

## Exercice 2: Réglage d'un pilote automatique d'avion (Piste bleue) (7)

Q1) Pour  $H(p) = -1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log(1) = 0 \text{ dB} & 0.5 \text{ pts} \\ \varphi(\omega) = -\pi \pm k\pi \text{ où } k \in \mathbb{N} & 0.5 \text{ pts} \end{cases}$$

Q2) Dans l'intervalle de pulsations  $[0,5; 5 \text{ rad/s}]$  retenue :

$\rightarrow$  gain a une pente de  $-20 \text{ dB/décade}$  0.25 pts

$\rightarrow$  phase vaut :  $\frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2}$  0.25 pts

réel négatif    intégrateur

on peut donc assimiler  $H_4(p) \approx \hat{H}_4(p) = -\frac{K_{4a}}{p}$  où  $K_{4a} > 0$

On mesure  $20 \log\left(\frac{K_{4a}}{0,5}\right) = 50 \text{ dB}$  0.25 pts  $\Rightarrow K_{4a} \approx \frac{1}{2} 10^{50/20}$  0.25 pts

$\approx 158 \text{ m.s}^{-2.\text{rad}^{-1}}$

Q3) Avec approximation précédente,  $H_{bo}(p) = C_{H_2}(p) \hat{H}_4(p)$  1 pts

inverse ordre 1

$$\Rightarrow H_{bo}(p) = -\frac{K_2 K_{4a}}{p} \frac{1 + \tau_2 p}{\tau_2 p} = \underbrace{\left(-\frac{K_2 K_{4a}}{\tau_2}\right)}_{\text{réel positif}} \underbrace{\frac{1 + \tau_2 p}{p^2}}_{\text{intégrateur d'ordre 2}}$$

Q4) Puisque la phase de l'inverse de l'ordre 1

en  $\omega = \frac{1}{\tau_2} = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \varphi_{bo}\left(\frac{1}{\tau_2}\right) = \frac{\pi}{4} - \pi$  1 pts

Q5) Pour imposer une marge de phase  $M\varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

il suffit alors que  $\omega_c = \frac{1}{\tau_2}$  1 pts

Q6) En utilisant l'approximation  $\omega_c t_{sy} \approx 3 \rightarrow$   $\tau_2 \approx \frac{t_{sy}}{3} \approx 1,67$  1 pts

et  $t_{sy} = 5 \Delta$  d'après Cdf.

Q7)

$$|H_{Bo}(j\omega)| = \frac{-K_z K_{u9}}{\tau_z} \frac{\sqrt{1+(\tau_z \omega)^2}}{\omega^2}$$

0.25 pts

Pour s'assurer  $\omega_c = \frac{1}{\tau_z}$ , on veut donc :

$$|H_{Bo}(j\omega_c)| = 1 \Leftrightarrow \frac{-K_z K_{u9}}{\tau_z} \frac{\sqrt{2}}{(1/\tau_z)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow K_z = -\frac{1}{\sqrt{2} K_{u9} \tau_z} \approx -2,7 \times 10^{-3} \text{ rad/(m/s)}$$

0.5 pts 0.25 pts

Exercice 2: Réglage pilote automatique avion (liste rouge)

Q1) Méthode: Comme tjs pour trouver relation entre FT de deux schémas-blocs équivalents  $\Rightarrow$  soit on manipule l'un pour retrouver l'autre et on identifie FT d'intérêt  
 $\hookrightarrow$  ici schémas-blocs complexe à manipuler à cause multiples retours  $\Rightarrow$  peu recommandé  
 $\Rightarrow$  soit méthode calculatoire, on exprime sortie en fonction des entrées dans les deux schémas et on identifie.

$\hookrightarrow$  Dans les deux schémas-blocs, les "invariants" sont:  
 $\Delta V_n(p)$ ,  $\Delta V_z^*(p)$ ,  $\Delta V_n^*(p)$  (sortie et entrées)  
 $\Rightarrow E_n(p) = \Delta V_n^*(p) - \Delta V_n(p)$  aussi

Schéma 1: 
$$\Delta V_n(p) = (H_1 H_m C H_x)(p) E_n(p) + (A H_3)(p) \left[ \Delta V_z^*(p) - (H_2 H_m C H_n)(p) E_n(p) \right]$$

0.375 pts

$$= (H_m C H_n)(p) [H_1(p) - (A H_3 H_2)(p)] E_n(p) + (A H_3)(p) \Delta V_z^*(p)$$

