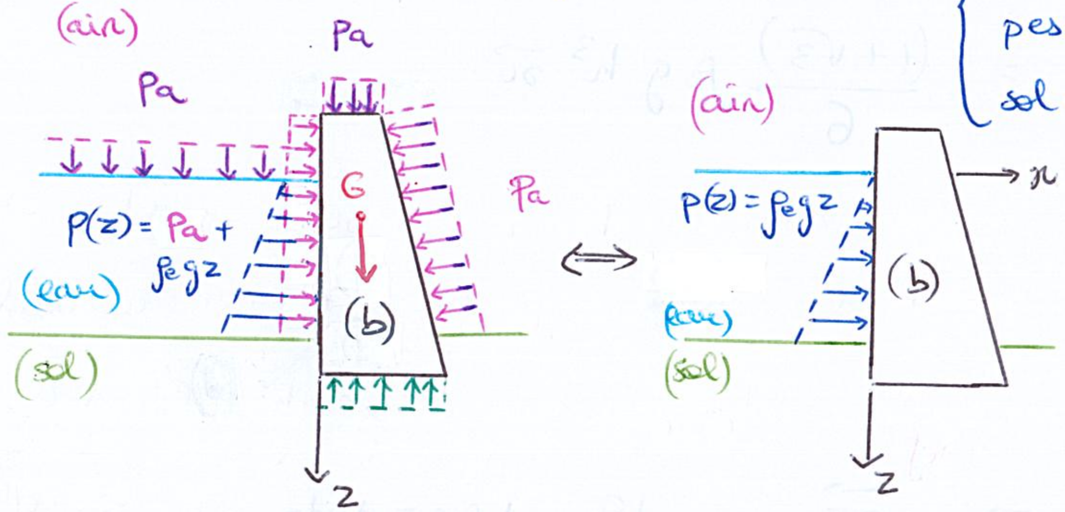
TD 1 – Modélisation des actions mécaniques

Exercice 1 : Pression de l'eau sur un barrage

Q1) La composante constante "p_a" modélisant la pression atmosphérique est compensée au niveau de la résultante globale de la Σ AM extérieure s'appliquant au barrage !

$\Rightarrow$ Il est donc inutile de la considérer dans les calculs. En effet : <u>BAME</u> :
- eau $\rightarrow$ barrage (b)
- air $\rightarrow$ b ($\vec{x}$) ($\vec{z}$)
- pesanteur $\rightarrow$ b selon $\vec{z}$
- sol $\rightarrow$ b selon $-\vec{z}$



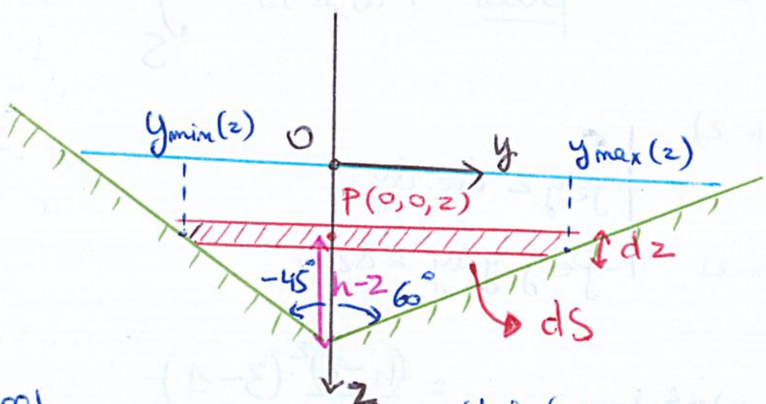
car :

$$\int_{(b)} \rightarrow + \leftarrow = \vec{0}$$

$$\int_{(b)} \downarrow + \downarrow + \uparrow = \vec{0}$$

Q2) Au vu de la géométrie du problème, on utilise les coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} 0 \\ y \\ z \end{vmatrix}_B \quad \text{où } B = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$



$$d\overrightarrow{F_{P,e\to b}} = \rho_e g z \, dS \, \vec{x}$$

↳ dépend seulement de z

En effet $\tan(-45) = -1 = \dfrac{y_{min}(z)}{h-z}$ et $\tan(60) = \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $dS = \underbrace{(1+\sqrt{3})(h-z)}_{y_{max}-y_{min}} dz$

alors $\overrightarrow{R}_{e\to b} = \int_{z=0}^{h} d\overrightarrow{F}_{P,e\to b} = \int_0^h (1+\sqrt{3})\rho_e g\, z(h-z)\,dz\ \vec{x}$

<u>Remarque</u> : Ce $dS = (1+\sqrt{3})(h-z)\,dz$ revient juste à $\int_{y_{min}(z)}^{y_{max}(z)} dy$

puisque $p(z)$ indep de y !

