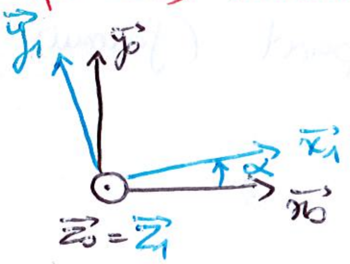
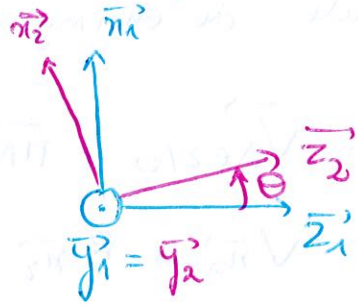
TD 2 : Position, Vitesse, Accélération

Exercice 1 : Dérivation de vecteurs de bases

Q2) 1ère étape $\Longrightarrow$ tracer les figures de projections planes !





Q1) $\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}\,\vec{z_0}$, $\quad \vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta}\,\vec{y_1}$ $\quad$ et $\quad \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}$

$$= \dot{\alpha}\,\vec{z_0} + \dot{\theta}\,\vec{y_1}$$

Q3) $\left.\dfrac{d\vec{x_1}}{dt}\right|_{B_0} = \dot{\alpha}\,\vec{y_1}$ $\qquad \left.\dfrac{d\vec{y_2}}{dt}\right|_{B_0} = \left.\dfrac{d\vec{y_2}}{dt}\right|_{B_2} + \vec{y_2} \wedge \vec{\Omega}_{0/2}$

$\left.\dfrac{d\vec{z_2}}{dt}\right|_{B_1} = \dot{\theta}\,\vec{x_2}$ $\qquad = \vec{y_2} \wedge (-\dot{\alpha}\,\vec{z_0} - \dot{\theta}\,\vec{y_1})$

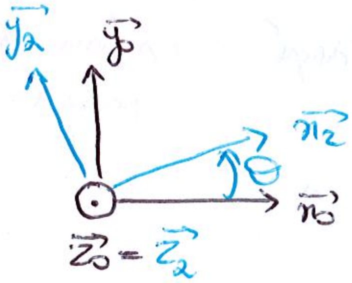
$\left.\begin{matrix}\vec{y_2} = \vec{y_1} \\ \vec{z_0} = \vec{z_1}\end{matrix}\right\}$ $= -\dot{\alpha}\,\vec{x_1}$

$$\left.\frac{d\vec{z_2}}{dt}\right|_{B_0} = \left.\frac{d\vec{z_2}}{dt}\right|_{B_1} + \vec{z_2} \wedge \vec{\Omega}_{0/1} = \dot{\theta}\,\vec{x_2} + \vec{z_2} \wedge -\dot{\alpha}\,\vec{z_1}$$

$$= \dot{\theta}\,\vec{x_2} + \dot{\alpha}\sin(\theta)\,\vec{y_1}$$

Exercice 2 : Vitesse maximale d'un hélicoptère

Q1)



$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \left|\begin{matrix}\lambda(t) + R\cos(\theta) \\ 0 + R\sin(\theta) \\ h\end{matrix}\right._{R_0}$$

$$= h\,\vec{z_0} + \lambda(t)\,\vec{x_0} + R\,\vec{x_2}$$

Q2) $\vec{V}_{M\in 2/0} = \left.\dfrac{d\vec{OM}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{\lambda}(t)\,\vec{x_0} + R\dot{\theta}\,\vec{y_2} = V\,\vec{x_0} + R\dot{\theta}\,\vec{y_2}$

Q3) $\mathcal{V}_{1/0} = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}_{A\in 1/0}\end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}\vec{0} \\ V\,\vec{x_0}\end{matrix}\right\}_A$ et $\mathcal{V}_{2/1} = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{A\in 2/1}\end{matrix}\right\}_A \overset{\text{rotation autour de } (A,\vec{z_0})}{=} \left\{\begin{matrix}\dot{\theta}\,\vec{z_0} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$

Q4) $\mathcal{V}_{2/0} = \mathcal{V}_{2/1} + \mathcal{V}_{1/0} = {}_A\left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ V\vec{x_0} \end{matrix}\right\} + {}_A\left\{\begin{matrix} \dot{\theta}\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \dot{\theta}\vec{z_0} \\ V\vec{x_0} \end{matrix}\right\}$

⚠ il faut sommer au MÊME point pour que la Σ ait un sens

Avec la formule de changement de point (formule de Varignon)

$$\overrightarrow{V_{M\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/0}} + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$$

$$= V\vec{x_0} - R\vec{x_2} \wedge \dot{\theta}\vec{z_0}$$

$$= V\vec{x_0} + R\dot{\theta}\vec{y_2}$$

on retrouve le résultat de la Question 2.