Schéma 2: 
$$\Delta V_n(p) = (C H_n H_m)(p) (H_1 - B)(p) E_n(p) + (A H_3)(p) \Delta V_z^*(p)$$

0.375 pts



On identifie :

$$B(p) = A(p) H_2(p) H_3(p) \\ = \frac{C H_2(p) H_3(p) H_4(p)}{1 + C H_2(p) H_4(p)}$$

0.25 pts

(8)

Q2) Pour  $\omega \in [0,8; 8 \text{ rad/s}]$ , le diagramme de Bode de  $H_1(p) - B(p)$  présente :

0.25 pts

0.25 pts

un gain de pente  $-20 \text{ dB/decade}$  et une phase de  $-90^\circ$

$\Rightarrow$  caractéristique d'un intégrateur

$$\Rightarrow H_1(p) - B(p) \approx H_{1B}(p) = \frac{K_{1B}}{p} \quad \text{avec } K_{1B} > 0$$

$0,8 \leq \omega \leq 8 \text{ rad/s}$

0.25 pts

On mesure  $20 \log \left( \frac{K_{1B}}{5} \right) = -70 \text{ dB} \Rightarrow K_{1B} \approx 5 \times 10^{-\frac{70}{20}}$

$$= 1,6 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1} \cdot \text{N}^{-1}$$

0.25 pts

Q3)  $H_{B0}(p) = \frac{C H_2(p)}{1 + \frac{p}{100}} H_{1B}(p)$

$0,8 \leq \omega \leq 8 \text{ rad/s}$

0.5 pts

$\hookrightarrow$  Pour  $\omega \ll 100$ ,  $\frac{1}{1 + \frac{p}{100}} \approx 1$ , c'est le cas ici

0.5 pts

puisque  $8 \text{ rad/s} < \frac{\omega_0}{5} = 20 \Rightarrow 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \right) \approx 0 \text{ dB}$

Remarque : Par contre (!) à ce que l'on conclura sur la phase, en effet  $\arg \left( \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \right) \approx 0$  seulement

pour  $\omega \leq \frac{\omega_0}{50} = 2 \text{ rad/s} \Rightarrow$  orche 1 a une

influence sur la phase (faible influence mais influence quand même)

$\hookrightarrow \arctan \left( \frac{8}{100} \right) \approx 4,6^\circ$

$\Rightarrow$  pour  $\omega \in [0,8; 8 \text{ rad/s}]$ ,  $H_{B0}(p) \approx C H_2(p) H_{1B}(p)$

94) on identifie  $X(p) = \frac{1}{1 + 2\frac{\zeta_x}{\omega_x} p + \frac{p^2}{\omega_x^2}}$  ordre 2

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\zeta_x}{\omega_x} = \tau_x \end{array} \right.$$

$$\omega_x = \sqrt{\frac{K_n K_{nq}}{\tau_n}}$$

$$\zeta_x = \frac{1}{2} \sqrt{\tau_n K_n K_{nq}}$$

0.375 pts

↳ système ordre 2 le plus rapide sans dépassement

0.375 pts pour  $\zeta_x = 1$

$$\Rightarrow K_n = \frac{4}{\tau_n K_{nq}}$$

0.25 pts

95) On a : pôles de la FTBF sont ceux de  $X(p)$

0.625 pts

$$\Rightarrow \text{Re}(p) = -\omega_x < 0$$

⇒ vitesse horizontale stable en phase de vol. 0.375 pts

Rappel cours :

• ordre 2 ⇒ pôles sont

$$p_{\pm} = -\omega_0 (\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

pour  $\zeta \geq 1$

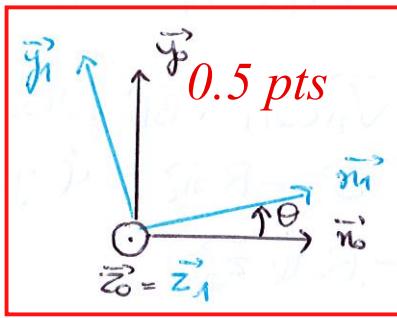
$$p_{\pm} = -\omega_0 (\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2})$$

pour  $\zeta < 1$

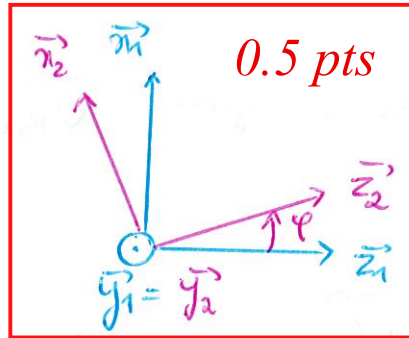


# Partie Cinématique : Centrifugeuse de laboratoire

Q1)



