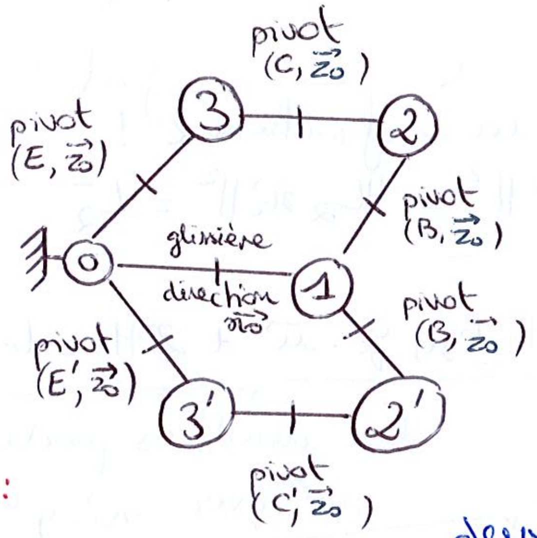
TD 8 : Loi entrée - sortie des mécanismes

Exercice 1 : Pince Schrader

Q1)



→ 2 chaînes fermées distinctes :

{0 - 1 - 2 - 3 - 0}

et {0 - 1 - 2' - 3' - 0}

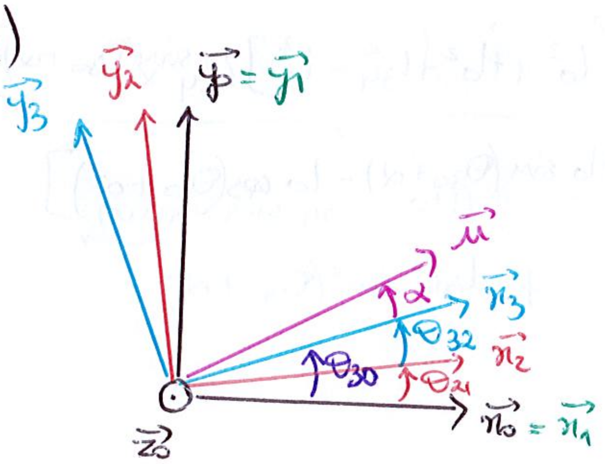
⇒ En théorie, on peut réaliser deux fermetures géométriques différentes

Mais, avec la symétrie de la pince, les deux vont aboutir à des équations équivalentes ⇒ une seule fermeture suffit en remarquant que : $\theta_{21} = -\theta'_{21}$, $\alpha = -\alpha'$, etc...

Remarque :

↳ la "grande" chaîne fermée {0 - 3 - 2 - 1 - 2' - 3' - 0} n'est que la "somme" des deux petites ⇒ elles ne permet pas d'obtenir d'équations supplémentaires.

Q2)



↳ Tjs tracer la figure de projection plane cela aide grandement !

↳ fermeture géométrique dans la chaîne {0 - 1 - 2 - 3 - 0}

↳ juste écrire la relation de Chasles en passant par les centres géométriques des liaisons pivots !

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CE} + \vec{EF} + \vec{FA} = \vec{0}$$

α est connu !
alors que θ_{32} est un paramètre intermédiaire à supprimer ⇒ mieux sà que $\vec{CD} + \vec{DE}$

$$\iff \lambda_{10}\vec{x_0} + L_2\vec{x_2} + L_{34}\vec{u} - H_0\vec{y_0} - L_0\vec{x_0} = \vec{0}$$

Méthode 1

↳ la + efficace lorsque qu'il y a max 3 termes

↳ seul vecteur qui fait intervenir un paramètre intermédiaire : θ_{21}

↳ on l'isole puis on fait : "carré scalaire"

↳ ce n'est pas le cas ici ⇒ cf méthode 2 !

$$\iff \|\underbrace{(\lambda_{10}-L_0)\vec{x_0} - H_0\vec{y_0} + L_{34}\vec{u}}\|^2 = \|L_2\vec{x_2}\|^2 = L_2^2$$

$$\underbrace{\underbrace{(\lambda_{10}-L_0)^2 + H_0^2 + L_{34}^2}_{\text{les carrés}} - \underbrace{2H_0L_{34}\,\vec{y_0}\cdot\vec{u} + 2(\lambda_{10}-L_0)L_{34}\,\vec{x_0}\cdot\vec{u}}_{\text{les doubles produits}}}_{(\text{avec } \vec{x_0}\cdot\vec{y_0}=0)}$$

