

Réglage d'un pilote automatique d'avion - *Centrale 2025*

1 Présentation du système

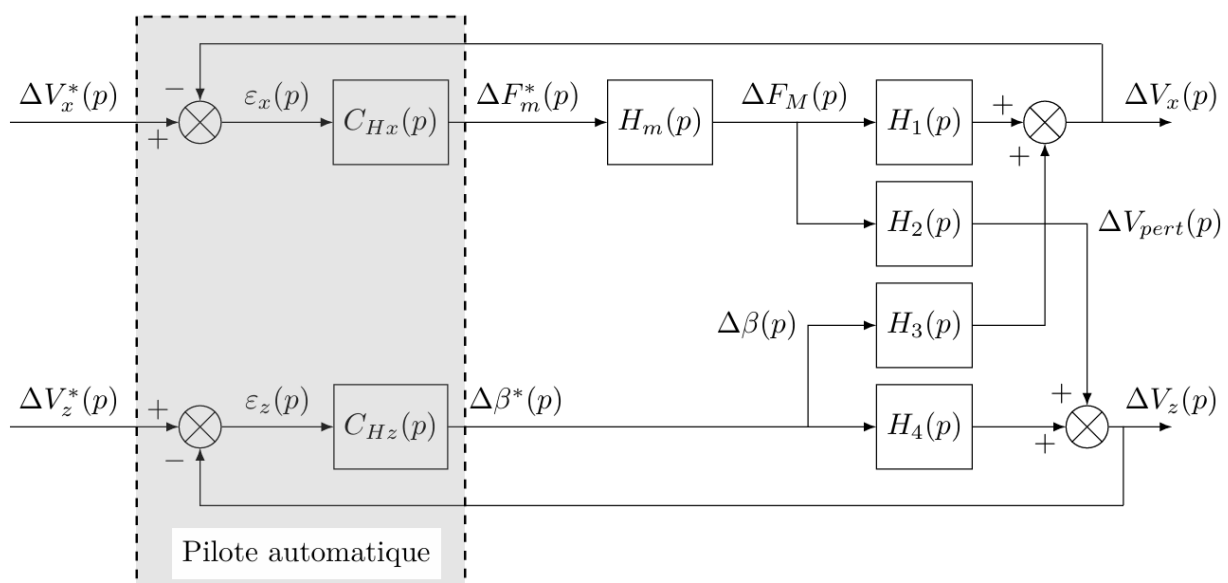


FIGURE 1 – L'Elixir en vol © Elixir Aircraft

L'entreprise française Elixir Aircraft commercialise un petit avion léger biplace, l'Elixir, destiné entre autres à la formation des pilotes. L'Elixir est équipé d'un pilote automatique deux axes, permettant le contrôle du roulis et du tangage, respectivement via les ailerons et la gouverne de profondeur.

Pour cette étude, restreinte au pilotage des seules vitesses horizontale et verticale, la structure du pilote automatique est représentée sur le schéma-blocs suivant :

- la variation de vitesse horizontale ΔV_x est pilotée par la force de propulsion F_m du moteur thermique et de son hélice qui est déterminée par un correcteur opérant à partir de l'écart de vitesse horizontale ε_x .
- la variation de vitesse verticale ΔV_z est pilotée par l'angle β de la gouverne de profondeur, actionné par l'un des deux servo moteurs, à partir de l'écart de vitesse verticale ε_z .
- ΔV_x^* et ΔV_z^* sont respectivement les variations de consigne des vitesses horizontale et verticale.
- $C_{Hx}(p)$ et $C_{Hz}(p)$ sont les fonctions de transfert respectives des correcteurs pour les boucles d'asservissement en vitesse horizontale et verticale.
- ΔF_m^* est la variation de consigne de la force de propulsion et ΔF_m est la variation réelle de la force de propulsion.
- $H_m(p)$ est la fonction de transfert de l'ensemble de la chaîne de propulsion.
- $\Delta \beta^*$ est la variation de consigne de l'angle de gouverne de profondeur et $\Delta \beta$ est la variation de l'angle de la gouverne de profondeur

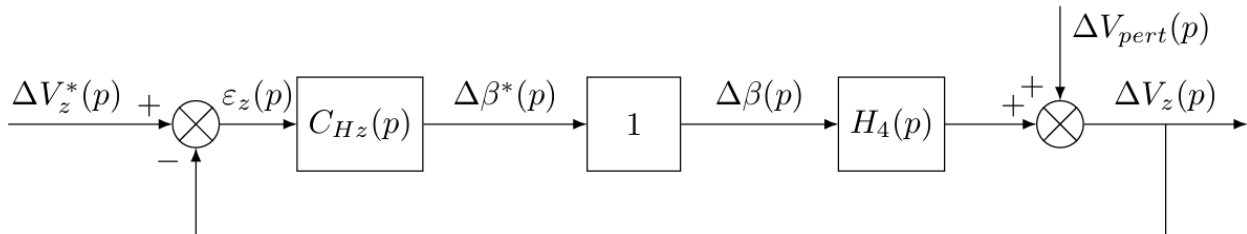


Le schéma-bloc met en évidence le **couplage** entre les différentes variables et montre ainsi que ΔV_x et ΔV_z sont simultanément influencées par ΔV_x^* et ΔV_z^* .

