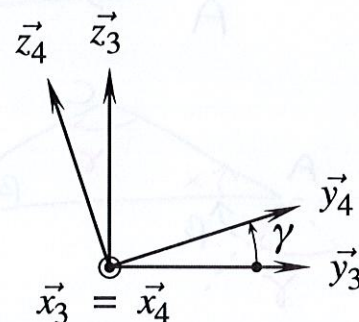
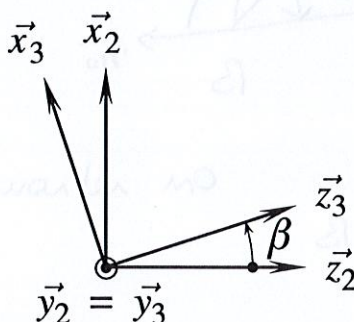
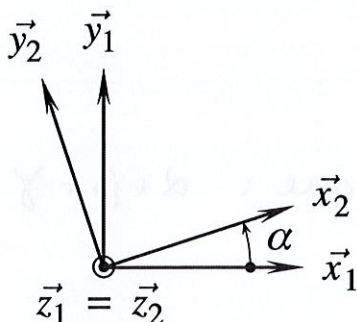


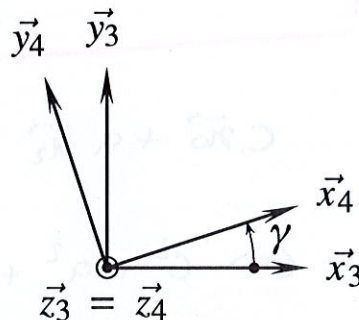
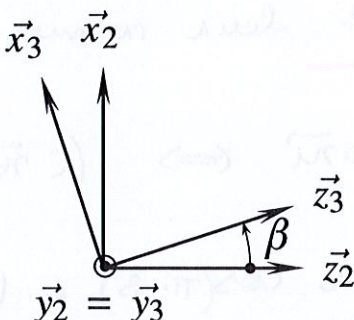
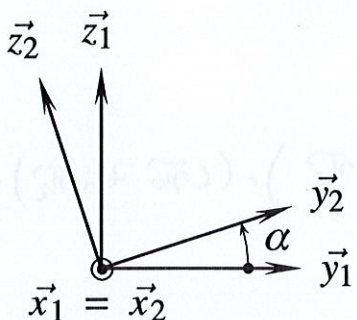
TD 1 : Base de la mécanique

Exercice 1 : Calcul direct de produits scalaires



$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = \cos \alpha$	$\vec{x}_2 \cdot \vec{z}_3 = \sin \beta$	$\vec{y}_3 \cdot \vec{z}_4 = -\sin \gamma$
$\vec{z}_3 \cdot \vec{x}_1 = \sin \beta \cos \alpha$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{x}_1 = \cos \beta \cos \alpha$	$\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1 = \sin \beta \sin \alpha$
$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 = \sin \alpha$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{z}_2 = -\sin \beta$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{x}_4 = 1$
$\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 = \cos \alpha$	$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 = \sin \alpha$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_4 = 0$
$\vec{x}_4 \cdot \vec{y}_1 = \cos \beta \sin \alpha$	$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_4 = \cos \beta \cos \gamma$	$\vec{z}_1 \cdot \vec{y}_4 = \cos \beta \sin \gamma$

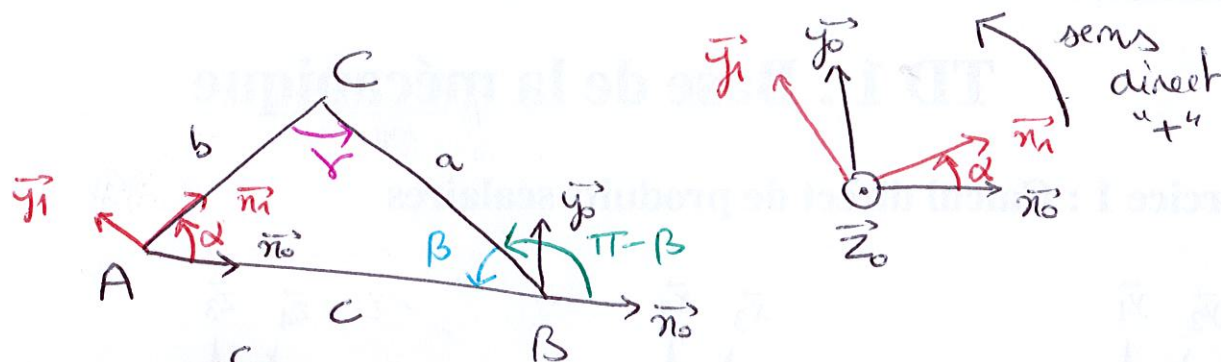
Exercice 2 : Calcul direct de produits vectoriels



