TD 10 : Critères de performance des SLCI

Exercice 1 : Rapidité d'un radar d'avion

Q1) Par mesure directe sur l'abaque pour $z = \frac{1}{2}$

$$t_{5\%}\,\omega_0 = 5 \text{ rad} \Rightarrow t_{5\%} = 0,33 \text{ s} > 0,2$$

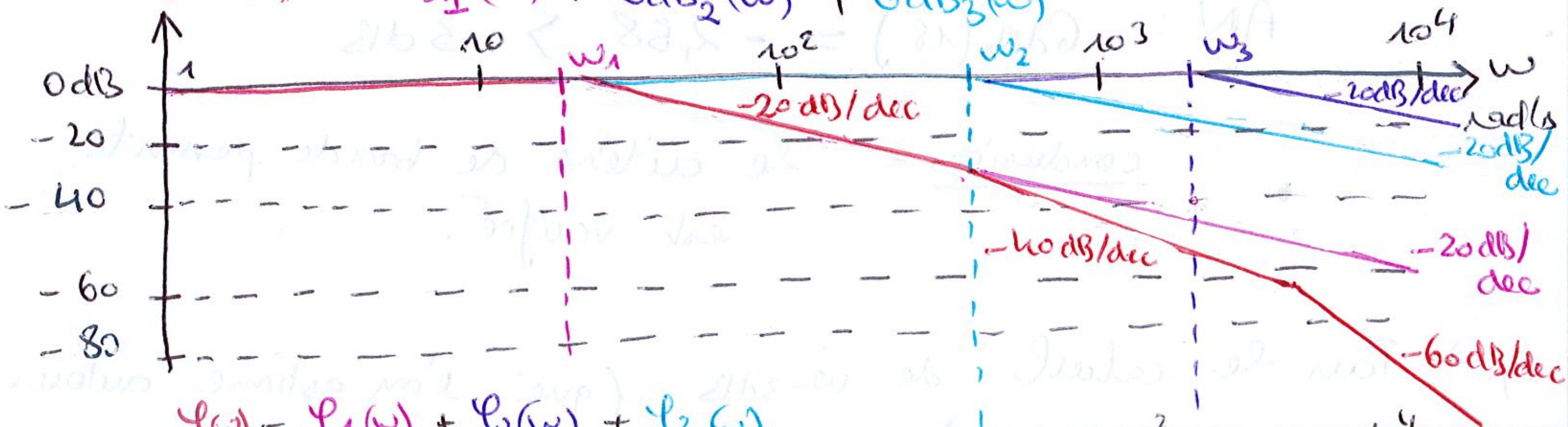
$\Rightarrow$ le critère de rapidité n'est pas vérifié

Q2) $$H(p) = \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{20}p}}_{H_1(p)} \times \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{2000}p}}_{H_3(p)} \times \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{500}p}}_{H_2(p)}$$