2 Asservissement en vitesse verticale

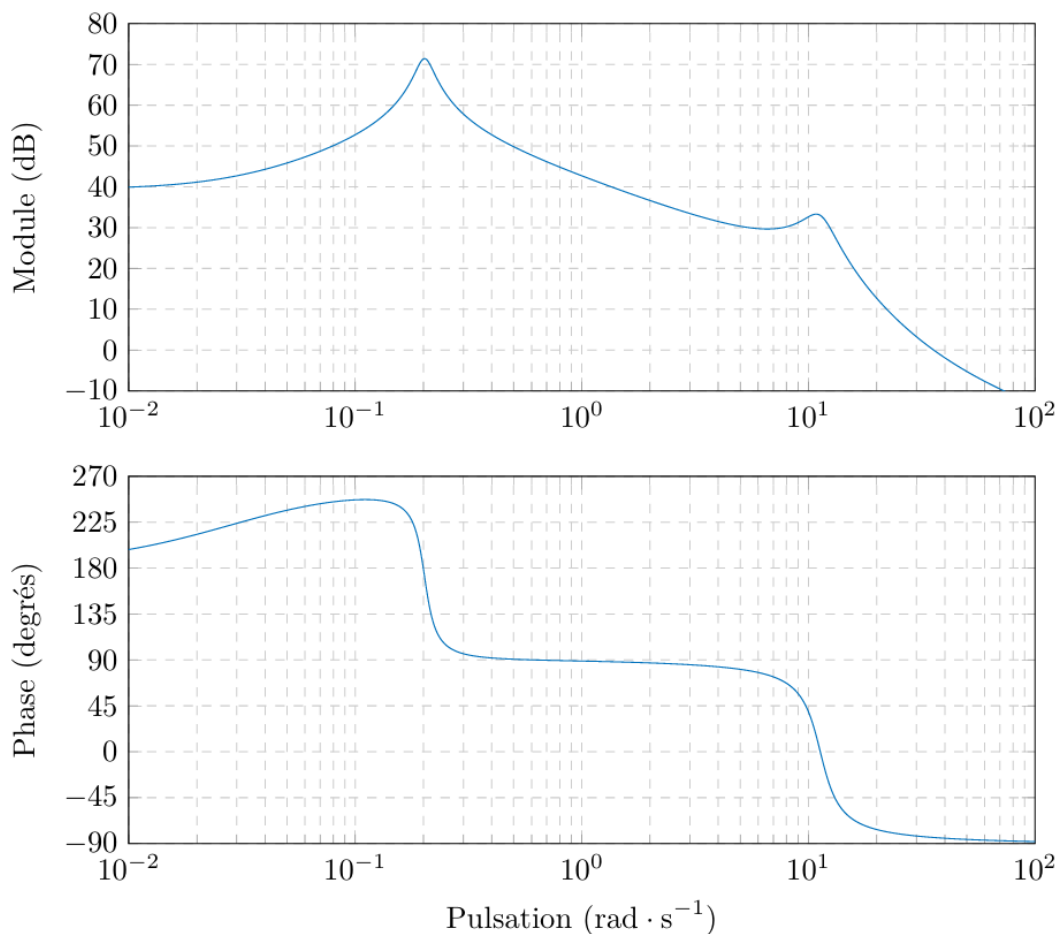
L'objectif de cette partie est de régler le correcteur de vitesse verticale compte tenu de la dépendance entre les forces aérodynamiques et la vitesse de l'avion

Dans un premier temps, seul l'asservissement en vitesse verticale est pris en compte, en supposant que la variation de vitesse verticale est découplée. L'effet du couplage est ainsi assimilé dans ce cas à un signal perturbateur extérieur $\Delta V_{pert}(p)$. La boucle d'asservissement est alors représentée par le schéma-blocs suivant :



Le correcteur est de type proportionnel intégral de fonction de transfert $C_{Hz}(p) = K_z \left(1 + \frac{1}{\tau_z p} \right)$ avec $K_z < 0$.

On donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert $H_4(p)$:



Q 1. Rappeler quels sont la phase (à 2π près) et le gain (en décibel) d'une fonction transfert valant $H(p) = -1$.

L'exploitation du temps de réponse en boucle fermée permet de restreindre la plage d'étude fréquentielle au voisinage de 1 rad/s. Le calcul des paramètres du correcteur sera alors effectué dans l'intervalle [0.5, 5 rad/s].

Q 2. Justifier que la fonction $H_4(p)$ peut être assimilée à une fonction de la forme $\tilde{H}_4(p) = -\frac{K_{4a}}{p}$, avec $K_{4a} > 0$, dans l'intervalle de pulsations retenu. Donner la valeur de K_{4a} .

Q 3. Avec l'approximation $\tilde{H}_4(p)$, donner la FTBO $H_{BO}(p)$ de cet asservissement.

Q 4. Donner la valeur de la phase de la FTBO en $\omega = \frac{1}{\tau_z}$.

Q 5. Sachant qu'un des critères de stabilité impose une marge de phase $M_\varphi = 45^\circ$, donner la relation qui doit exister entre τ_z et ω_c la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO.

Le temps de réponse à 5% attendu par le CdCf pour la boucle d'asservissement de la vitesse verticale est d'environ 5 secondes. On suppose que l'on peut utiliser l'approximation $\omega_c t_{5\%} \approx 3$.

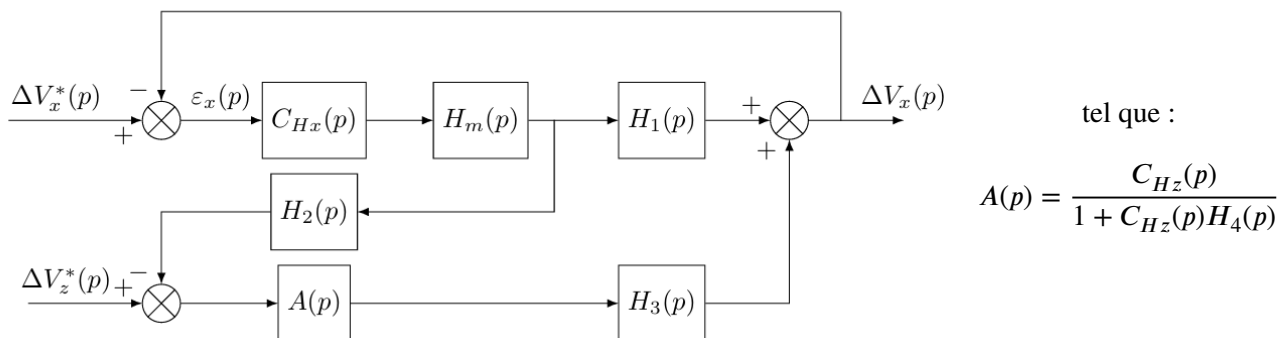
Q 6. En déduire une valeur numérique de τ_z afin de répondre au critère de rapidité du CdCf.

Q 7. En conservant la valeur numérique de τ_z qui vient d'être déterminée, donner la valeur de K_z qui permet d'imposer la pulsation ω_c afin de respecter le critère de marge de phase.

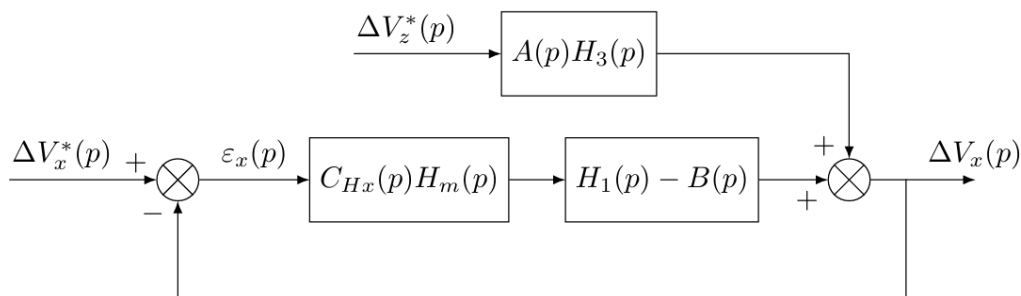
3 Asservissement en vitesse horizontale

L'objectif de cette partie est d'exprimer une fonction de transfert simplifiée de la boucle ouverte de l'asservissement de vitesse horizontale, utilisable dans le cadre de la synthèse du correcteur de cette même boucle.