$$\iff \int_S p(z)\,dy\,dz = \int_{z=0}^{h}\int_{y=-(h-z)}^{\sqrt{3}(h-z)} p(z)\,dy\,dz = \int_{y=-(h-z)}^{\sqrt{3}(h-z)} dy \int_0^h p(z)\,dz$$

↳ Permet de gagner du temps ! (en écrivant ⊖)

Donc $\overrightarrow{R}_{e\to b} = (1+\sqrt{3})\rho_e g \left[\frac{z^2 h}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_0^h \vec{x}$

$$= \frac{(1+\sqrt{3})}{6}\rho_e g\, h^3\, \vec{x}$$

Q3) <u>Méthode</u> : on va calculer $\overrightarrow{M}_{O,e\to b}$ puis chercher le point C (centre de poussé) $\in$ axe central

$$\iff \overrightarrow{M}_{C,e\to b} \underset{\text{chgt point}}{=} \underbrace{\overrightarrow{M}_{O,e\to b} + \overrightarrow{CO}\wedge\overrightarrow{R}_{e\to b} = \vec{0}}_{\text{éq permettant de déterminer coordonnées de C}}$$

↳ $d\overrightarrow{M}_{O,e\to b} = \overrightarrow{OP}\wedge d\overrightarrow{F}_{P,e\to b} = \begin{vmatrix} 0 \\ y \\ z \end{vmatrix}_{B} \wedge \begin{vmatrix} \rho_e g z\,dy\,dz \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{B}$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ \rho_e g\, z^2 dz\, dy \\ -\rho_e g\, y\,dy\, z\,dz \end{vmatrix}_{B}$$

<u>puis</u> $\overrightarrow{M}_{O,e\to b} = \int_S d\overrightarrow{M}_{O,e\to b}$

↓

intégrer un vecteur revient à $\int$ chacune de ses coordonnées dans base fixe

Ainsi, $\overrightarrow{M}_{O,e\to b} = \int_{z=0}^{h}\int_{y=-(h-z)}^{\sqrt{3}(h-z)} \begin{vmatrix} 0 \\ \rho_e g\, z^2 dz\, dy \\ -\rho_e g\, y\,dy\, z\,dz \end{vmatrix}$

intégration selon y en 1er puisque dépend de z

$$= \int_{z=0}^{h} \begin{vmatrix} 0 \\ \rho_e g (1+\sqrt{3})(h-z) z^2 dz \\ -\rho_e g\, z\,dz \underbrace{\left[y^2/2 \right]_{-(h-z)}^{\sqrt{3}(h-z)}}_{= \frac{(h-z)^2}{2}(3-1) = (h-z)^2} \end{vmatrix}_{B}$$

Ainsi, $\overrightarrow{M_{O,e\to b}} = \begin{vmatrix} 0 \\ \rho_e g (1+\sqrt{3}) \left[h\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \right]_0^h \\ -\rho_e g \left[h^2 \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4} - 2h\frac{z^3}{3} \right]_0^h \end{vmatrix}_B$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{\rho_e g (1+\sqrt{3}) h^4}{12} \\ -\dfrac{\rho_e g h^4}{12} \end{vmatrix}_B$$

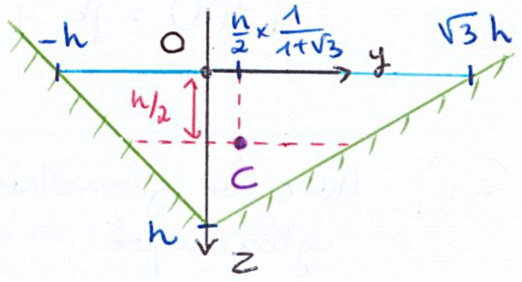
Enfin, par définition du centre de poussé $C = \begin{vmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{vmatrix}_B$ étant l'intersection de l'axe central de $T_{e\to b}$ et le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$ alors :

$$x_c = 0 \text{ et } C / \overrightarrow{M_{C,e\to b}} = \vec{0} \underset{\text{BABAR}}{=} \overrightarrow{M_{O,e\to b}} + \overrightarrow{CO} \wedge \overrightarrow{R_{e\to b}}$$

$$\iff \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_B = \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{\rho_e g (1+\sqrt{3})}{12} h^4 \\ -\dfrac{\rho_e g\, h^4}{12} \end{vmatrix}_B + \begin{vmatrix} 0 \\ -y_c \\ -z_c \end{vmatrix}_B \wedge \begin{vmatrix} \dfrac{\rho_e g (1+\sqrt{3})}{6} h^3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_B$$

$$\iff \begin{cases} /\vec{y} : \dfrac{\rho_e g (1+\sqrt{3})}{12} h^4 - \dfrac{\rho_e g (1+\sqrt{3})}{6} h^3 z_c = 0 \\ /\vec{z} : -\dfrac{\rho_e g\, h^4}{12} + \dfrac{\rho_e g (1+\sqrt{3})}{6} h^3 y_c = 0 \end{cases}$$