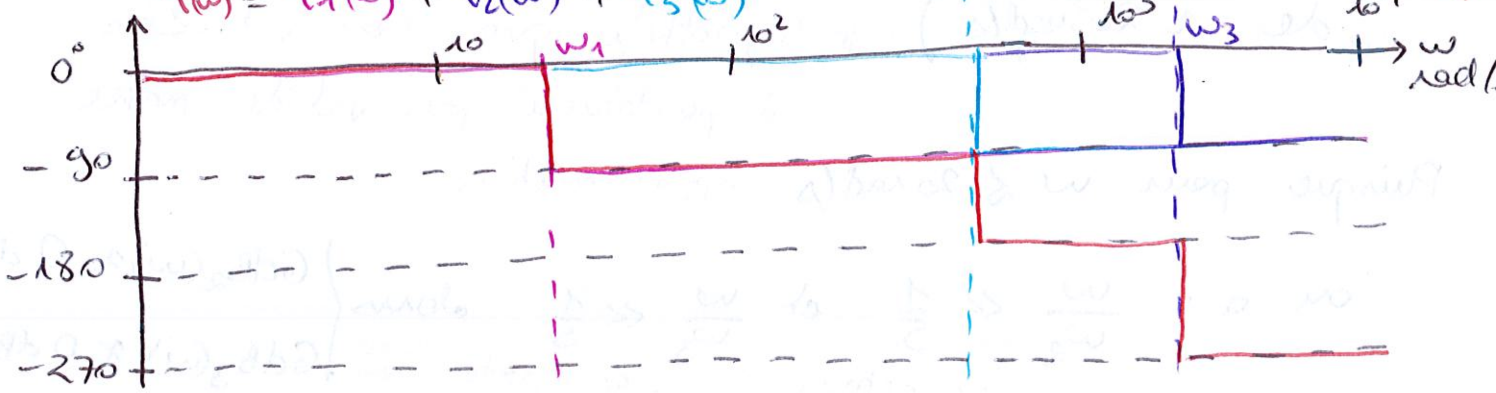
$\Rightarrow$ on va sommer les diagrammes asymp de trois ordre 1 de pulsations de cassure :

$\omega_1 = 20$ rad/s $\omega_2 = 500$ rad/s $\omega_3 = 2000$ rad/s

$G_{dB}(\omega) = G_{dB_1}(\omega) + G_{dB_2}(\omega) + G_{dB_3}(\omega)$



$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega)$



Q3) D'après le cahier des charges fonctionnel :

Il faut $\omega_{-3dB} \geq 18$ rad/s.

Q4) Sans simplification, il faut trouver la pulsation ω_{-3dB} tel que $G_{dB}(\omega_{-3dB}) = -3dB$ → puisque G_{dB} est une fonction décroissante

$$\Leftrightarrow 20\log|H(j\omega_{-3dB})| = -3$$

$$\Leftrightarrow |H(j\omega_{-3dB})| = 10^{-3/20}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\left(\frac{\omega_{-3dB}}{\omega_1}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{\omega_{-3dB}}{\omega_2}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{\omega_{-3dB}}{\omega_3}\right)^2} = 10^{\frac{3}{20}}$$

Q5) Puisque G_{dB} est décroissante, il suffit de vérifier $G_{dB}(18 \text{ rad/s}) \geq -3$ dB pour s'assurer que $\omega_{-3dB} \geq 18$ rad/s.

AN : $G_{dB}(18) = -2,58 > -3$ dB

<u>conclusion</u> : le critère de bande passante est vérifié.

Q6) Pour le calcul de ω_{-3dB} (que l'on estime autour de ≈ 20 rad/s) → hypothèse que l'on validera à postériori pour valider notre approximation

Puisque pour $\omega \lesssim 20$ rad/s

on a : $\frac{\omega}{\omega_2} < \frac{1}{5}$ et $\frac{\omega}{\omega_3} \ll \frac{1}{5}$ alors $\begin{cases} G_{dB_2}(\omega) \approx 0 \text{ dB} \\ G_{dB_3}(\omega) \approx 0 \text{ dB} \end{cases}$

↳ retour à l'asymptote

Ainsi, il est pertinent pour le calcul de ω_{-3dB} ②

de considérer $H(p) \underset{\omega \leq 20}{\approx} \dfrac{1}{1+\frac{1}{20}p}$

↳ $p_1 = -20$ représente le pôle dominant du système

Q7) Pour notre approximation, $H(p)$ représente système du 1er ordre

$\Rightarrow \omega_{-3dB} = \omega_1 = 20\ rad/s > 18\ rad/s^{-1}$

↳ Rq : cela valide notre approximat°

$\Rightarrow$ critère de bande passante est validé

Q8) $t_{5\%} = \dfrac{3}{\omega_1} = 0,15\ s < 0,2\ s$ $\Rightarrow$ critère rapidité vérifié.