Pour l'étude de l'asservissement de ΔV_x , on admet que le schéma-blocs complet du pilote automatique peut se ramener, en appliquant des hypothèses simplificatrices, sous la forme du schéma bloc suivant :



Pour la synthèse du correcteur de la chaîne d'asservissement horizontale il est envisagé d'assimiler ΔV_z^* à une perturbation. On se propose de mettre en avant cette idée en mettant le schéma-blocs sous la forme suivante :



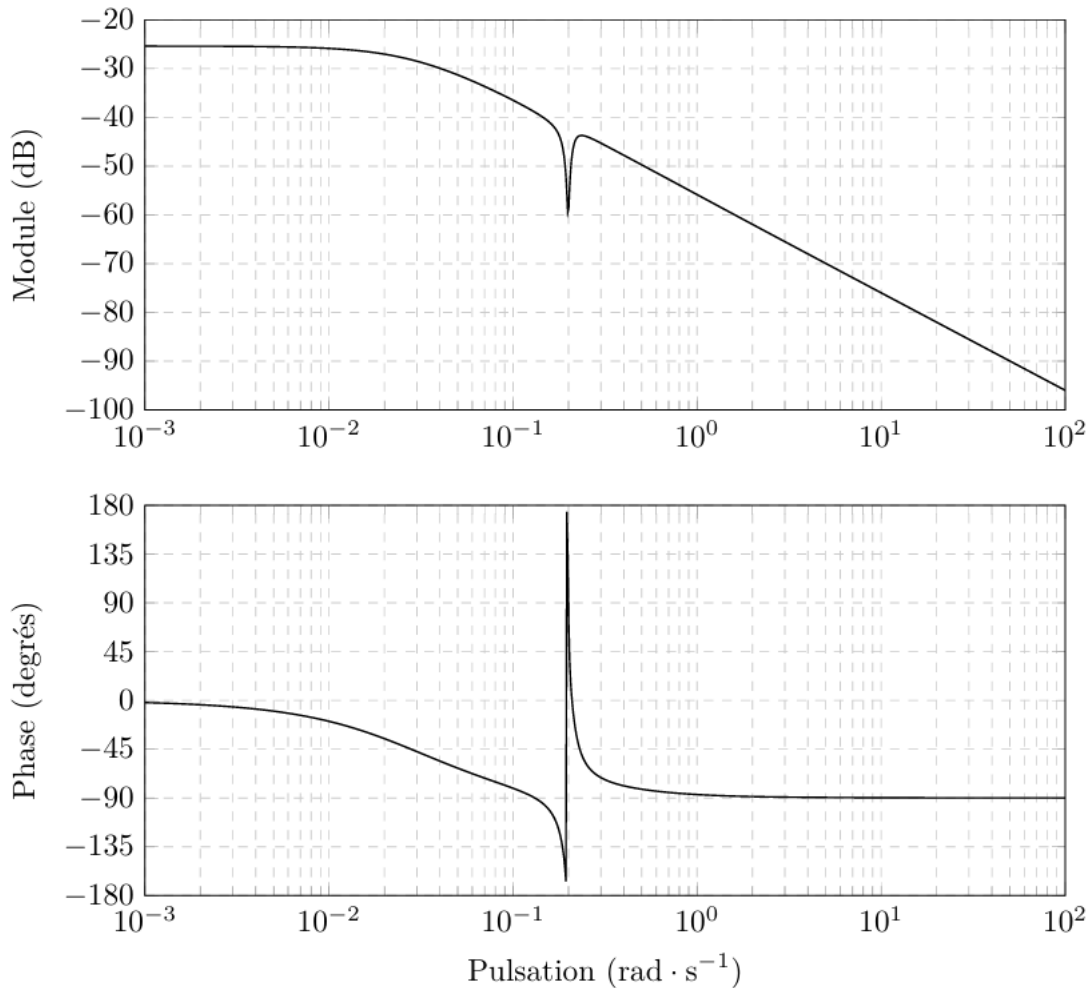
Q 8. Déterminer l'expression de $B(p)$ en fonction de $C_{Hz}(p)$, $H_4(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$ afin que les deux schéma-blocs soient effectivement équivalents.

Le temps de réponse à 5% attendu pour la boucle d'asservissement de la vitesse horizontale est d'environ 3 secondes. En conséquence, dans le cadre du réglage du correcteur, on considérera plus précisément le comportement fréquentiel du système pour des pulsations entre 0.8 rad/s et 8 rad/s.

Q 9. On donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert $H_1(p) - B(p)$, proposer un modèle de comportement, noté $H_{1B}(p)$, pertinent dans l'intervalle de pulsations considéré. Donner en particulier l'application numérique du gain, noté K_{1a} , de cette fonction de transfert.