0.5 pts



0.5 pts

Q2)  $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = R \vec{n}_1 + L \vec{x}_2$  1 pts

Q3)  $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}_{B_0}$  0.5 pts

d'après le schéma et les données géométriques de l'énoncé

par lecture des figures de projection planes

et  $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \end{pmatrix}_{B_2}$  0.5 pts

Q4)  $\vec{OB} \cdot \vec{n}_1 = R \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1 + L \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = R + L \cos(\varphi)$  1 pts

Q5)  $\vec{n}_2 \wedge \vec{n}_0 = (\cos(\varphi) \vec{n}_1 - \sin(\varphi) \vec{z}_1) \wedge \vec{n}_0 = \cos(\varphi) \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_0 - \sin(\varphi) \vec{z}_1 \wedge \vec{n}_0$

$\vec{n}_2$  et  $\vec{n}_0$  n'ont pas de figure de projection commune

on passe par  $B_1$  !

$= -\cos(\varphi) \sin(\theta) \vec{z}_0 - \sin(\varphi) \vec{y}_0$  1 pts  
 (Note:  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$  and the term is labeled "sens indirect de  $\vec{n}_1$  à  $\vec{n}_0$ ")

Rq: Pour ceux ayant choisi d'exprimer  $\vec{z}_0$  dans  $B_1$ , une autre expression, tout aussi juste est:

$$\vec{n}_2 \wedge \vec{n}_0 = -\cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{y}_1 - \sin(\theta) \vec{z}_2$$

Q6)  $\theta$  est l'angle de rotation, de  $B_1$  par rapport à  $B_0$ , autour de  $\vec{z}_0 \Rightarrow \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \vec{z}_0$  0.25 pts

$\varphi$  est l'angle de rotation, de  $B_2$  par rapport à  $B_1$ , autour de  $\vec{y}_1 \Rightarrow \vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\varphi} \vec{y}_1$  0.25 pts

$\Rightarrow$  Par composition des vitesses :  $\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\varphi} \vec{y}_1 + \dot{\theta} \vec{z}_0$  0.5 pts

97) Par composition des vitesses :  $\vec{V}_{BE210} = \vec{V}_{BE211} + \vec{V}_{BE110}$

Avec la formule de Varignon :  $\vec{V}_{BE211} = \vec{V}_{AE211} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{211}$  0.33 pts

$$= \vec{0} - \vec{n}_2 + \dot{\varphi} \vec{y}_2$$

$$= -L \dot{\varphi} \vec{z}_2$$
 0.33 pts

et  $\vec{V}_{BE110} = \vec{V}_{OE110} + \vec{BO} \wedge \vec{\Omega}_{110}$

on choisit toujours un point de l'axe de rotation

$$= \vec{0} - (L \vec{n}_2 + R \vec{n}_1) \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0$$

$$= L \dot{\theta} \cos(\varphi) \vec{y}_2 + R \dot{\theta} \vec{y}_1$$
 0.33 pts

$$\Rightarrow \vec{V}_{BE210} = R \dot{\theta} \vec{y}_1 + L \dot{\theta} \cos(\varphi) \vec{y}_2 - L \dot{\varphi} \vec{z}_2$$

98)  $\vec{\Gamma}_{BE210} = \frac{d\vec{V}_{BE210}}{dt} \Big|_{R_0} = R \frac{d\dot{\theta} \vec{y}_1}{dt} \Big|_{R_0} + L \frac{d\dot{\theta} \cos(\varphi) \vec{y}_2}{dt} \Big|_{R_0}$

0.33 pts

$$- L \frac{d\dot{\varphi} \vec{z}_2}{dt} \Big|_{R_0}$$
 0.33 pts

$$= R(\ddot{\theta} \vec{y}_1 - \dot{\theta}^2 \vec{n}_1) + L(\ddot{\theta} \cos(\varphi) \vec{y}_2 - \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\varphi) \vec{y}_2 - \dot{\theta}^2 \cos(\varphi) \vec{n}_1)$$

$$- L(\ddot{\varphi} \vec{z}_2 + \dot{\varphi}^2 \vec{n}_2 + \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\varphi) \vec{y}_2)$$