$$\underbrace{(\lambda_{10}-L_0)^2 + H_0^2 + L_{34}^2 - 2H_0L_{34}\sin(\theta_{30}+\alpha) + 2(\lambda_{10}-L_0)L_{34}\cos(\theta_{30}+\alpha)}_{\text{équation du 2nd degré en } \lambda_{10}-L_0}$$

$$\iff (\lambda_{10}-L_0)^2 + 2(\lambda_{10}-L_0)L_{34}\cos(\theta_{30}+\alpha) + H_0^2 + L_{34}^2 - L_2^2 - 2H_0L_{34}\sin(\theta_{30}+\alpha) = 0$$

On pose $\Delta = 4L_{34}^2\cos^2(\theta_{30}+\alpha) - 4\left[\underbrace{H_0^2 + L_{34}^2 - L_2^2 - 2H_0L_{34}\sin(\theta_{30}+\alpha)}\right]$

$$= 4\left[L_2^2 - (H_0 - L_{34}\sin(\theta_{30}+\alpha))^2\right]$$

$= -L_2^2 + (H_0 - L_{34}\sin(\theta_{30}+\alpha))^2 + L_{34}^2\cos^2(\theta_{30}+\alpha)$

>0 si L_2 suffisamment grand

$$\implies \underbrace{\lambda_{10} - L_0}_{<0 \text{ dans le mécanisme}} = -L_{34}\cos(\theta_{30}+\alpha) \pm \sqrt{L_2^2 - (H_0 - L_{34}\sin(\theta_{30}+\alpha))^2}$$

on garde le signe "−"

Finalement, $\lambda_{10} = L_0 - L_{34}\cos(\theta_{30}+\alpha) - \sqrt{L_2^2 - (H_0 - L_{34}\sin(\theta_{30}+\alpha))^2}$

Méthode 2 (2)

lorsqu'il y a plus de 3 termes, mieux vaut faire le classique " projection sur B_0 et utiliser $\cos^2 + \sin^2 = 1$ "

$/\vec{x_0}$: $\lambda_{10} + L_2 \cos(\theta_{21}) + L_{34}\cos(\theta_{30}+\alpha) - L_0 = 0$

$/\vec{y_0}$: $L_2 \sin(\theta_{21}) + L_{34}\sin(\theta_{30}+\alpha) - H_0 = 0$

↳ En isolant les termes en θ_{21} et en mettant aux carrés

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\lambda_{10} - L_0 + L_{34}\cos(\theta_{30}+\alpha)\right]^2 = L_2^2 \cos^2(\theta_{21}) \\ \left[L_{34}\sin(\theta_{30}+\alpha) - H_0\right]^2 = L_2^2 \sin^2(\theta_{21}) \end{cases}$$

on retrouve la CN : " L_2 suffisament grand "

$$\Rightarrow \left[\lambda_{10} - L_0 + L_{34}\cos(\theta_{30}+\alpha)\right]^2 = L_2^2 - \left[L_{34}\sin(\theta_{30}+\alpha) - H_0\right]^2 \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{10} - L_0 + L_{34}\cos(\theta_{30}+\alpha) = \pm\sqrt{L_2^2 - \left[L_{34}\sin(\theta_{30}+\alpha) - H_0\right]^2}$$

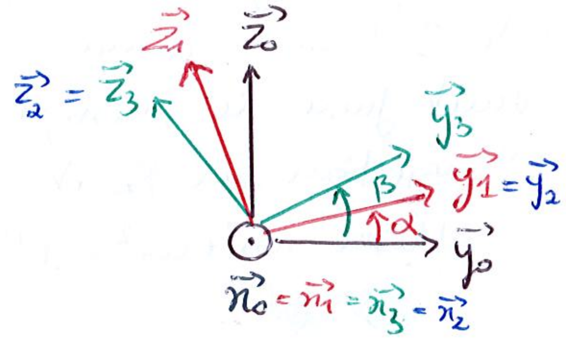
Comme précédemment, on choisit le signe en fonction de la configuration du mécanisme : ici $\lambda_{10} - L_0 < 0$

$\Rightarrow$ on garde le signe " $-$ "

↳ On retrouve : $\lambda_{10} = L_0 - L_{34}\cos(\theta_{30}+\alpha) - \sqrt{\Delta}$