Finalement, $\overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{h}{2} \times \dfrac{1}{1+\sqrt{3}} \\ \dfrac{h}{2} \end{vmatrix}_B$



Exercice 2 : Restaurant sous-marin

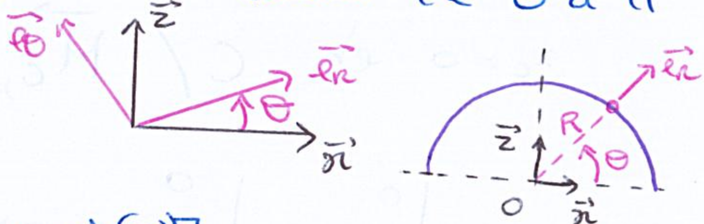
Q1) D'après lois de l'hydrostatique, en notant z la profondeur du point $\underline{P}$ alors $\underbrace{p(z) = az + b}_{\text{variation linéaire}}$

Avec $\begin{cases} p(0) = p_a + \rho_e g (H+R) \\ p(H+R) = p_a \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad p(z) = p_a + \rho_e g (H + R - z)$$

Or $P \in \{\text{baie vitrée}\}$ ie: le demi-cercle de rayon R pour θ variant de 0 à π

alors $z(\theta) = R \sin(\theta)$



$$\Longrightarrow \quad p(\theta) = p_a + \rho_e g \left[H + R(1 - \sin(\theta))\right]$$

Q2) Pour pouvoir négliger la variation "ΔP" de pression entre le haut $(z = R)$ et le bas $(z = 0)$ de la baie vitrée

$$\Longleftrightarrow \quad p(0) = \underbrace{P(R)}_{\text{notée "p"}} + \Delta P \quad \text{avec } \Delta P \ll P(R)$$

Or $\begin{cases} p(0) = p_a + \rho_e g (H+R) \\ P(R) = p_a + \rho_e g H \end{cases} \Longrightarrow$ <u>condition</u> : $\Delta P = \rho_e g R \ll p_a + \rho_e g H$

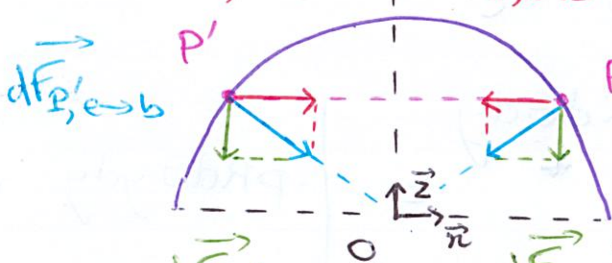
Q3) Avec la géométrie cylindrique : $\vec{OP} = \begin{vmatrix} R\cos(\theta) \\ y \\ R\sin(\theta) \end{vmatrix}$ $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec $\begin{cases} \theta \in [0, \pi] \\ y \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \end{cases}$

3

d'où $\overrightarrow{R_{e\to b}} = \int_S \overrightarrow{dF_{I,e\to b}} = \left(\int_S \overrightarrow{dF_{P,e\to b}}\cdot\vec{z}\right)\vec{z} + \underbrace{\left(\int_S \overrightarrow{dF_{P,e\to b}}\cdot\vec{x}\right)\vec{x}}_{=0}$

car les composantes locales selon $\vec{x}$ se compensent !

$\overrightarrow{dF_{P',e\to b}}\cdot\vec{x} + \overrightarrow{dF_{P,e\to b}}\cdot\vec{x} = 0$



$\overrightarrow{dF_{P,e\to b}}$ selon $-\vec{e_R}$

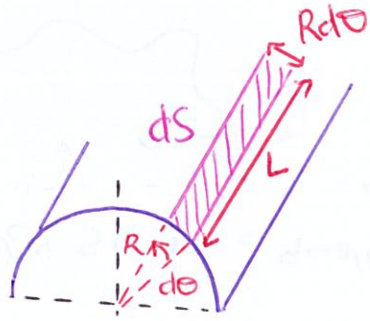
↳ t.q. normale à la surface sur laquelle elle s'applique !

$\underbrace{\overrightarrow{dF_{P',e\to b}}\cdot\vec{z} \quad \overrightarrow{dF_{P,e\to b}}\cdot\vec{z}}_{\text{s'additionnent}}$

avec $\overrightarrow{dF_{P,e\to b}} = -p\,dS\,\vec{e_R} = \begin{vmatrix} -p\cos(\theta)dS \\ 0 \\ -p\sin(\theta)dS \end{vmatrix}_B$

indépendant de y → on choisit la bande infinitésimale :

$dS = L \times R\,d\theta$



Finalement, $\overrightarrow{R_{e\to b}} = \left(\int_{\theta=0}^{\pi} -p\sin(\theta)L R\,d\theta\right)\vec{z} = -2pLR\vec{z}$

Q4) Comme O est le centre de la base rectangulaire du demi-cylindre, par symétrie, tous les moments élémentaires se compensent !