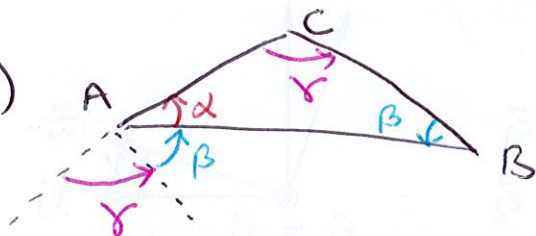
$\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_2 = \sin \alpha \vec{x}_1$	$\vec{x}_2 \wedge \vec{z}_3 = -\cos \beta \vec{y}_2$	$\vec{z}_3 \wedge \vec{z}_4 = \vec{0}$
$\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2 = \vec{z}_2$	$\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 = -\sin \beta \vec{y}_2$	$\vec{x}_3 \wedge \vec{y}_4 = \cos \gamma \vec{z}_3$
$\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_2 = \cos \alpha \vec{x}_1$	$\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_2 = -\vec{x}_3$	$\vec{y}_2 \wedge \vec{x}_4 = -\cos \gamma \vec{z}_3$
$\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1 = \vec{y}_2$	$\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_3 = \cos \beta \vec{y}_2$	$\vec{y}_4 \wedge \vec{y}_3 = -\sin \gamma \vec{z}_3$

Exercice 3: Triangle et Formule d'Al-Kashi

Q1)



Q2)



On retrouve que : $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Q3)

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow c\vec{n}_0 + a\vec{n}_2 - b\vec{n}_1 = \vec{0}$$

Méthode classique

↳ on veut faire intervenir seulement angle β qui provient du produit scalaire de $\vec{n}_0$ et $\vec{n}_2$

⇒ on isole " $\vec{n}_1$ " et on applique le "cosé scalaire"

⇒ on a une égalité entre vecteurs ⇒ égalité entre leur norme

$$c\vec{n}_0 + a\vec{n}_2 = b\vec{n}_1 \Leftrightarrow (c\vec{n}_0 + a\vec{n}_2) \cdot (c\vec{n}_0 + a\vec{n}_2) = \|b\vec{n}_1\|^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 + a^2 + 2ac \cos(\pi - \beta) = b^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c^2 + a^2 - 2ac \cos(\beta) = b^2} \quad \text{formule Al-Kashi}$$

↳ vous pouvez bien évidemment

permuter (a, b, c) et (α, β, γ) pour

retrouver immédiatement :

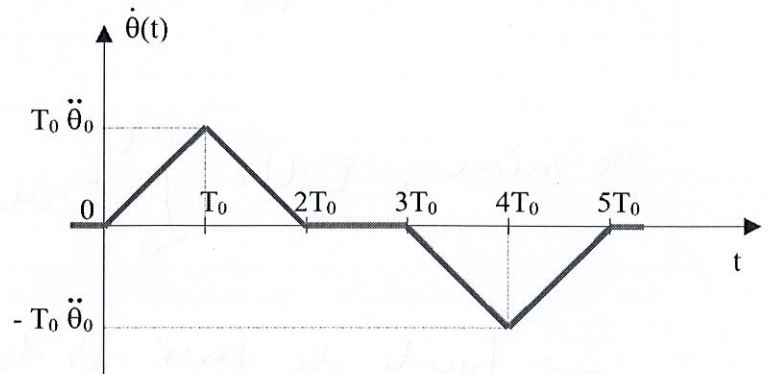
$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) = c^2$$

$$\text{et } b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) = a^2$$

Exercice 4 : Loi en trapèze de vitesse

Q 1. On procède par intégration, en partant de la vitesse nulle. La loi de vitesse $\dot{\theta}(t)$, correspondant à la loi d'accélération proposée, est donnée ci-contre.