L'architecture de correcteur retenue pour la boucle de vitesse horizontale est de type proportionnel intégral de fonction de transfert $C_{Hx}(p) = K_x \left(1 + \frac{1}{\tau_x p} \right)$.

De plus, en phase de vol, le modèle de comportement du groupe de propulsion est approché par celui d'une fonction du premier ordre de gain statique unitaire et de constante de temps 1/100 s.



Q 10. Justifier que, dans l'intervalle de pulsations retenu pour le réglage du correcteur, la FTBO de l'asservissement de vitesse horizontale $H_{BO}(p)$ peut se mettre sous la forme : $H_{BO}(p) = C_{Hx}(p)H_{1B}(p)$.

En conservant cette simplification, le calcul de la FTBF de cet asservissement donne :

$$\frac{\Delta V_x(p)}{\Delta V_x^*(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = X(p)(1 + \tau_x p) \quad \text{avec} \quad X(p) = \frac{1}{1 + \tau_x p + \frac{\tau_x}{K_x K_{1a}} p^2}$$

Q 11. En déduire l'expression de K_x en fonction de K_{1a} et τ_x qui permet d'obtenir une réponse indicielle de $X(p)$ la plus rapide possible, sans dépassement.

Q 12. Que peut-on dire quant à la stabilité de la boucle fermée de vitesse horizontale en phase de vol ?

Partie Cinématique : Centrifugeuse de laboratoire

1 Présentation du système

Afin d'accélérer le processus de précipitation ou de séparation de composés dans l'industrie alimentaire, dans les laboratoires pharmaceutiques ou les laboratoires de chimie, les produits sont placés en centrifugeuse.



FIGURE 2 – Photographies d'une centrifugeuse et de son rotor.

Ces processus qui auraient mis plusieurs jours à s'effectuer sous la seule gravité terrestre mettent quelques minutes lorsque l'éprouvette est soumise à une accélération de 10 000 g... Certaines centrifugeuses utilisées pour la séparation des protéines et des acides nucléiques montent à des accélérations de 200 000 g.

2 Étude cinématique

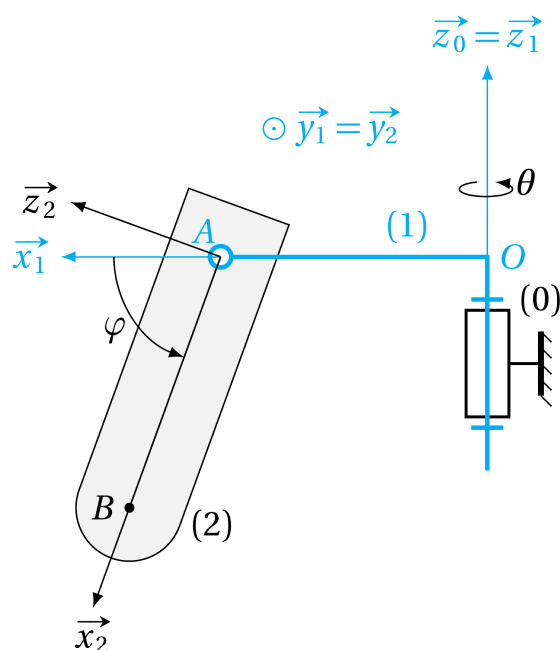


FIGURE 3 – Paramétrage du mouvement de la centrifugeuse.

Le repère lié au bâti de la centrifugeuse est noté $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Un repère lié au rotor 1 est noté $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. Le mouvement de rotation du rotor 1 par rapport au bâti 0 autour de \vec{z}_0 est paramétré par l'angle $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. Un repère lié à l'éprouvette 2 est noté $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. Le mouvement de rotation de l'éprouvette 2 par rapport au rotor 1 autour de \vec{y}_1 est paramétré par l'angle $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Les distances OA et AB sont respectivement notées $R = 15$ cm et $L = 10$ cm.

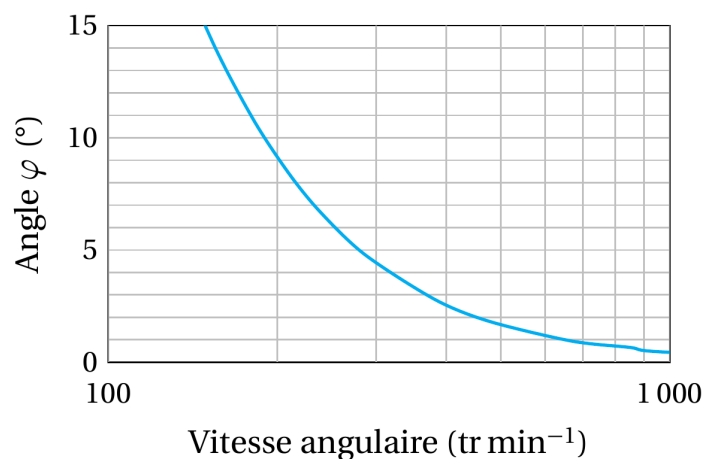


FIGURE 4 – Évolution de l'angle φ en fonction de la vitesse de rotation.