Q9) Sans approximation, on mesure $t_{5\%} \approx 0,152\ s$

Q10) Pour le radar asservi, c'est bien le pôle dominant qui régit la rapidité du système.

Puisque $\dfrac{\tau_1}{\tau_2} = \dfrac{1}{25}$ et $\dfrac{\tau_1}{\tau_3} = \dfrac{1}{100}$, la simplificat° pour l'étude de la rapidité était pertinente.

Exercice 2 : Stabilité d'un appareil d'imagerie médicale

Q1) cf document réponse

Q2) D'après le tracé asymptotique $\omega_{co} \simeq 10$ rad/s

Remarque : En pratique puisque l'on a un "retour à l'asymptote" pour $\omega \leq \frac{30}{5} = 6$ rad/s alors

$G_{dB}(10) < 0$ dB $\Rightarrow \omega_{co} < 10$ rad/s

↳ le tracé réel donnerait $\omega_{co} = 9,5$ rad/s

Q3) dénominateur FTBF s'écrit : $1 + H_{BO}(p)$

$\Rightarrow$ pôle de la FTBF solution de :

$$1 + H_{BO}(p) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{10}{p} \frac{1}{1+\frac{p}{30}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p\left(1+\frac{p}{30}\right) + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 30p + p^2 + 300 = 0 \qquad \Delta = 900 - 4 \times 300 = -300 < 0$$

$$\Rightarrow \quad p_{\pm} = \frac{-30 \pm j\sqrt{300}}{2} \quad \Rightarrow \text{partie réelle} < 0 \quad \Rightarrow \text{système stable}$$

Q4) $\varphi(30) = -135°$ valeur remarquable ordre 1 qui vaut $-45°$ $-90°$ de "$\frac{10}{p}$"

or φ est décroissante donc, on déduit :

$$\omega_{co} < 30 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \varphi(\omega_{co}) > -135°$$

$$\Rightarrow M\varphi = \varphi(\omega_{co}) + 180 > 45°.$$

Q5) On cherche ω_{co} tel que $20 \log |H_{BO}(j\omega_{co})| = 0$ dB

$$\Leftrightarrow \quad |H_{BO}(j\omega_{co})| = 1.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{10}{\omega_{c0}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_{c0}}{30}\right)^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 100 = \omega_{c0}^2\left(1+\left(\frac{\omega_{c0}}{30}\right)^2\right) \longrightarrow \text{éq } 4^{\text{ème}} \text{ degré en } \omega_{c0}$$

↳ Astuce : On pose $X = \omega_{c0}^2$, cela permet de se ramener à une équation du 2nd degré en X. (où solution X recherchée est forcément positive !)

$$\Leftrightarrow \; -9\times 10^4 + 900X + X^2 = 0 \qquad \Delta = 900^2 + 4\times 90\,000 = 1\,170\,000 > 0$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{-900 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$, on garde la valeur positive

$$\Rightarrow \quad X = \omega_{c0}^2 = 90{,}83 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\underset{\omega_{c0}\geq 0}{\Rightarrow} \quad \omega_{c0} = \sqrt{90{,}83} \approx 9{,}53 \text{ rad/s}.$$

Q6) $\varphi(\omega) = \arg(H_{BO}(j\omega)) = -90 - \arctan\left(\frac{\omega}{30}\right)$

$$\Rightarrow \varphi(\omega_{c0}) = -107{,}8^\circ \quad \Rightarrow M\varphi = \varphi(\omega_{c0}) + 180 = 72{,}2^\circ.$$

Q7) Puisque $\forall \omega$, $\varphi(\omega) > -180°$ (atteinte asymptotique pour $\omega \to +\infty$)

par convention $M_G = +\infty$

Q8) $M_G > 0$ et $M\varphi > 0 \Rightarrow$ système asservi stable d'après le critère du revers

TD 10 - Document réponse (DR)

Exerice 2 :

Question 1 :

$$H(p) = \frac{10}{p} \times \frac{1}{1+\frac{p}{30}}$$