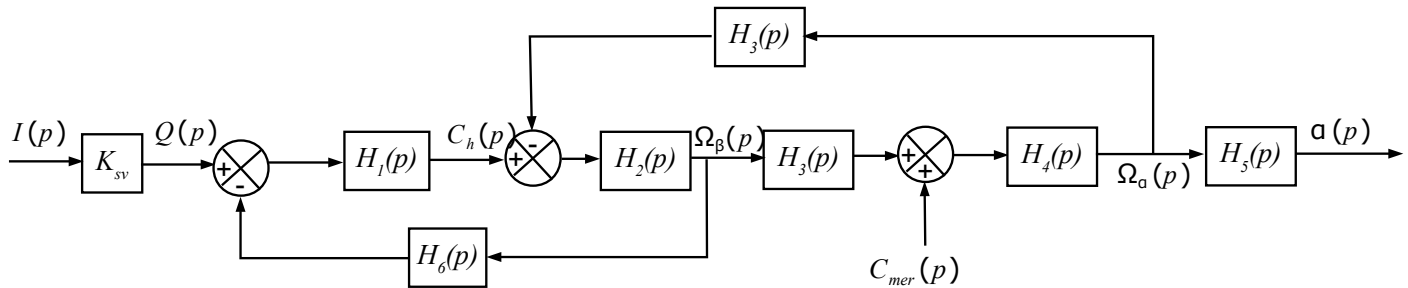
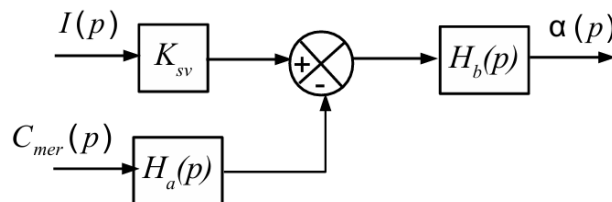


Partie I - Stabilisateur gyroscopique de bateau

On rappelle qu'en passant les équations différentielles linéarisées modélisant le comportement du système, on aboutit au schéma-blocs suivant :

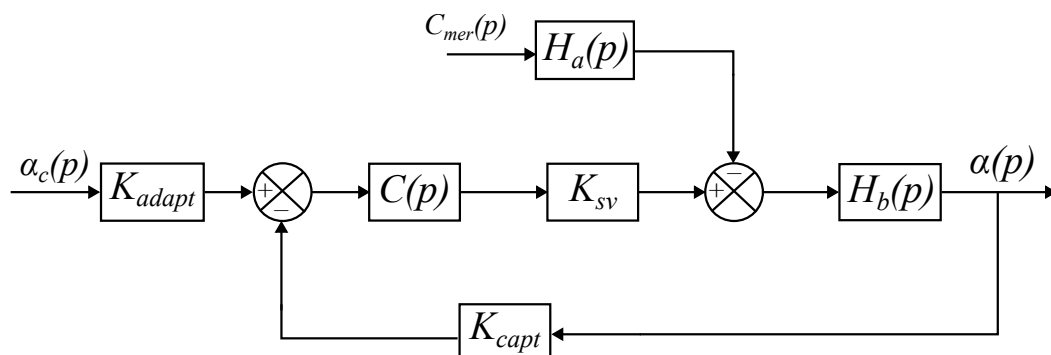


Q 1. Montrer que ce schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante où l'on précisera l'expression de $H_a(p)$ et $H_b(p)$ en fonction de $H_1(p)$ à $H_6(p)$ uniquement.



On réalise un asservissement en mesurant l'angle $\alpha(t)$ du bateau à l'aide d'une centrale inertielle de gain $K_{capt} = 1$. La consigne d'angle est convertie en tension par un convertisseur angle-tension de gain K_{adapt} . L'écart $\varepsilon(t)$ entre la consigne d'angle convertie $u_c(t)$ et la mesure de l'angle $u_\alpha(t)$ est corrigé par un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ qui délivre le courant de commande $i(t)$ du servo-distributeur.