Exercice 2 : Joint de Oldham

Q1) $\mathcal{V}_{1/0} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}\,\vec{x_0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O$ $\quad \mathcal{V}_{2/1} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda}_{21}\,\vec{y_2} \end{matrix} \right\}_I$



$\mathcal{V}_{3/0} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\beta}\,\vec{x_0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$ $\quad \mathcal{V}_{3/2} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda}_{32}\,\vec{z_2} \end{matrix} \right\}_P$

valable sur l'axe de rotation $(A, \vec{x_0})$ du mvt 3/0

↳ valable en tout point car 3/2 = translat°

Q2) Fermeture cinématique dans la chaîne fermée {0-1-2-3-0} :

$$\mathcal{V}_{3/0} = \mathcal{V}_{3/2} + \mathcal{V}_{2/1} + \mathcal{V}_{1/0}$$ que l'on exprime au point O

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \dot{\beta}\,\vec{x_0} \\ \vec{V}_{O\in 3/0} \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda}_{32}\,\vec{z_2} \end{matrix} \right\}_O + \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda}_{21}\,\vec{y_2} \end{matrix} \right\}_O + \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}\,\vec{x_0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O$$

On obtient directement : $\dot{\beta} = \dot{\alpha}$ en égalisant les vecteur vitesse de rotation

Q3) Cette transmission est homocinétique !

Q4) En utilisant l'égalité des vecteurs vitesses :

$$d\,\dot{\alpha}\,\vec{y_0} = \dot{\lambda}_{32}\,\vec{z_2} + \dot{\lambda}_{21}\,\vec{y_2} \qquad \text{car } \dot{\beta} = \dot{\alpha}$$

Par projection sur $\vec{y_2}$: $\Rightarrow d\,\dot{\alpha}\cos(\alpha) = \dot{\lambda}_{21}$

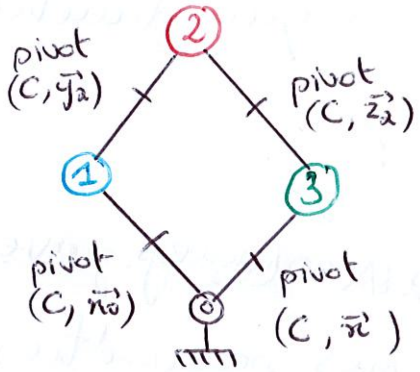
↳ permet de supprimer $\dot{\lambda}_{32}$ de l'équation

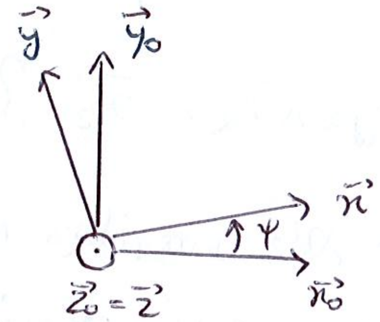
mvt 2/3 = opposé du mvt 3/2

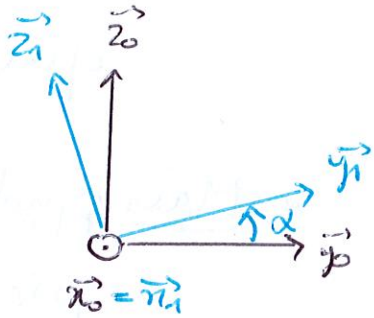
Q5) Par projection sur $\vec{z_2}$: $\Rightarrow -d\,\dot{\beta}\sin(\beta) = \dot{\lambda}_{32} \Rightarrow \dot{\lambda}_{23} = d\,\dot{\beta}\sin(\beta)$

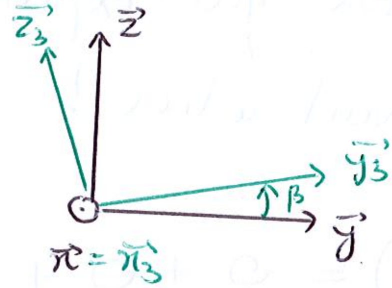
Exercice 3 : Joint de Cardan

Q1)









→ Tjs 1ere étape :
⇒ tracer figures projections, ça aidera pour la suite

Q2) $\mathcal{V}_{3/2} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}_{32}\,\vec{z_2} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C$ et $\mathcal{V}_{2/1} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}_{21}\,\vec{y_2} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C$

$$\Longrightarrow \mathcal{V}_{3/1} = \mathcal{V}_{3/2} + \mathcal{V}_{2/1} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ \dot{\alpha}_{21} & 0 \\ \dot{\alpha}_{32} & 0 \end{matrix} \right\}_{C\,(\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})}$$

On reconnait une liaison équivalente sphérique à doigt de centre C bloquée en $\vec{x_2}$

Remarque : "bloquée en $\vec{x_2}$ et de centre C" et de doigt d'axe $(C,\vec{y_2})$ et de normale $\vec{z_2}$

↳ indique autour de qui on ne tourne pas.