0.33 pts

$$= [-R \dot{\theta}^2 - L \dot{\theta}^2 \cos(\varphi)] \vec{n}_1$$

$\vec{y}_1 = \vec{y}_2$

$$- L \ddot{\varphi} \vec{z}_2 - L \dot{\varphi}^2 \vec{n}_2$$

on simplifie toujours l'expression  $\Rightarrow$  ne pas laisser le travail au correcteur !

$$+ [R \ddot{\theta} + L \ddot{\theta} \cos(\varphi) - 2L \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\varphi)] \vec{y}_1$$

$$\frac{d\vec{z}_2}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{d\vec{z}_2}{dt} \Big|_{R_2} + \vec{z}_2 \wedge \vec{\Omega}_{0/2}$$

$$= \vec{0} + \vec{z}_2 \wedge (-\dot{\varphi} \vec{y}_1 - \dot{\theta} \vec{z}_0)$$

$$= \dot{\varphi} \vec{n}_2 + \dot{\theta} \sin(\varphi) \vec{y}_2$$

0.125 pts

99) Pour  $\dot{\theta} = \omega = 200 \text{ tr/min}$  constante  $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0$  et  $\varphi = 90^\circ$  (lecture Figure 4)

$$\Rightarrow \|\vec{\Gamma}_{BE210}\| = \|-R\omega^2 \vec{n}_1 - L\omega^2 \cos(\varphi) \vec{n}_1\|$$

$$= \omega^2 (R + L \cos(\varphi)) \approx \left(\frac{200 \times 2\pi}{60}\right)^2 \times (15 + 10 \cos(\frac{9\pi}{180})) \times 10^{-2} \approx 109 \text{ m/s}^2$$

soit 11 g

Pour  $\omega = 10000 \text{ tr/min}$   $\varphi \approx 0^\circ \Rightarrow \|\vec{\Gamma}_{BE210}\| \approx 28000 \text{ g}$  0.125 pts

0.125 pts



# Exercice Bonus : Géométrie d'une imprimante 3D parallèle

## 1 Présentation du système et paramétrage cinématique

Une imprimante 3D est une machine permettant de fabriquer des pièces volumiques par ajout de matière, c'est à dire en déposant des fines couches successives de plastiques afin de former un objet.