On aboutit alors au schéma-blocs de l'asservissement suivant, où $K_{capt} = K_{adapt}$ afin d'avoir un « bon » asservissement :



Les performances attendues de l'asservissement sont les suivantes :

Performances	Niveaux
Stabilité	Marge de phase = 60° Marge de gain $> 0dB$
Précision	Erreur statique (régime stationnaire) $\leq 5\%$ pour une consigne α_c en échelon
Rapidité	Temps de réponse à $5\% < 5\text{ s}$ Bande passante à $0dB$ de la FTBO : $]0 ; \omega_{0dB} = 10\text{ rad.s}^{-1}]$
Amortissement	Premier dépassement $D_1(\%) < 20\%$

1 Optimisation des performances de l'asservissement

Une étude temporelle montre qu'un correcteur proportionnel $C(p) = K_p$ ne permet pas d'atteindre des performances conformes aux valeurs définies par le cahier des charges.

On choisit alors d'utiliser un correcteur proportionnel à avance de phase de la forme : $C(p) = K_p \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$ avec $a > 1$.

Le réglage de ce correcteur doit permettre de respecter simultanément le critère de rapidité ($\omega_{0dB} = 10 \text{ rad/s}$) et une marge de phase de 60° .

Pour ce type de correcteur, on peut montrer que pour la pulsation $\omega_{max} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$, on obtient une phase maximale

$$\phi_{max} = \arg(C(j\omega_{max})) \text{ tel que } \sin(\phi_{max}) = \frac{a-1}{a+1}.$$

Q 2. Justifier que la FTBO de cet asservissement est $H_{BO}(p) = K_{adapt}C(p)K_{sv}H_b(p)$.

On donne sur le DR les diagrammes de Bode asymptotiques et réels (allures) de ce correcteur $C(p)$ ainsi que les diagrammes de Bode de la fonction de transfert $K_{adapt}K_{sv}H_b(p)$.

On rappelle que la marge de phase d'un système asservi vaut : $M_\varphi = \varphi(\omega_{0dB}) + 180^\circ$ où ω_{0dB} est la pulsation pour laquelle la FTBO a un gain de 0 dB.

Q 3. Déterminer la valeur de ϕ_{max} permettant de respecter la marge de phase sachant que la pulsation de coupure à 0dB, ω_{0dB} , souhaitée de la FTBO est de 10 rad/s.

Q 4. Donner les expressions littérales de a et τ en fonction de ϕ_{max} et ω_{0dB} .

Q 5. En vous aidant du diagramme de Bode de $C(p)$, en déduire la relation entre a et K_p définissant la valeur de K_p qui permet effectivement d'atteindre une pulsation de coupure à 0dB souhaitée de la FTBO.

Q 6. Quelle est la marge de gain du système ainsi corrigé ?

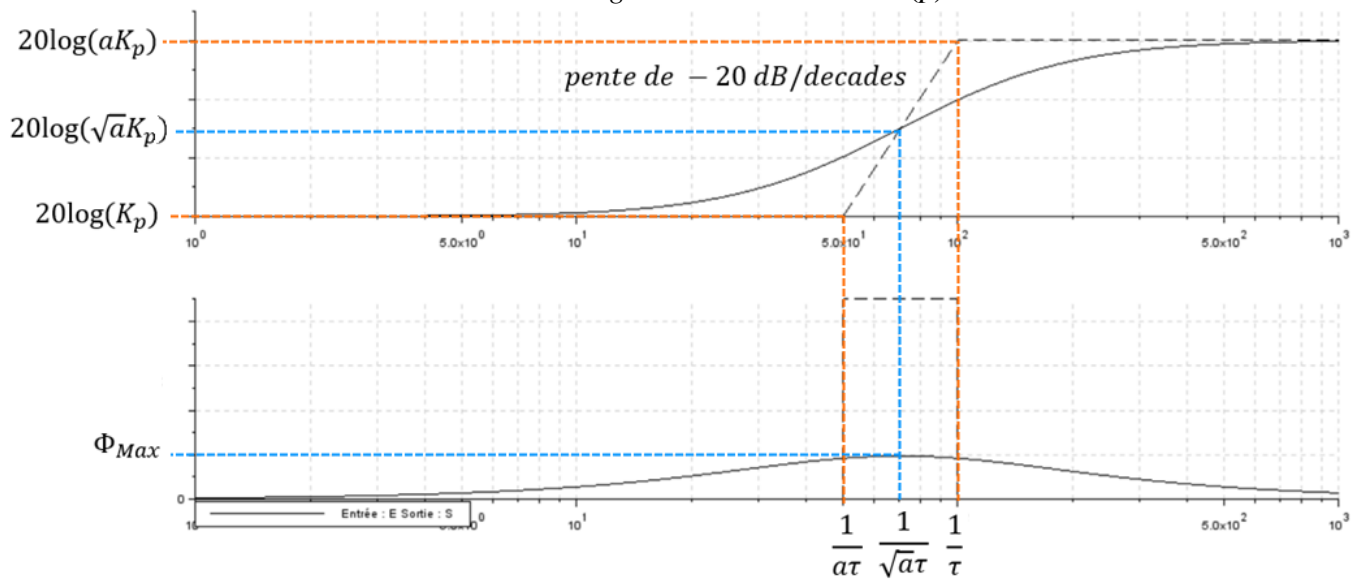
On peut donc maintenant considérer que le correcteur a été entièrement identifié afin d'atteindre les performances souhaitées au regard du cahier des charges fonctionnel.

