0} = B = w_0 K \\ (1+\tau p) \Theta(p) \Big|_{p=-\frac{1}{\tau}} = C = w_0 \tau^2 K \end{array} \right.$$

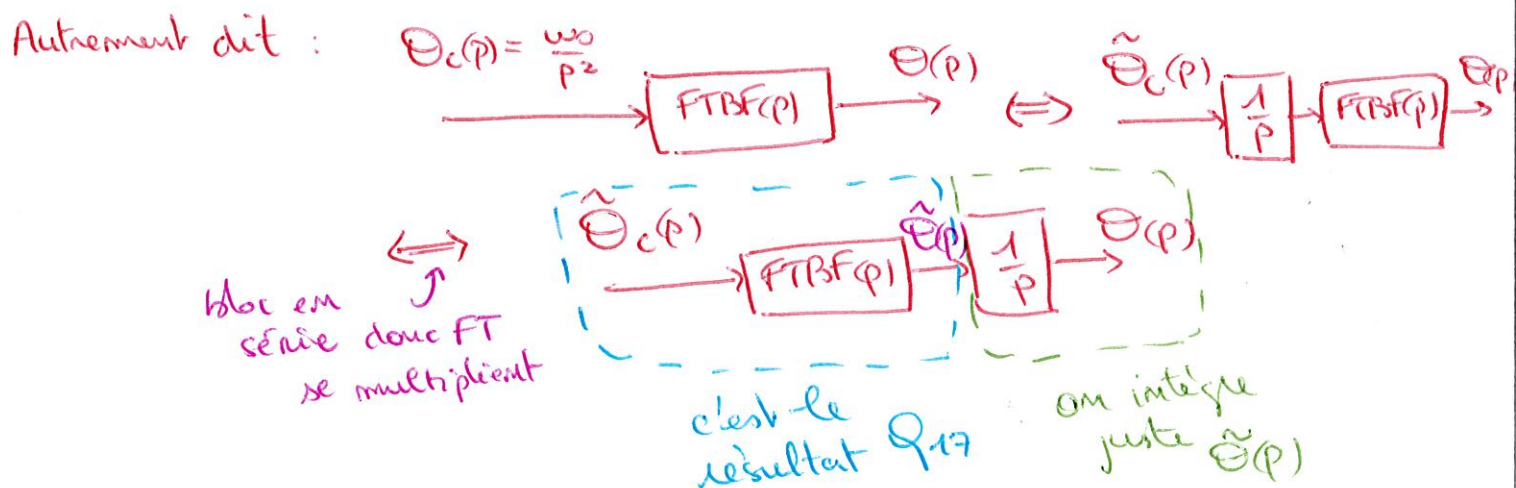
$\triangle$ à ne pas oublier

et $\lim_{p \rightarrow \infty} p \Theta(p) = A + \frac{C}{\tau} = 0 \Rightarrow A = -\frac{w_0 \tau}{K}$

$$\Rightarrow \Theta(t) = A u(t) + B u(t) + \frac{C}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$

$$= \tau \omega_0 K \left(-1 + \frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} \right) u(t)$$

Soit on remarque que pour notre rampe $\Theta_c(p) = \frac{\omega_0}{p^2}$, ça équivaut à : $\frac{1}{p} \tilde{\Theta}_c(p)$ où $\tilde{\Theta}_c(p) = \frac{\omega_0}{p}$ c'est la transformée de Laplace d'un échelon !



$$\Rightarrow \tilde{\Theta}(t) = \omega_0 K (1 - e^{-t/\tau}) u(t)$$

$$\Rightarrow \Theta(t) = \int_0^t \tilde{\Theta}(u) du = \omega_0 K \left[t + \tau e^{-t/\tau} \right]_{t=0}^t u(t)$$

$$= \omega_0 K (t + \tau e^{-t/\tau} - \tau) u(t)$$

$\hookrightarrow$ exactement la forme trouvée avec la méthode 1.

$$Q_{22}) E(p) = \Theta_c(p) - \Theta(p)$$

$$= \frac{\omega_0}{p^2} \left(1 - \frac{K}{1+\tau p} \right) \stackrel{K=1}{=} \frac{\omega_0}{p^2} \frac{\tau p}{1+\tau p} = \frac{\omega_0 \tau}{p(1+\tau p)}$$

Q₂₃) En appliquant le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p E(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{\omega_0 \tau}{1+\tau p} = \underline{\omega_0 \tau}$$

Q₂₄) Pour $\omega_0 = 100^\circ/\Delta$, $\varepsilon_{\infty} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}^\circ < 1^\circ \Rightarrow$ le cahier est vérifié