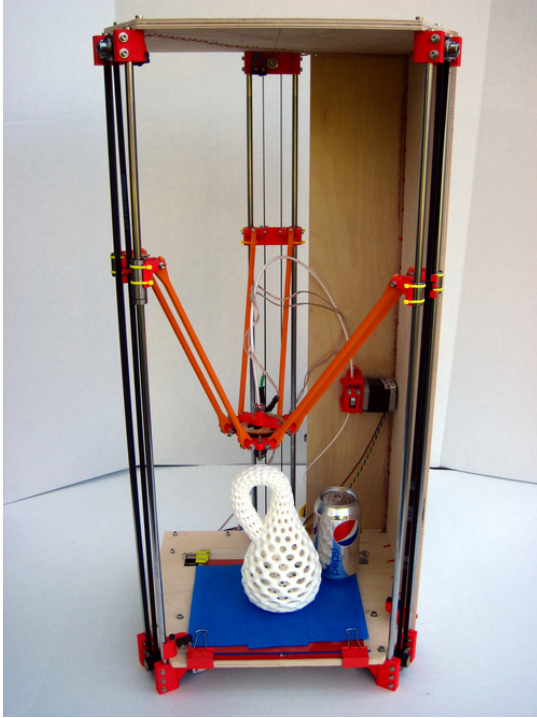


FIGURE 1 – Imprimante 3D parallèle

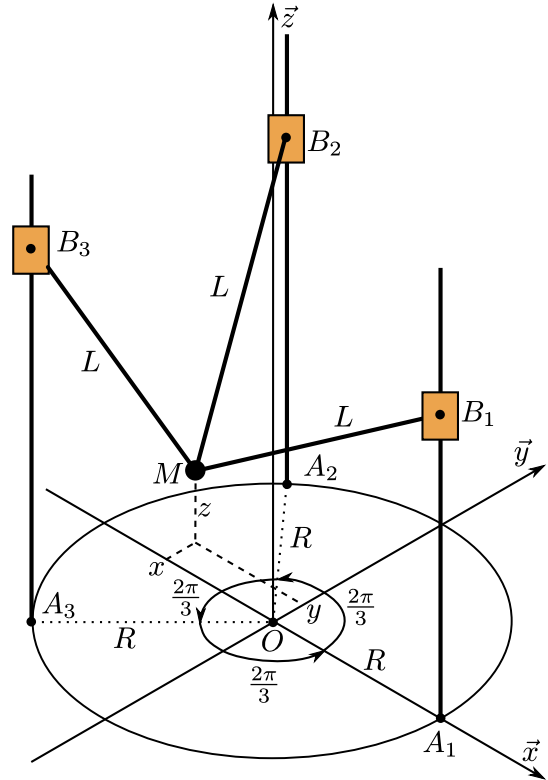


FIGURE 2 – Paramétrage de l'imprimante 3D

## 2 Détermination des lois de commandes des moteurs de l'imprimante 3D

Une imprimante 3D parallèle s'appuie sur une architecture à 3 barres rigides (cf FIGURE 2) de longueurs  $L$  commandées par 3 moteurs linéaires pour déplacer le centre de la tête d'impression  $M$ .

*L'objectif est ici de déterminer les lois de commande des 3 moteurs linéaires permettant de déplacer  $M$  à une position  $(x, y, z)$  précise de l'espace.*

Les déplacements des moteurs sont paramétrés par les longueurs  $\lambda_i(t)$  telles que  $\overrightarrow{A_i B_i} = \lambda_i(t) \vec{z}$ . Le repère fixe lié au bâti de l'imprimante 3D est noté  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

**Q 1.** Déterminer les coordonnées des points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  dans le repère  $R$ .

$$\text{Pour } k \in \{1, 2, 3\}, \quad \overrightarrow{OA_k} = \begin{pmatrix} R \cos\left(\frac{2\pi}{3}(k-1)\right) \\ R \sin\left(\frac{2\pi}{3}(k-1)\right) \\ 0 \end{pmatrix}_R$$

**Q 2.** Déterminer l'expression du vecteur  $\overrightarrow{MB_1}$ .

$$\overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1 B_1} = \begin{pmatrix} R - x(t) \\ -y(t) \\ \lambda_1(t) - z(t) \end{pmatrix}_R$$

**Q 3.** Sachant que la longueur  $\|\overrightarrow{MB_1}\|$  est égale à  $L$ , déterminer l'expression de  $\lambda_1$  en fonction de  $x, y, z$  et des caractéristiques de longueur de l'imprimante.

$$\|\overrightarrow{MB_1}\| = L = \sqrt{(R-x)^2 + y^2 + (\lambda_1 - z)^2} \iff L^2 - (R-x)^2 - y^2 = (\lambda_1 - z)^2$$

$$\iff \lambda_1(t) = z + \sqrt{L^2 - (R-x)^2 - y^2} \quad \text{où } \lambda_1 - z \geq 0 \quad \text{et} \quad L^2 - (R-x)^2 - y^2 \geq 0$$

**Q 4.** Par un raisonnement similaire, en déduire les expressions de  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ .

$$\lambda_2(t) = z + \sqrt{L^2 - \left(R \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - x\right)^2 - \left(R \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - y\right)^2} \quad \text{où } \lambda_2 \geq z \text{ et } L^2 - \left(R \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - x\right)^2 - \left(R \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - y\right)^2 \geq 0$$

$$\lambda_3(t) = z + \sqrt{L^2 - \left(R \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - x\right)^2 - \left(R \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) - y\right)^2} \quad \text{où } \lambda_3 \geq z \text{ et } L^2 - \left(R \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - x\right)^2 - \left(R \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) - y\right)^2 \geq 0$$

On rappelle qu'en coordonnées cartésiennes, un cercle de centre  $(x_c, y_c)$  et de rayon  $R$  est défini par l'ensemble de points :  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2\}$ .