- pour $0 < t < T_0$, on a $\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_0 t$
- pour $T_0 < t < 2T_0$, on a $\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_0(2T_0 - t)$
- pour $2T_0 < t < 3T_0$, on a $\dot{\theta}(t) = 0$
- pour $3T_0 < t < 4T_0$, on a $\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_0(3T_0 - t)$
- pour $4T_0 < t < 5T_0$, on a $\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_0(t - 5T_0)$



Q 2. La position $\theta(T_0)$ atteinte à l'instant T_0 est sur le graphe des vitesses $\dot{\theta}(t)$ l'aire sous la courbe de 0 à T_0 , soit l'aire du triangle de base T_0 et de hauteur $T_0 \ddot{\theta}_0$. Donc $\theta(T_0) = \frac{1}{2} T_0^2 \ddot{\theta}_0$.

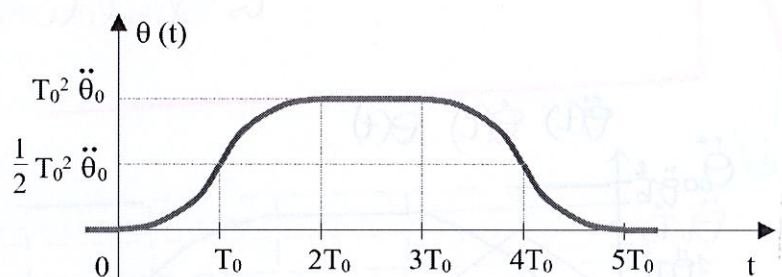
La position $\theta(2T_0)$ atteinte à l'instant $2T_0$ est sur le graphe des vitesses $\dot{\theta}(t)$ l'aire sous la courbe de 0 à $2T_0$, soit l'aire du triangle de base $2T_0$ et de hauteur $T_0 \ddot{\theta}_0$. Donc $\theta(2T_0) = T_0^2 \ddot{\theta}_0$.

Il n'y a pas d'évolution entre les instants $2T_0$ et $3T_0$, donc $\theta(3T_0) = T_0^2 \ddot{\theta}_0$.

Avec le même raisonnement : $\theta(4T_0) = \theta(3T_0) - \frac{1}{2} T_0^2 \ddot{\theta}_0 = \frac{1}{2} T_0^2 \ddot{\theta}_0$ puis : $\theta(5T_0) = \theta(4T_0) - \frac{1}{2} T_0^2 \ddot{\theta}_0 = 0$

Q 3. On procède par intégration, en partant de la position nulle. La loi de position $\theta(t)$ est donnée ci-contre.

Pour chaque phase, à une loi de vitesse affine croissante, correspond une loi de position parabolique à pente croissante. Pour chaque phase, à une loi de vitesse affine décroissante, correspond une loi de position parabolique à pente décroissante.



- pour $0 < t < T_0$, on a $\theta(t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta}_0 t^2$
- pour $T_0 < t < 2T_0$, on a $\theta(t) = \ddot{\theta}_0(2T_0 t - \frac{1}{2} t^2 + \alpha)$, avec α obtenue par la condition de continuité en T_0 : $\frac{1}{2} \ddot{\theta}_0 T_0^2 = \ddot{\theta}_0(2T_0 T_0 - \frac{1}{2} T_0^2 + \alpha)$, soit $\alpha = -T_0^2$, donc $\theta(t) = \ddot{\theta}_0(2T_0 t - \frac{1}{2} t^2 - T_0^2)$
On peut aussi écrire plus rapidement $\theta(t) = -\frac{1}{2} \ddot{\theta}_0(2T_0 - t)^2 + T_0^2 \ddot{\theta}_0$ en intégrant $(2T_0 - t)$ en $-\frac{1}{2}(2T_0 - t)^2$. La constante d'intégration se calculant facilement d'après la question 2.
- pour $2T_0 < t < 3T_0$, on a $\theta(t) = T_0^2 \ddot{\theta}_0$
- pour $3T_0 < t < 4T_0$, on a $\theta(t) = -\frac{1}{2} \ddot{\theta}_0(3T_0 - t)^2 + T_0^2 \ddot{\theta}_0$
- pour $4T_0 < t < 5T_0$, on a $\theta(t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta}_0(t - 5T_0)^2$

Q 4. Le mouvement obtenu est un mouvement d'aller et retour, de la position 0 à la position $T_0^2 \ddot{\theta}_0$.