Q5) $\|\overrightarrow{V_{M\in 2/0}}\|^2 = (V\vec{x_0} + R\dot{\theta}\vec{y_2}) \cdot (V\vec{x_0} + R\dot{\theta}\vec{y_2})$

$$= V^2 + (R\dot{\theta})^2 + 2R\dot{\theta}V\,\vec{x_0}\cdot\vec{y_2}$$

$$= V^2 + (R\dot{\theta})^2 - 2R\dot{\theta}V\sin(\theta)$$

$\Rightarrow V_{max} \underset{\sin(\theta) = -1}{=} \sqrt{V^2 + R^2\omega^2 + 2R\omega V}$ en $\underbrace{\theta = \frac{3\pi}{2}}$

instant où la vitesse de la pâle est dans la m̂ direct° et le même "sens" que hélicoptère
càd : vitesse de la pâle est dans la m̂ direct° et le même "sens" que hélicoptère

Q6) Pour $R = 4{,}5$ m et $\omega = 384$ tr.min^{-1}

$$= 384 \times \frac{2\pi}{60} \text{ rad.s}^{-1}$$

$\Rightarrow V_{max}^2 = V^2 + (R\omega)^2 + 2R\omega V$ éq 2nd degré $\Rightarrow$ selon $\vec{x_0}$ ($= \vec{y_2}$ pour $\theta = \frac{3\pi}{2}$)

$$\Delta = (2R\omega)^2 - 4\left[(R\omega)^2 - V_{max}^2\right]$$

$$= (2V_{max})^2 > 0$$

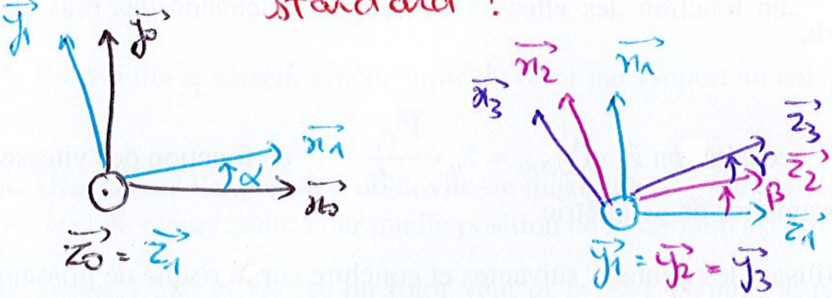
$\Rightarrow V_{\pm} = \dfrac{-2R\omega \pm 2V_{max}}{2} \underset{V>0}{\Rightarrow} V = -R\omega + V_{max}$

$\simeq 159$ m/s

$\simeq 572$ km/h.

Exercice 3 : Risque de glissement de la préhension robot

1ère étape $\Rightarrow$ retracer les figures de projections planes sous forme standard !



Q1) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = h\vec{z_0} + H\vec{z_2} + L\vec{z_3}$

↑ lecture schéma cinématique

Q2) $\vec{V}_{C\in 3/0} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right|_{R_0} = h\left.\dfrac{d\vec{z_0}}{dt}\right|_{R_0} + H\left.\dfrac{d\vec{z_2}}{dt}\right|_{R_0} + L\left.\dfrac{d\vec{z_3}}{dt}\right|_{R_0}$

$$= \vec{0} + H(\vec{0} + \vec{z_2} \wedge \vec{\Omega}_{0/2}) + L(\vec{0} + \vec{z_3} \wedge \vec{\Omega}_{0/3})$$

$$= H\vec{z_2} \wedge (-\dot{\alpha}\vec{z_1} - \dot{\beta}\vec{y_2}) + L\vec{z_3} \wedge (-\dot{\alpha}\vec{z_1} - (\dot{\beta}+\dot{\gamma})\vec{y_3})$$

$$= H(\dot{\alpha}\sin(\beta)\vec{y_1} + \dot{\beta}\vec{x_2}) + L(\dot{\alpha}\sin(\beta+\gamma)\vec{y_1} + (\dot{\beta}+\dot{\gamma})\vec{x_3})$$

On a :

↳ $\left.\dfrac{d\vec{x_2}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\dfrac{d\vec{x_2}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{x_2} \wedge \vec{\Omega}_{0/2}$

$= \vec{x_2} \wedge (-\dot{\alpha}\vec{z_1} - \dot{\beta}\vec{y_2})$

$= \dot{\alpha}\cos(\beta)\vec{y_1} - \dot{\beta}\vec{z_2}$

Q3) $\vec{\Gamma}_{C\in 3/0} = \left.\dfrac{d\vec{V}_{C\in 3/0}}{dt}\right|_{R_0} = H\Big[\ddot{\alpha}\sin(\beta)\vec{y_1} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta)\vec{y_1} - \dot{\alpha}^2\sin(\beta)\vec{x_1} + \ddot{\beta}\vec{x_2} \underbrace{- \dot{\beta}^2\vec{z_2} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta)\vec{y_1}}_{\dot{\beta}\left.\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right|_{R_0}}\Big]$

$+ L\Big[\ddot{\alpha}\sin(\beta+\gamma)\vec{y_2} + \dot{\alpha}(\dot{\beta}+\dot{\gamma})\cos(\beta+\gamma)\vec{y_1} - \dot{\alpha}^2\sin(\beta+\gamma)\vec{x_1} + (\ddot{\beta}+\ddot{\gamma})\vec{x_3} - (\dot{\beta}+\dot{\gamma})^2\vec{z_3} + \dot{\alpha}(\dot{\beta}+\dot{\gamma})\cos(\beta+\gamma)\vec{y_1}\Big]$

$\Rightarrow$ la projection de l'accélération selon l'axe vertical

$$\vec{\Gamma}_{C\in 3/0}\cdot\vec{z_0} = \left[-\cos(\beta)\dot{\beta}^2 - \sin(\beta)\ddot{\beta}\right]\times H + \left[-\cos(\beta+\gamma)(\dot{\beta}+\dot{\gamma})^2 - \sin(\beta+\gamma)(\ddot{\beta}+\ddot{\gamma})\right]\times L$$

AN : $\vec{\Gamma}_{C\in 3/0}\cdot\vec{z_0} \simeq 21\ m/s^2 \simeq 2{,}15\ g \Rightarrow$ OK cdcf ($< 3g$)