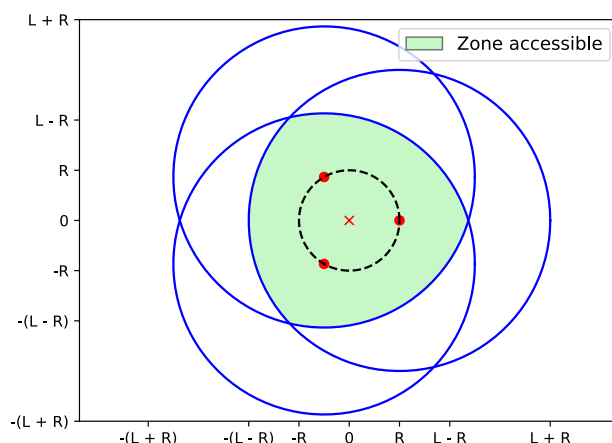
**Q 5.** En déduire la surface  $S$  théoriquement accessible par la tête d'impression pour une altitude  $z$  fixée. Représenter  $S$  dans le plan  $(x, y, 0)$ . Vous prendrez soin de préciser les points limites remarquables de cette surface.

À une altitude  $z(t)$  fixée, les « deuxièmes » inégalités se réécrivent, pour  $k \in \{1, 2, 3\}$  :

$$\left(x - R \cos\left(\frac{2\pi}{3}(k-1)\right)\right)^2 - \left(y - R \sin\left(\frac{2\pi}{3}(k-1)\right)\right)^2 \leq L^2$$

Ce qui correspond à l'intersection de trois cercles de centre  $A_k$  et de rayon  $L$ .

Les limites de cette surface  $S$  sont  $\pm(L - R)$  dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$



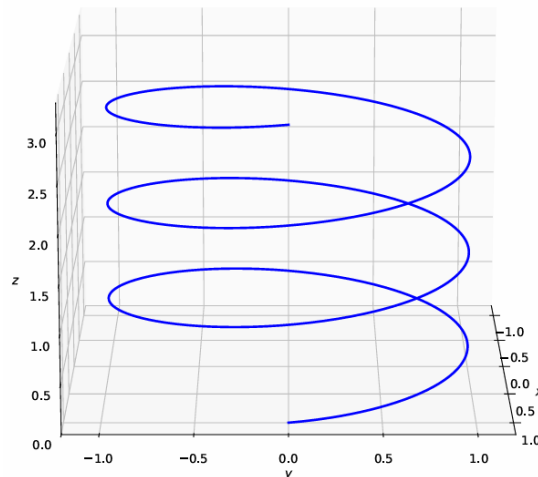
**Q 6.** En déduire une inégalité entre  $R$  et  $L$  afin que  $S$  ne soit pas réduite à l'origine  $O$  du repère.

On en déduit qu'il est nécessaire que  $L > R$  afin que  $S$  ne soit pas réduite au point  $O$ .

On veut imprimer une hélice de rayon  $r$  et de pas  $p$  tel que représentée ci-contre. Un pas  $p$  signifie que pour chaque tour effectué par l'hélice, celle-ci est montée de  $p$  mètre.

Pour cela, on utilise un paramétrage en coordonnées cylindrique de la position  $\overrightarrow{OM}$  de la tête d'impression, mieux adapté à la géométrie de l'hélice. Avec ce nouveau paramétrage, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(r, \theta) = r \cos(\theta) \\ y(r, \theta) = r \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta(t) = \omega t$$



À partir de la description faite de l'hélice, il apparaît clair que l'altitude  $z$  que devra prendre la tête d'impression lors de l'impression dépend aussi de l'angle  $\theta$ .



**Q 7.** Donner l'expression de  $z(\theta)$  puis en déduire l'expression  $\overrightarrow{OM}(t)$  lors de l'impression de l'hélice.

Pour un tour d'hélice ( $2\pi$  rad), l'hélice la tête d'impression monte de  $p$  mètres donc :  $z(\theta) = \frac{p\theta}{2\pi}$ , exprimée en mètre.

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \\ p\omega t/2\pi \end{pmatrix}_R$$

**Q 8.** En déduire la loi de commande en vitesse  $\dot{\lambda}_1(t)$  du moteur 1.

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) &= \dot{z} + \frac{d}{dt} \sqrt{L^2 - (R-x)^2 - y^2} = \frac{p\omega}{2\pi} + \frac{d}{dt} \sqrt{L^2 - (R-r\cos(\omega t))^2 - (r\sin(\omega t))^2} \\ \Rightarrow \dot{\lambda}_1(t) &= \frac{p\omega}{2\pi} - \frac{Rr\omega \sin(\omega t)}{\sqrt{L^2 - (R^2 - r^2 - 2Rr\cos(\omega t))}} \end{aligned}$$

Une contrainte « physique » de l'imprimante impose que la plus grande hélice imprimable est de rayon  $r = R$ . En effet, on ne peut pas passer au travers des barres rigides formant les axes de translation des moteurs.