↳ indique autour de qui on peut tourner.

sont des caractérisations équivalentes ! (juste avec un pt de vue ≠ : ddl vs. contrainte)

Q3) Par composition des vitesses de rotations :

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}$$

→ revient ici à une fermeture cinématique des vecteurs vitesses de rotation dans la chaîne fermée $\{0-3-2-1-0\}$

$$\Longleftrightarrow \dot{\beta}\,\vec{x} = \dot{\alpha}_{32}\,\vec{z_2} + \dot{\alpha}_{21}\,\vec{y_2} + \dot{\alpha}\,\vec{x_0}$$

inconnues

paramètres que l'on veut relier ensemble !

$\Longrightarrow$ Il faut donc projetter sur un vecteur orthogonal à $\vec{y_2}$ et $\vec{z_2}$ $\Longrightarrow$ qui d'autre que $\vec{y_2} \wedge \vec{z_2} = \vec{y_1} \wedge \vec{z_3}$?

↳ Permet de revenir au sein des figures de projection qui expriment nos paramètres que l'on veut relier !

$$\Longrightarrow \dot{\beta}\, \vec{x} \cdot (\vec{y_1} \wedge \vec{z_3}) = 0 + 0 + \dot{\alpha}\, \vec{x_0} \cdot (\vec{y_1} \wedge \vec{z_3})$$

↳ Un "classique" : la loi ES s'exprime comme une égalité entre produit mixte !

Par invariance du produit mixe par permutation circulaire :

$$\Longrightarrow \dot{\beta}\, \vec{y_1} \cdot (\vec{z_3} \wedge \vec{x}) = \dot{\alpha}\, \vec{z_3} \cdot (\vec{x_0} \wedge \vec{y_1})$$

$$\Longleftrightarrow \dot{\beta}\, \vec{y_1} \cdot \vec{y_3} = \dot{\alpha}\, \vec{z_3} \cdot \vec{z_1} \quad \text{car } \vec{x_0} = \vec{x_1}$$

c'est là où avoir tracé les figures de projections aident beaucoup !

$$\Longleftrightarrow \dot{\beta} \begin{vmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{vmatrix}_{B_0} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{vmatrix}_{B} = \dot{\alpha} \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{vmatrix}_{B} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{vmatrix}_{B_0}$$

$$\Longleftrightarrow \dot{\beta} \left[\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\psi) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \right] = \dot{\alpha} \left[\sin(\beta)\sin(\alpha)\cos(\psi) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \right]$$

Q4) En réécrivant cette relation en groupant les termes en $\cos(\psi)$

$$\Longleftrightarrow \cos(\psi) \Big[\underbrace{\dot{\beta}\cos(\beta)\cos(\alpha) - \dot{\alpha}\sin(\alpha)\sin(\beta)}_{(\sin(\beta)\cos(\alpha))'} \Big] = \underbrace{\dot{\alpha}\cos(\alpha)\cos(\beta) - \dot{\beta}\sin(\beta)\sin(\alpha)}_{(\sin(\alpha)\cos(\beta))'}$$

En intégrant avec cond. ini nulle $\Longrightarrow \cos(\psi)\sin(\beta)\cos(\alpha) = \sin(\alpha)\cos(\beta)$

$\Longrightarrow \tan(\beta)\cos(\psi) = \tan(\alpha)$ (*)

Remarque : On aurait pu obtenir beaucoup plus rapidement ces deux relations des Q4 et Q3 en remarquant que $\forall t \ \vec{y_1} \cdot \vec{z_3} = 0$ dû à la perpendicularité des axes du croisillon S_2.

$$\Longleftrightarrow \ \begin{vmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{vmatrix}_{B_0} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{vmatrix}_{B} = 0 \Longleftrightarrow -\cos(\alpha)\sin(\beta)\cos(\psi) + \sin(\alpha)\cos(\beta) = 0$$

puis en dérivant cette relation !