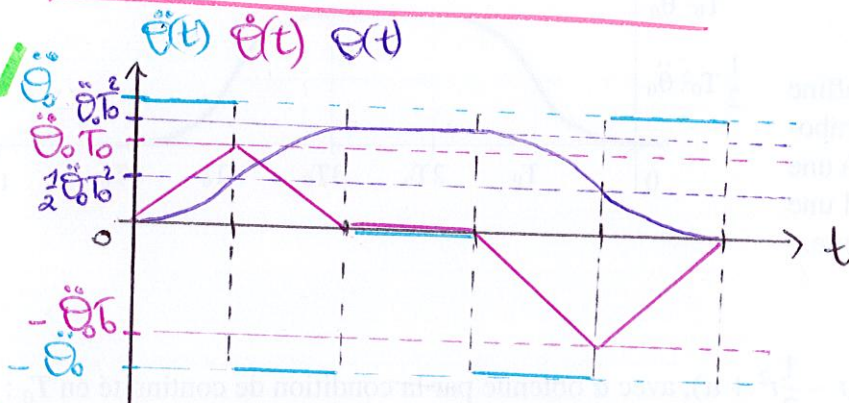
Exercice 4 : loi en trapèze de vitesse : Explication Méthode

Q1) Rappel: $\dot{\theta}(t) = \int_0^t \ddot{\theta}(u) du \rightarrow$ c'est l'aire sous la courbe de $\ddot{\theta}$ entre 0 et t .

De même, $\theta(t) = \int_0^t \dot{\theta}(u) du \rightarrow$ c'est l'aire sous la courbe de $\dot{\theta}$ entre 0 et t .

$\Rightarrow$ facile le tracé et la détermination des conditions initiales pour chaque intervalle $[kT_0, (k+1)T_0]$.

↳ Pour déterminer le + facilement $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$ on propose de reprendre une origine des temps nulle pour chaque intervalle $\tilde{t}_k = t - kT_0 \Rightarrow$ on retranslatera à la fin
↳ facilite les calculs d'intégration.

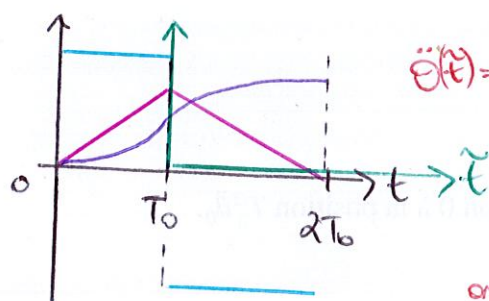


$\dot{\theta}(t)$ tracé comme aire sous courbe $\ddot{\theta}(t)$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(T_0) = \ddot{\theta}_0 T_0$$

$$\dot{\theta}(2T_0) = 0 \text{ et } \dots$$

Exemple détaillé pour calcul $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$ sur $[T_0, 2T_0]$



$$\dot{\theta}(\tilde{t}) = \dot{\theta}(T_0) - \ddot{\theta}_0 \tilde{t}$$

$$= \dot{\theta}_0 T_0 - \ddot{\theta}_0 \tilde{t}$$

on intègre

$$\Rightarrow \theta(\tilde{t}) = \theta(T_0) + \dot{\theta}_0 T_0 \tilde{t} - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_0 \tilde{t}^2$$

$$= \frac{1}{2} \ddot{\theta}_0 T_0^2 + \dot{\theta}_0 T_0 \tilde{t} - \frac{1}{2} \ddot{\theta}_0 \tilde{t}^2$$

$\theta(t)$ tracé comme aire sous la courbe de $\dot{\theta}(t)$

$$\Rightarrow \theta(T_0) = \frac{1}{2} T_0 \times \dot{\theta}_0 T_0$$

$$\theta(2T_0) = T_0 \dot{\theta}_0 T_0 \text{ et } \dots$$

$$\tilde{t} = t - T_0 \Rightarrow \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 T_0 - \ddot{\theta}_0 (t - T_0)$$

$$= \ddot{\theta}_0 (2T_0 - t)$$

et ... pour $\theta(t)$