**Q 9.** Montrer alors que l'expression de la loi de commande en vitesse se simplifie en  $\dot{\lambda}_1(t) = \frac{p\omega}{2\pi} - \frac{R^2\omega \sin(\omega t)}{\sqrt{L^2 - 2R^2(1 - \cos(\omega t))}}$

En remplaçant  $r$  par  $R$ , on obtient la formule demandée.

**Q 10.** Justifier brièvement que, pour pouvoir imprimer cette hélice, il est nécessaire que  $L \geq 2R$ .

Les limites de la surface  $S$  étant  $\pm(L - R)$ , il est nécessaire que  $L - R \geq R \Leftrightarrow L \geq 2R$  afin de pouvoir imprimer une hélice de rayon  $R$ .

L'imprimante utilisée a une hauteur  $H = 1$  m et un rayon  $R = 15$  cm. De plus, le CdCf impose une vitesse maximale de translation des moteurs de 1 mm/s. On fournit (cf FIGURE 3 et 4) les tracés des lois de commandes en position et la vitesse maximale associée des moteurs tels qu'ils ont été déterminés analytiquement aux questions précédentes.

L'objectif « industriel » recherché est de pouvoir imprimer des hélices d'une hauteur  $h_{\max} = 30$  cm et de pas  $p = 10$  cm à la chaîne le plus rapidement possible.

**Q 11.** Par lecture graphique des tracés fournis, donner la longueur  $L_{\max}$  des bras permettant d'imprimer les hélices. En déduire la valeur numérique du ratio  $\frac{L_{\max}}{2R}$  pour l'imprimante utilisée.

Les moteurs ne peuvent pas « aller plus haut » que la hauteur  $H = 1$  m de l'imprimante. Par lecture de la FIGURE 3, pour imprimer l'hélice souhaitée,  $\frac{\lambda_{\max}}{L_{\max}} \approx 1.65 \Rightarrow L_{\max} = \frac{H}{1.65} \approx 60.6$  cm  $\Rightarrow \frac{L_{\max}}{2R} \approx 2$ .

**Q 12.** En déduire, pour ce ratio, le paramètre  $\omega_{\max}$  permettant d'imprimer à la chaîne les hélices le plus rapidement possible tout en respectant les contraintes du CdCf.

$$\text{D'après la FIGURE 4, pour ce ratio, } \frac{\left(\dot{\lambda}_{\max} - \frac{p\omega_{\max}}{2\pi}\right)}{\omega_{\max}R} \approx 0.25 \Rightarrow \omega_{\max} = \frac{\dot{\lambda}_{\max}}{\left(\frac{p}{2\pi} + 0.25R\right)} \approx 1.8 \times 10^{-2} \text{ rad/s.}$$