- Q 1.** Tracer les deux figures de changement de base.
- Q 2.** Déterminer le vecteur position \overrightarrow{OB} .
- Q 3.** Déterminer l'expression du vecteur \vec{z}_2 dans la base B_0 puis celle de \vec{y}_0 dans la base B_2 .
- Q 4.** Pour déterminer la distance du point B à l'axe de rotation, déterminer la projection du vecteur \overrightarrow{OB} sur \vec{x}_1 .
- Q 5.** Déterminer l'expression de $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0$.
- Q 6.** Déterminer les vecteurs vitesses de rotation $\vec{\Omega}_{1/0}$, $\vec{\Omega}_{2/1}$ et en déduire l'expression : $\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\varphi} \vec{y}_1 + \dot{\theta} \vec{z}_0$.
- Q 7.** Déterminer l'expression de la vitesse $\overrightarrow{V_{B \in 2/0}}$.
- Q 8.** Déterminer l'expression de l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{B \in 2/0}}$.

Lorsque la machine tourne à vitesse constante $\dot{\theta} = \omega$ et se trouve en régime établi, l'angle φ reste constant et suit la loi donnée en FIGURE 4.

- Q 9.** Déterminer la valeur numérique de l'accélération du point B appartenant à l'éprouvette, par rapport au bâti de la centrifugeuse pour une vitesse de rotation de 200 tr/min. Vérifier l'ordre de grandeur annoncé pour une vitesse de rotation de 10 000 tr/min.

Exercice Bonus : Géométrie d'une imprimante 3D parallèle

1 Présentation du système et paramétrage cinématique

Une imprimante 3D est une machine permettant de fabriquer des pièces volumiques par ajout de matière, c'est à dire en déposant des fines couches successives de plastiques afin de former un objet.