Q5) En dérivant (*) : $\dot\beta(1+\tan^2(\beta))\cos(\psi) = \dot\alpha / \cos^2(\alpha)$

$\to$ rappel : $\frac{d}{dt}\tan(x) = \dot x(1+\tan^2(x)) = \dot x / \cos^2(x)$

or $\tan(\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)}{\cos(\psi)}$ pour $\psi \neq \frac{\pi}{2}$

Mais sinon mécanisme ne tourne pas (*) $\Rightarrow \alpha = 0$

$$\Longrightarrow \dot\beta\,(\underset{-1}{\cos^2(\psi)} + \underset{+1}{\tan^2(\alpha)}) = \dot\alpha\,\frac{\cos(\psi)}{\cos^2(\alpha)}$$

$$\Longleftrightarrow \dot\beta\left(-\sin^2(\psi) + \frac{1}{\cos^2(\alpha)}\right) = \dot\alpha\,\frac{\cos(\psi)}{\cos^2(\alpha)}$$

$$\Longleftrightarrow \dot\beta = \dot\alpha\,\frac{\cos(\psi)}{1-\cos^2(\alpha)\sin^2(\psi)}$$

Q6) Sauf si $\psi = 0$ (Mais alors les axes sont alignés et le joint de Cardan ne sert à rien ...)

$\dfrac{\dot\beta}{\dot\alpha} \neq 1 \Longrightarrow$ transmission n'est pas homocinétique

Q7) En s'intéressant au 2e joint de cardan, on a : $\forall t \ \vec{y_5} \cdot \vec{z_3} = 0$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{vmatrix}_{B_0} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{vmatrix}_{B} = 0 \Longleftrightarrow -\cos(\theta)\sin(\beta)\cos(\psi) + \sin(\theta)\cos(\beta) = 0$$

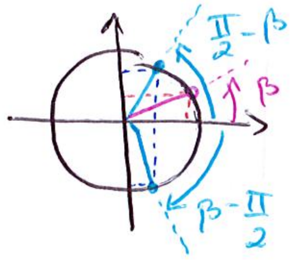
$$\Longleftrightarrow \tan(\beta)\cos(\psi) = \tan(\theta)$$

$$\Longrightarrow \tan(\alpha) = \tan(\beta)\cos(\psi) = \tan(\Theta) \quad \text{i.e.} \quad \alpha = \Theta$$

↳ cette transmission est homocinétique !

Q8) De même, pour le montage perpendiculaire : $\forall t \ \vec{z}_{3b} \cdot \vec{y}_{5b} = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ -\sin(\beta - \frac{\pi}{2}) \\ \cos(\beta - \frac{\pi}{2}) \end{vmatrix}_{B} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \cos(\delta) \\ \sin(\delta) \end{vmatrix}_{B_0} = 0$$



$$\Longleftrightarrow \cos(\beta)\cos(\delta)\cos(\psi) + \sin(\beta)\sin(\delta) = 0$$

$\Rightarrow \cos(\beta - \frac{\pi}{2}) = \sin(\beta)$

et $-\sin(\beta - \frac{\pi}{2}) = \cos(\beta)$

$$\Longleftrightarrow \cos(\psi) = -\tan(\beta)\tan(\delta)$$

$\Longrightarrow$ $\tan(\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)}{\cos(\psi)}$ du 1er joint

$$\tan(\delta) = -\frac{\cos^2(\psi)}{\tan(\alpha)} \Longrightarrow \delta \neq \alpha + \text{cste}$$

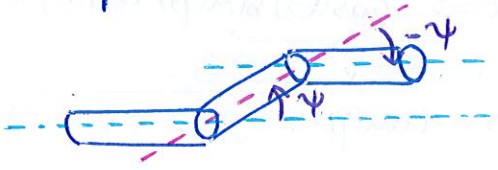
↳ cette transmission n'est pas homocinétique

Q9) Par symétrie (on peut aussi le voir dans : $\cos(\psi) = \cos(-\psi)$ et $\sin^2(\psi) = \sin^2(-\psi)$)

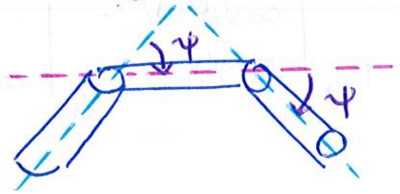
↳ les deux seuls montage homocinétique du double joint de Cardan sont ceux :

- "parallèle" avec des cassures opposées ψ puis $-\psi$ → celles représentées
- "parallèle" avec des cassures égales ψ puis ψ.

Q10)



Montage en "Z"



Montage en "W"