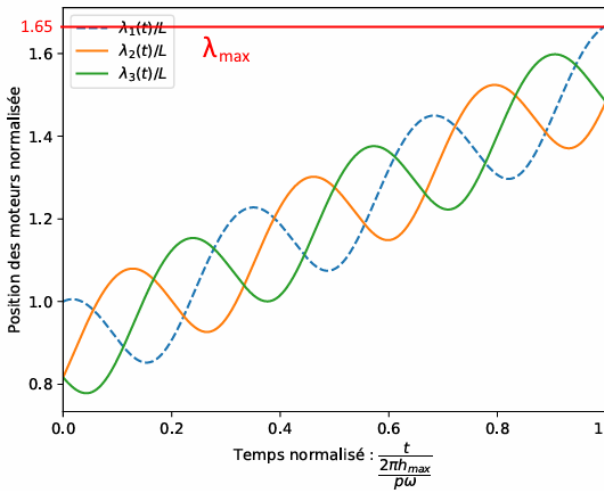


FIGURE 3 – Loi de commande en position des moteurs

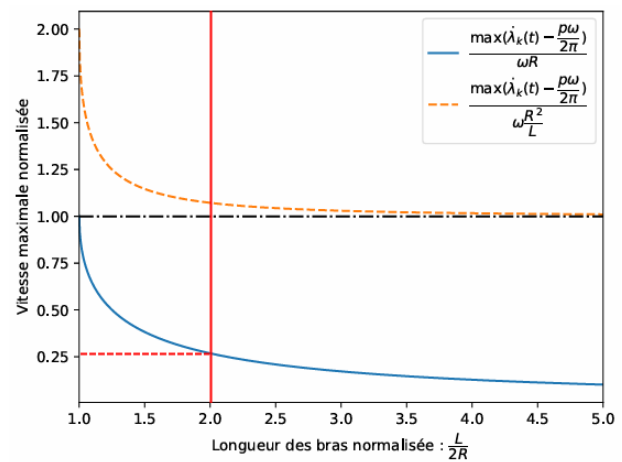


FIGURE 4 – Vitesse maximale des moteurs

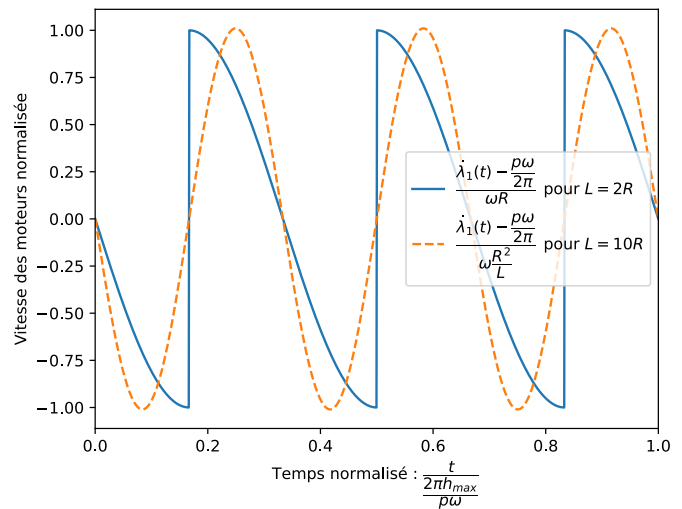
**Q 13.** En déduire combien de temps mettra l'imprimante à réaliser une des hélices souhaitées.

$$\frac{h_{\max}}{p} = 3 \text{ tours } (2\pi \text{ rad}) \text{ pour imprimer une hélice à une vitesse } \omega_{\max}. \text{ Il faudra donc } \frac{6\pi}{\omega_{\max}} = 1047 \text{ s} \approx 17 \text{ min } 30 \text{ s.}$$

On se propose dans un dernier temps de comprendre pourquoi il est préférable d'aller « un peu moins vite » en choisissant  $\omega_{\max}$  défini précédemment pour  $L_{\max}$  plutôt que d'être « un peu plus rapide » en choisissant une longueur de bras minimale  $L_{\min} = 2R$ .

**Q 14.** En analysant la figure ci-contre décrivant l'évolution de la vitesse du moteur 1 pour différentes valeurs de ratio  $\frac{L}{R}$ , justifier brièvement pourquoi il est préférable d'avoir un ratio  $\frac{L}{R}$  grand, quitte à avoir une vitesse d'impression un peu plus faible.

Indication : Que vaut la valeur théorique de l'effort nécessaire, appliqué au niveau du moteur, afin de faire varier sa vitesse de manière discontinue ? En pratique, qu'est-ce cela risque d'impliquer en terme d'usure mécanique, voire de rupture, des pièces qui composent la motorisation de l'imprimante ?



D'après la FIGURE 4, on remarque que, plus le ratio  $\frac{L}{R}$  augmente, avec pour valeur minimale  $L = 2R$ , plus la vitesse d'impression  $\omega_{\max}$  diminue.

Cependant pour  $L = 2R$ , on voit que la vitesse des moteurs est **discontinue** ! Or une vitesse discontinue implique théoriquement une force infinie s'appliquant sur les pièces composant la motorisation de l'imprimante, pouvant détériorer voire causer la rupture de l'imprimante.

En effet, la dérivée d'une fonction discontinue tend théoriquement vers  $\pm\infty$  au niveau des discontinuités. Or d'après le PFD,  $ma(t) = m \frac{dv(t)}{dt} = \sum F_{ext}(t)$

Il est donc préférable d'avoir un ratio  $\frac{L}{R}$  plus élevé, quitte à imprimer un peu plus lentement, afin de respecter la contrainte de continuité des vitesses des moteurs. On voit, en effet, que pour  $L = 10R$ ,  $\dot{\lambda}_k(t)$  est continue. On peut donc trouver un « juste milieu » pour les dimensions de l'imprimante.