— d'après Mines-Ponts 2022 —

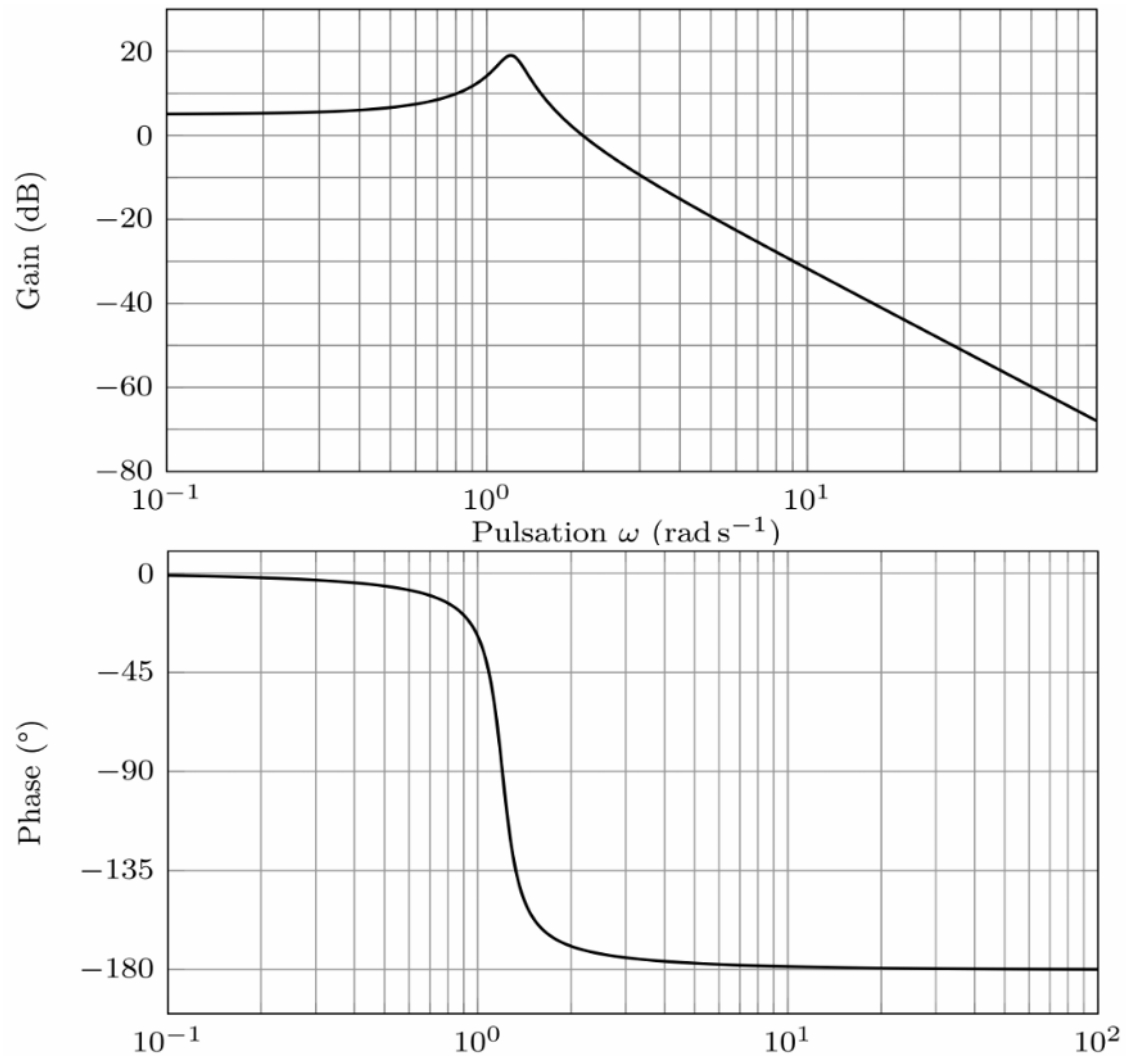
Stabilisateur gyroscopique de bateau - Document Réponses (DR)