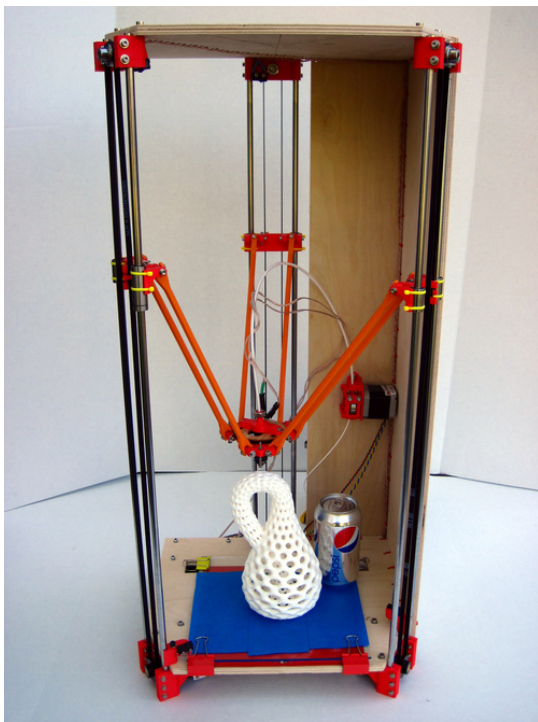


FIGURE 5 – Imprimante 3D parallèle

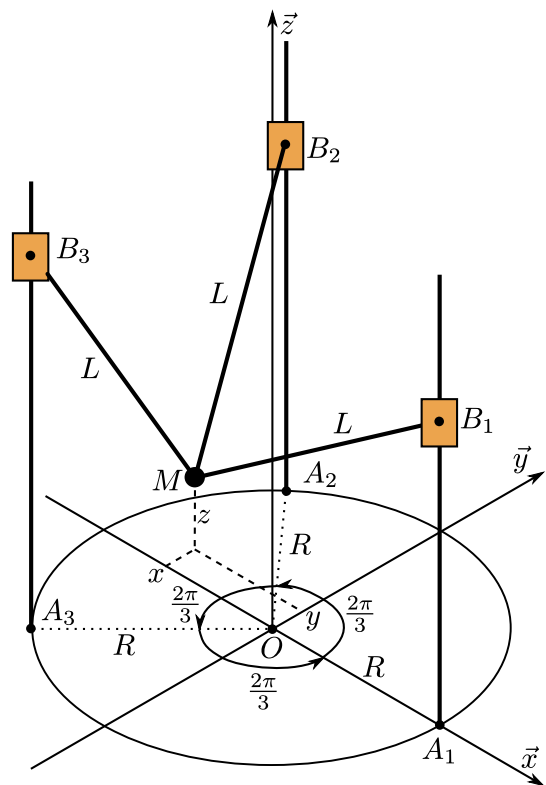


FIGURE 6 – Paramétrage de l'imprimante 3D

2 Détermination des lois de commandes des moteurs de l'imprimante 3D

Une imprimante 3D parallèle s'appuie sur une architecture à 3 barres rigides (cf FIGURE 6) de longueurs L commandées par 3 moteurs linéaires pour déplacer le centre de la tête d'impression M .

L'objectif est ici de déterminer les lois de commande des 3 moteurs linéaires permettant de déplacer M à une position (x, y, z) précise de l'espace.

Les déplacements des moteurs sont paramétrés par les longueurs $\lambda_i(t)$ telles que $\overrightarrow{A_i B_i} = \lambda_i(t) \vec{z}$. Le repère fixe lié au bâti de l'imprimante 3D est noté $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Q 1. Déterminer les coordonnées des points A_1 , A_2 et A_3 dans le repère R . Cela revient à exprimer le vecteur $\overrightarrow{OA_i}$ au sein de ce repère.

Q 2. Déterminer l'expression du vecteur $\overrightarrow{MB_1}$.

Q 3. Sachant que la longueur $\|\overrightarrow{MB_1}\|$ est égale à L , déterminer l'expression de λ_1 en fonction de x , y , z et des caractéristiques de longueur de l'imprimante.

Q 4. Par un raisonnement similaire, en déduire les expressions de λ_2 et λ_3 .

On rappelle qu'en coordonnées cartésiennes, un cercle de centre (x_c, y_c) et de rayon R est défini par l'ensemble de points : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2\}$.

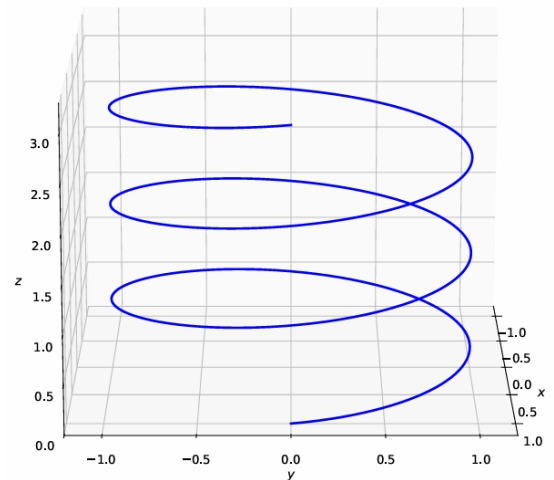
Q 5. En déduire la surface S théoriquement accessible par la tête d'impression pour une altitude z fixée. Représenter S dans le plan $(x, y, 0)$. Vous prendrez soin de préciser les points limites remarquables de cette surface.

Q 6. En déduire une inégalité entre R et L afin que S ne soit pas réduite à l'origine O du repère.

On veut imprimer une hélice de rayon r et de pas p tel que représentée ci-contre. Un pas p signifie que pour chaque tour effectué par l'hélice, celle-ci est montée de p mètre.

Pour cela, on utilise un paramétrage en coordonnées cylindrique de la position \overrightarrow{OM} de la tête d'impression, mieux adapté à la géométrie de l'hélice. Avec ce nouveau paramétrage, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(r, \theta) = r \cos(\theta) \\ y(r, \theta) = r \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta(t) = \omega t$$



À partir de la description faite de l'hélice, il apparaît clair que l'altitude z que devra prendre la tête d'impression lors de l'impression dépend aussi de l'angle θ .

Q 7. Donner l'expression de $z(\theta)$ puis en déduire l'expression $\overrightarrow{OM}(t)$ lors de l'impression de l'hélice.

Q 8. En déduire la loi de commande en vitesse $\dot{\lambda}_1(t)$ du moteur 1.

Une contrainte « physique » de l'imprimante impose que la plus grande hélice imprimable est de rayon $r = R$. En effet, on ne peut pas passer au travers des barres rigides formant les axes de translation des moteurs.

Q 9. Montrer alors que l'expression de la loi de commande en vitesse se simplifie en $\dot{\lambda}_1(t) = \frac{p\omega}{2\pi} + \frac{R^2\omega \sin(\omega t)}{\sqrt{L^2 - 2R^2(1 - \cos(\omega t))}}$

Q 10. Justifier brièvement que, pour pouvoir imprimer cette hélice, il est nécessaire que $L \geq 2R$.