$\Rightarrow \overrightarrow{M_{O,e\to b}} = \int_S \overrightarrow{dM_{O,e\to b}} = \vec{0}$

↳ Argument de symétrie est parfaitement recevable et très efficace pour cette Q qui ne demande pas de "calculer..."

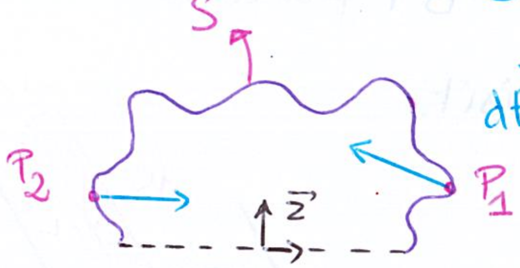
↳ Dans le cas contraire, bien que moins rigoureux (car il faudrait reprojeter dans la base fixe $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$)

↳ on reste dans $(\vec{e_R}, \vec{e_\theta}, \vec{e_y}) = \mathcal{B}_c$

$$d\vec{M}_{O,e\to b} = \begin{vmatrix} R \\ 0 \\ y \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_c} \wedge \begin{vmatrix} -pR\,d\theta\,dy \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_c} = \begin{vmatrix} -pR\,d\theta\, y\,dy \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_c}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{O,e\to b} = \underbrace{\int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} y\,dy}_{=0} \int_{\theta=0}^{\pi} -pR\vec{e_\theta}\,d\theta = \vec{0}$$

P5)



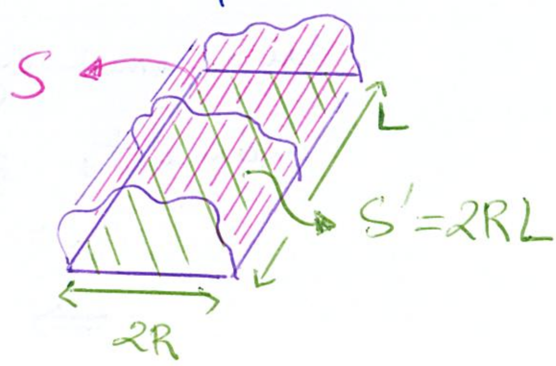
$d\vec{F}_{P_1,e\to b} = -p\,dS\,\vec{n}(P_1)$

$d\vec{F}_{P_2,e\to b} = -p\,dS\,\vec{n}(P_2)$

↳ On ne peut calculer à la main la résultante :

$$\vec{R}_{e\to b} = \int_S d\vec{F}_{P,e\to b} = -p\int_S \vec{n}(P)\,dS \quad \text{car } \vec{n}(P)$$

ne se décompose pas facilement sur $\mathcal{B}$ au vu de la géométrie de S !



Méthode ♥ ♥ Comme l'$\int$ à calculer dépend que de la normale $\vec{n}(P)$ à la surface ⇒ on va venir fermer la surface S avec S' → géométrie facile à calculer à la main

alors $\boxed{\int_{S+S'} \vec{n}(P)\,dS = \vec{0} \Leftrightarrow \int_S \vec{n}\,dS = -\int_{S'} \vec{n}\,dS}$ $\quad \vec{n}(P\in S') = \vec{z}$

↳ En effet, on fait "un tour complet" puisque S+S' est une surface fermée ⇒ l'addition de tous les normales locales $\vec{n}(P)$ se compensent !

<u>Remarque</u> : c'est une conséquence directe du Th. de Green – Ostrogradski que vous verrez en 2e année.

Ainsi, $\vec{R}_{e\to b} = -\int_{S'} d\vec{F}_{P,e\to b} = -p S' \vec{z}$

↳ On retrouve le résultat précédent que l'on avait fait Q3 ⟶ ça montre bien que ne dépend pas de la géométrie de S.

⇒ Méthode à avoir en tête car extrêmement rapide dès que S' "simple"

Q6) Si p(z) dépendant du point P alors

$$\vec{R}_{e\to b} = \int_S -p(z)\,\vec{n}(P)\,dS \neq -p(z)\int_S \vec{n}(P)\,dS$$

qui choisirait-on ???

↳ on ne peut donc plus appliquer la méthode ⇒ résultat à priori n'est plus valable :

$$\vec{R}_{e\to b} \neq -p(0)\,S'\,\vec{z}$$

<u>Rq</u> : Vous pouvez vous en convaincre dans le cas de la surface cylindrique !