Question 3 :

Allure des diagrammes de Bode de $C(p)$

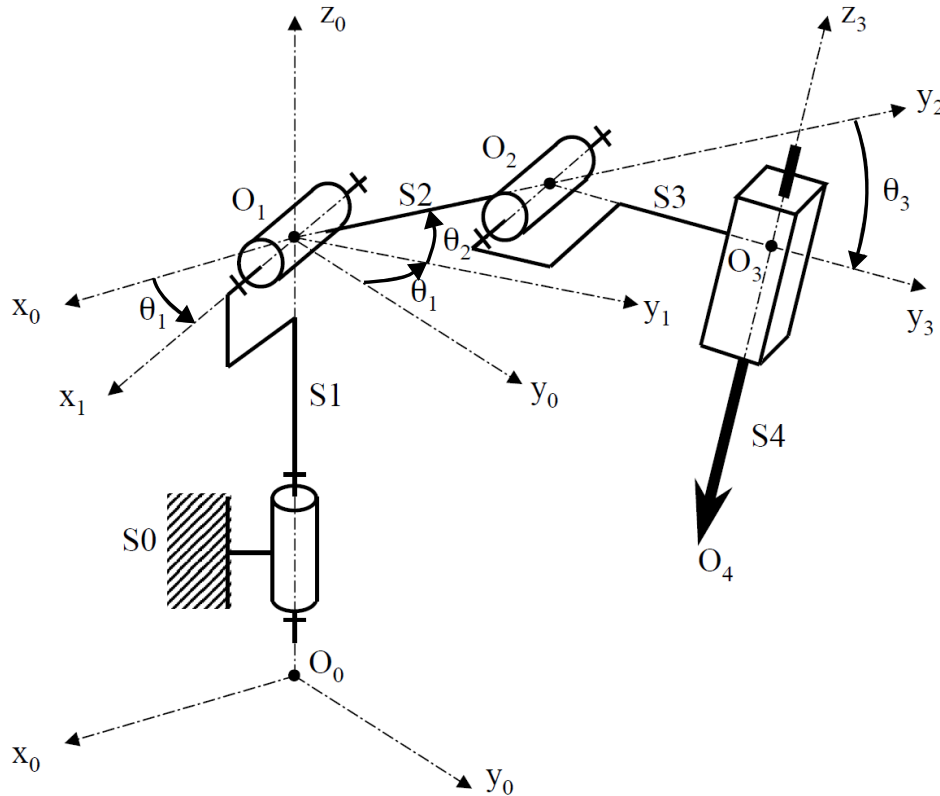


Diagrammes de Bode de $K_{capt}K_{sv}H_b(p)$



Partie II - Modélisation cinématique d'un robot de soudure

L'étude porte sur un robot de soudure constitué de quatre segments de type RRRT, où R désigne un mouvement relatif de type « rotation » entre deux segments consécutifs et T désigne un mouvement relatif de type « translation ». Le schéma cinématique (modélisation cinématique) du robot de soudure est donné ci-contre :