L'imprimante utilisée a une hauteur $H = 1$ m et un rayon $R = 15$ cm. De plus, le CdCf impose une vitesse maximale de translation des moteurs de 1 mm/s. On fournit (cf FIGURE 7 et 8) les tracés des lois de commandes en position et la vitesse maximale associée des moteurs tels qu'ils ont été déterminés analytiquement aux questions précédentes.

L'objectif « industriel » recherché est de pouvoir imprimer des hélices d'une hauteur $h_{max} = 30 \text{ cm}$ et de pas $p = 10 \text{ cm}$ à la chaîne le plus rapidement possible.

Q 11. Par lecture graphique des tracés fournis, donner la longueur L_{max} des bras permettant d'imprimer les hélices. En déduire la valeur numérique du ratio $\frac{L_{max}}{2R}$ pour l'imprimante utilisée.

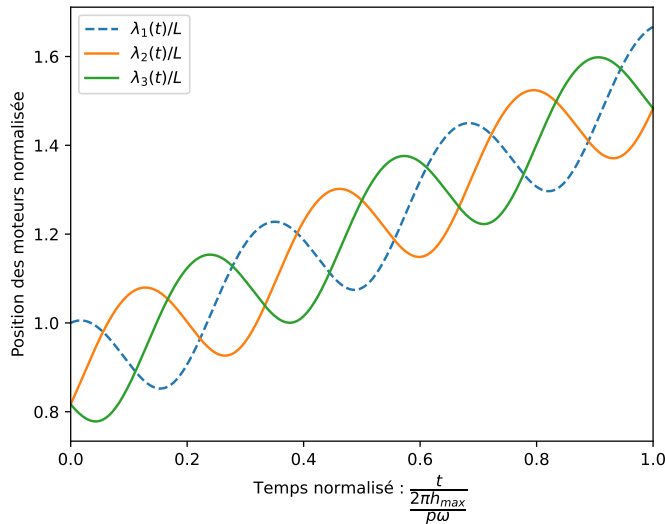


FIGURE 7 – Loi de commande en position des moteurs

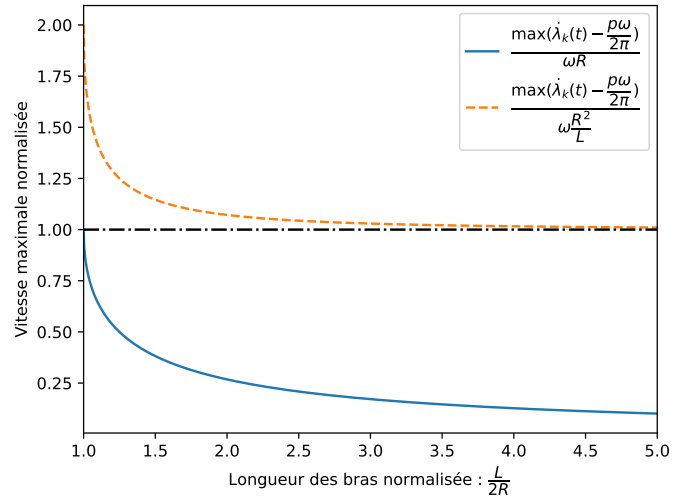


FIGURE 8 – Vitesse maximale des moteurs

Q 12. En déduire, pour ce ratio, le paramètre ω_{max} permettant d'imprimer à la chaîne les hélices le plus rapidement possible tout en respectant les contraintes du CdCf.

Q 13. En déduire combien de temps mettra l'imprimante à réaliser une des hélices souhaitées.

On se propose dans un dernier temps de comprendre pourquoi il est préférable d'aller « un peu moins vite » en choisissant ω_{max} défini précédemment pour L_{max} plutôt que d'être « un peu plus rapide » en choisissant une longueur de bras minimale $L_{min} = 2R$.

Q 14. En analysant la figure ci-contre décrivant l'évolution de la vitesse du moteur 1 pour différentes valeurs de ratio $\frac{L}{R}$, justifier brièvement pourquoi il est préférable d'avoir un ratio $\frac{L}{R}$ grand, quitte à avoir une vitesse d'impression un peu plus faible.

Indication : Que vaut la valeur théorique de l'effort nécessaire, appliqué au niveau du moteur, afin de faire varier sa vitesse de manière discontinue ? En pratique, qu'est-ce cela risque d'impliquer en terme d'usure mécanique, voire de rupture, des pièces qui composent la motorisation de l'imprimante ?