1 Paramétrage cinématique du robot

- Le solide S_0 , appelé base, est fixé au sol de l'atelier. Soit $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à la base.
- Le solide S_1 , appelé fût, est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe (O_0, \vec{z}_0) par rapport à la base S_0 . Ce mouvement de rotation est assuré par un moteur M_1 non représenté. Soit $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié au fût. On pose $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et $\vec{O_0O_1} = L_0 \vec{z}_0$ avec $L_0 = 50$ cm.
- Le solide S_2 , appelé bras, est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe (O_1, \vec{x}_1) par rapport au fût S_1 . Ce mouvement de rotation est assuré par un moteur M_2 non représenté. Soit $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié au bras. On pose $\theta_2 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$ et $\vec{O_1O_2} = L_1 \vec{y}_2$ avec $L_1 = 70$ cm.
- Le solide S_3 , appelé avant-bras, est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe (O_2, \vec{x}_2) par rapport au bras S_2 . Ce mouvement de rotation est assuré par un moteur M_3 non représenté. Soit $R_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ un repère lié à l'avant-bras. On pose $\theta_3 = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ et $\vec{O_2O_3} = L_2 \vec{y}_3$ avec $L_2 = 60$ cm.
- Le solide S_4 , appelé organe terminal, est animé d'un mouvement de translation suivant la direction \vec{z}_3 par rapport à l'avant-bras S_3 . Ce mouvement de translation est assuré par un vérin linéaire V_4 non représenté. Soit $R_4(O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ un repère lié à l'organe terminal. On pose $\vec{O_4O_3} = \lambda(t) \vec{z}_3$.
- Les mouvements du robot sont étudiés dans le repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié à la base et supposé galiléen. L'axe (O_0, \vec{z}_0) est vertical ascendant.

2 Caractéristique de la motorisation et Cahier des charges fonctionnel

- **Cahier des charges** : Un cordon de soudure ne doit pas être réalisé à une vitesse supérieure à 5 cm/s.
- **Caractéristiques du vérin** : Vitesse maximale de 0.1 m/s et accélération maximale de 1 m/s².
- **Caractéristiques des moteurs (après réductions)** : Vitesse maximale de 0.03 rad/s et accélération maximale de 1 rad/s².

3 Étude cinématique du robot de soudure

Dans cette partie, on s'intéresse à la caractérisation de la position de l'organe terminal en fonction des variables articulaires $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \lambda)$ et à la commande qu'il faut appliquer à chacun de ces axes afin de réaliser une trajectoire donnée.

Q 7. Dessiner les figures de projections planes relatives aux trois rotations $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

Q 8. Quel est le mouvement de S_4 par rapport à S_3 ? En déduire la trajectoire $T_{O_4 \in S_4 / S_3}$ pour un intervalle de temps fini donné.

Q 9. En utilisant la définition (dérivation du vecteur position), déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{O_4 \in S_4 / S_3}}$.

Q 10. Quel est le mouvement de S_3 par rapport à S_2 ?

Q 11. Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{O_3 \in S_3 / S_2}}$.

Q 12. Par la formule de changement de point, en déduire le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{O_4 \in S_3 / S_2}}$. Puis, par composition des vitesses, en déduire le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{O_4 \in S_4 / S_2}}$.

Q 13. Par la méthode de votre choix, déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{O_4 \in S_4 / S_0}}$ en fonction des vitesses angulaires $\dot{\theta}_k$, de la vitesse de translation $\dot{\lambda}$ et des paramètres géométriques L_k .

On souhaite réaliser un cordon de soudure d'axe $(O_0, \overrightarrow{y_0})$. Pour réaliser ce cordon de soudure, il est nécessaire que $\overrightarrow{V_{O_4 \in S_4 / S_0}} = V \overrightarrow{y_0}$ et que l'angle $\alpha = (\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_3})$ soit constant.

Q 14. En observant les figures de projections planes, donner une relation liant les paramètres angulaires θ_2 et θ_3 en fonction de l'angle α . En déduire une relation entre les vitesses angulaires $\dot{\theta}_2$ et $\dot{\theta}_3$.

Q 15. En observant le schéma cinématique, donner, vis-à-vis de la direction du cordon à réaliser une condition sur le paramètre angulaire θ_1 .

Q 16. Déduire des différentes conditions, une relation scalaire reliant $\dot{\theta}_2$ et $\dot{\lambda}$ à α et V .

Q 17. Pour $\alpha = 0$, déterminer l'expression analytique de la vitesse maximale V .

Q 18. Faites l'application numérique et concluez quant au cahier des charges.